

JOSÉ ALFREDO JIMÉNEZ MURILLO

MATEMÁTICAS

PARA LA

COMPUTACIÓN

3ª EDICIÓN



Apoyo en la

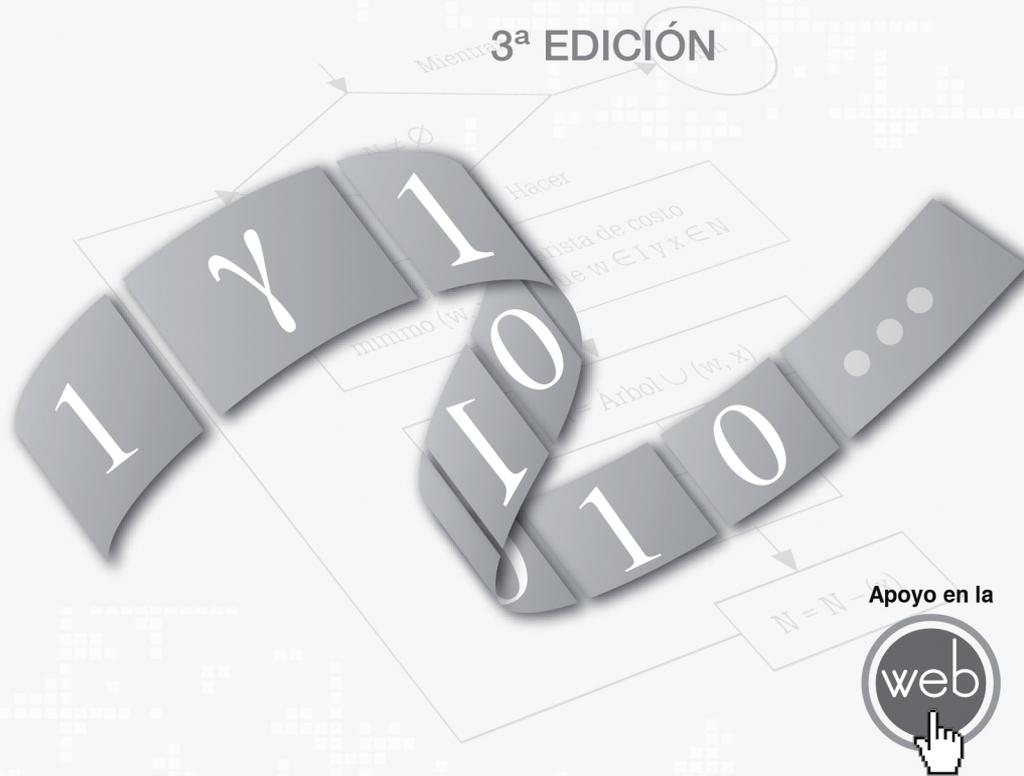


 **Alfaomega**

JOSÉ ALFREDO JIMÉNEZ MURILLO

MATEMÁTICAS PARA LA COMPUTACIÓN

Mientras **3ª EDICIÓN**



 **Alfaomega**

Director Editorial

Marcelo Grillo Giannetto
mgrillo@alfaomega.com.mx

Jefe de Ediciones

Francisco Javier Rodríguez Cruz
jrodriguez@alfaomega.com.mx

Supervisión Editorial

Ana Edith Hernández Velázquez
ehernandez@alfaomega.com.mx

Datos catalográficos

Jiménez Murillo, José Alfredo
Matemáticas para la Computación 3ª Edición

Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V., México

ISBN 978-607-622-511-0

Formato: 21 × 24 cm

Páginas: 576

Matemáticas para la Computación 3ª Edición

José Alfredo Jiménez Murillo

Derechos reservados ©Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V., México.

Tercera edición: Alfaomega Grupo Editor, México, agosto de 2015

©2015 Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V.

Pitágoras 1139, Col. Del Valle, 03100, México D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana

Registro No. 2317

Pág. Web: <http://www.alfaomega.com.mx>

E-mail: atencionalcliente@alfaomega.com.mx

ISBN: 978-607-622-511-0

Derechos reservados:

Esta obra es propiedad intelectual de sus autores y los derechos de publicación en lengua española han sido legalmente transferidos al editor. Prohibida su reproducción parcial o total por cualquier medio sin permiso por escrito del propietario de los derechos del copyright. Esta obra fue compuesta en Latex usando MiKTeX 2.8.

Nota importante:

La información contenida en esta obra tiene un fin exclusivamente didáctico y, por lo tanto, no está previsto su aprovechamiento a nivel profesional o industrial. Las indicaciones técnicas y programas incluidos, han sido elaborados con gran cuidado por los autores y reproducidos bajo estrictas normas de control. ALFAOMEGA GRUPO EDITOR, S.A. de C.V. no será jurídicamente responsable por: errores u omisiones; daños y perjuicios que se pudieran atribuir al uso de la información comprendida en este libro, ni por la utilización indebida que pudiera dársele.

Edición autorizada para venta en todo el mundo.

Impreso en México. Printed in Mexico.

Empresas del grupo:

México: Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V.-Pitágoras 1139, Col. Del Valle, México, D.F.-C.P. 03100.

Tel.: (52-55) 5575-5022 - Fax: (52-55) 5575-2420 / 2490. Sin costo: 01-800-020-4396

E-mail: atencionalcliente@alfaomega.com.mx

Colombia: Alfaomega Colombia S.A. - Calle 62, No. 20-46, Barrio San Luis, Bogotá, Colombia.

Tel.: (57-1) 746-0102 / 210-0415 - E-mail: cliente@alfaomega.com.co

Chile: Alfaomega Grupo Editor, S.A. - Av. Providencia 1443, Oficina 24, Santiago, Chile

Tel.: (56-2) 2235-4248 - Fax: (56-2) 2235-5786. E-mail: agechile@alfaomega.cl

Argentina: Alfaomega Grupo Editor Argentino, S.A. - Paraguay 1307 P.B. Of. 11, C.P. 1087, Buenos Aires, Argentina.

Tel./Fax: (54-11) 4811-8887 y 4811 7183. E-mail: ventas@alfaomegageditor.com.ar

Mensaje del Editor

Una de las convicciones fundamentales de Alfaomega es que los conocimientos son esenciales en el desempeño profesional, ya que sin ellos es imposible adquirir las habilidades para competir laboralmente. El avance de la ciencia y de la tecnología hace necesario actualizar continuamente esos conocimientos, y de acuerdo con esta circunstancia Alfaomega publica obras actualizadas, con alto rigor científico y técnico, y escritas por los especialistas del área respectiva más destacados.

Consciente del alto nivel competitivo que debe de adquirir el estudiante durante su formación profesional, Alfaomega aporta un fondo editorial que se destaca por sus lineamientos pedagógicos que coadyuvan a desarrollar las competencias requeridas en cada profesión específica.

De acuerdo con esta misión, con el fin de facilitar la comprensión y apropiación del contenido de esta obra, cada capítulo inicia con el planteamiento de los objetivos del mismo y con una introducción en la que se plantean los antecedentes y una descripción de la estructura lógica de los temas expuestos, asimismo a lo largo de la exposición se presentan ejemplos desarrollados con todo detalle y cada capítulo concluye con un resumen y una serie de ejercicios propuestos.

Además de la estructura pedagógica con que está diseñado el contenido de nuestros libros, Alfaomega hace uso de los medios impresos tradicionales en combinación con las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) para facilitar el aprendizaje. Correspondiente a este concepto de edición, todas nuestras obras tienen su complemento en una página Web en donde el alumno y el profesor encontrarán lecturas complementarias así como programas desarrollados en relación con temas específicos de la obra.

Los libros de Alfaomega están diseñados para ser utilizados en los procesos de enseñanza aprendizaje, y pueden ser usados como textos en diversos cursos o como apoyo para reforzar el desarrollo profesional, de esta forma Alfaomega espera contribuir así a la formación y al desarrollo de profesionales exitosos para beneficio de la sociedad, y espera ser su compañera profesional en este viaje de por vida por el mundo del conocimiento.

Acerca del autor



José Alfredo Jiménez Murillo. Originario de Villa Morelos Michoacán, México, el Maestro Jiménez Murillo obtuvo el título de Ingeniero Industrial Mecánico en Diseño de Manufactura con el trabajo de tesis “Diseño industrial de engranes por computación” en el Instituto Tecnológico de Morelia (ITM), Morelia Mich. Méx., asimismo obtuvo el grado de Maestría en Ciencias en Cómputo Aplicado en el Centro de Estadística y Cálculo (CEC) del Colegio de Postgraduados (CP), en Montecillo Estado de México, con la tesis “Diseño y simulación del circuito de control para una etiquetadora (DYSCCE)”, además de recibir un reconocimiento por la gran trayectoria académica mostrada durante su estancia en ese centro de Investigación.

Posteriormente obtuvo una segunda Maestría en Ciencias en la Enseñanza de las Ciencias, en el área de Matemáticas en el Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica (CIIDET) de la Ciudad de Querétaro Qro. Méx., con la tesis “Método didáctico para la enseñanza-aprendizaje de las relaciones y funciones”, y también recibió un reconocimiento como el mejor promedio de su generación.

En sus más de 30 años de experiencia profesional ha dictado innumerables conferencias e impartido varios cursos relacionados con el área de las ciencias exactas y la computación, ha sido maestro de varias materias en el campo de las matemáticas, la física y la computación en los niveles de licenciatura y posgrado.

Tiene una trayectoria distinguida en el Sistema de Institutos Tecnológicos de la República Mexicana, donde ha participado en el desarrollo de programas de asignaturas del plan de estudio de diferentes ingenierías. Ha sido asesor de distintos trabajos de titulación a nivel licenciatura y posgrado y sus líneas de investigación son las Matemáticas discretas e Ingeniería del software. Actualmente es maestro titular de Matemáticas discretas en el Instituto Tecnológico de Morelia.

A la memoria de mis padres:

Marcelo y Josefina

Con todo mi amor para mis hijos:

Eréndira Miriam

Paola y

Marcelo

Agradecimientos

Antes que nada agradezco a los alumnos que me ayudaron a corregir errores y ambigüedades de esta obra, sus comentarios y sugerencias fueron y son de gran valor para mejorar y enriquecer esta edición. Imposible citarlos a todos, pero mi reconocimiento más sincero para cada uno de ellos.

Agradezco al Tecnológico Nacional de México, en especial al Instituto Tecnológico de Morelia por las facilidades otorgadas para la realización de la primera y segunda edición de este libro.

También agradezco a Alfaomega Grupo Editor que me permitió compartir y publicar este material. Mi reconocimiento para todos aquellos que de una manera u otra, han hecho posible la edición de este libro, en especial a Carlos Umaña, Director de Alfaomega, a Marcelo Grillo, Director editorial de Alfaomega, y especialmente a Javier Rodríguez Cruz, Editor de este libro, con quien fue un placer trabajar.

Deseo agradecer también a maestros de Instituciones Educativas que han utilizado este libro en su aula de clase. A aquellos que se tomaron la molestia de leer, revisar y emitir sugerencias que le dan valor a este libro, en especial a los siguientes profesores:

Gabriel Hurtado Chong
Maria Elena Markiewicz
Jorge I. López Chalé

Universidad Nacional Autónoma de México
Universidad de Río Cuarto. Argentina
Instituto Tecnológico de Morelia. México.

Contenido

Prefacio	XV
Material web de apoyo	XVII
Plataforma de contenidos interactivos	XVII
Capítulo 1. Sistemas numéricos	
1.1. Introducción	2
1.2. Sistema decimal	4
1.3. Sistemas binario, octal y hexadecimal	5
1.3.1. Sistema binario	5
1.3.2. Sistema octal	7
1.3.3. Sistema hexadecimal	11
1.4. Generalización de las conversiones	13
1.5. Operaciones básicas	15
1.5.1. Suma	15
1.5.2. Resta	18
1.5.3. Multiplicación	21
1.5.4. División	24
1.6. Suma de dos cantidades en complemento a 2	28
1.7. Multiplicación de dos cantidades usando el algoritmo de Booth	34
1.8. Aplicación de los sistemas numéricos	45
1.9. Resumen	46
1.10. Material Web Complementario	48
1.11. Problemas	49
Capítulo 2. Métodos de conteo	
2.1. Introducción	58
2.2. Principios fundamentales del conteo	59
2.2.1. Principio fundamental del producto	59
2.2.2. Principio fundamental de la adición	62
2.3. Permutaciones	63

2.4. Combinaciones	71
2.5. Principio del palomar	75
2.6. Aplicaciones en el área de la computación	79
2.6.1. Binomio elevado a la potencia n	79
2.6.2. Triángulo de Pascal	82
2.6.3. Sort de la burbuja (bubble sort)	84
2.7. Resumen	85
2.8. Material Web Complementario	87
2.9. Problemas	88
Capítulo 3. Conjuntos	
3.1. Introducción	98
3.2. Concepto de conjunto	100
3.3. Subconjuntos	103
3.4. Diagramas de Venn	105
3.5. Operaciones y leyes de conjuntos	106
3.5.1. Unión ($A \cup B$)	107
3.5.2. Intersección ($A \cap B$)	108
3.5.3. Ley distributiva	109
3.5.4. Complemento (A')	111
3.5.5. Ley de Morgan	112
3.5.6. Diferencia ($A - B$)	114
3.5.7. Diferencia simétrica ($A \oplus B$)	115
3.6. Simplificación de expresiones usando leyes de conjuntos	120
3.7. Relación entre teoría de conjuntos, lógica matemática y álgebra booleana	124
3.8. Conjuntos finitos	127
3.9. Aplicación de la teoría de conjuntos	130
3.10. Resumen	131
3.11. Material Web Complementario	133
3.12. Problemas	133
Capítulo 4. Lógica matemática	
4.1. Introducción	144
4.2. Proposiciones	146
4.2.1. Proposiciones compuestas	147
4.2.2. Proposición condicional (\rightarrow)	151

4.2.3. Proposición bicondicional (\leftrightarrow)	152
4.3. Tablas de verdad	155
4.3.1. Tautología, contradicción y contingencia	159
4.3.2. Contradicción	161
4.3.3. Contingencia	161
4.4. Inferencia lógica	162
4.5. Equivalencia lógica	165
4.6. Demostración formal	169
4.6.1. Demostración por el método directo	170
4.6.2. Demostración por contradicción	175
4.7. Argumentos válidos y no válidos	178
4.7.1. Método de Quine	182
4.7.2. Tipos de argumentos	187
4.8. Predicados y sus valores de verdad	188
4.9. Inducción matemática	197
4.10. Aplicación de la lógica matemática	201
4.11. Resumen	203
4.12. Problemas	205
Capítulo 5. Álgebra booleana	
5.1. Introducción	214
5.2. Expresiones booleanas	215
5.3. Propiedades de las expresiones booleanas	216
5.4. Optimización de expresiones booleanas	218
5.4.1. Simplificación de expresiones booleanas mediante teoremas del álgebra de Boole	219
5.4.2. Simplificación de expresiones booleanas usando mapas de Karnaugh	222
5.5. Compuertas lógicas	234
5.6. Aplicaciones del álgebra booleana	245
5.7. Resumen	247
5.8. Problemas	248
Capítulo 6. Relaciones	
6.1. Introducción	256
6.2. Elementos de una relación	257
6.2.1. Producto cartesiano	259
6.2.2. Relación binaria	260

6.2.3.	Matriz de una relación	261
6.2.4.	Grafo de una relación	262
6.3.	Tipos de relaciones	264
6.3.1.	Relación reflexiva	264
6.3.2.	Relación irreflexiva	265
6.3.3.	Relación simétrica	265
6.3.4.	Relación asimétrica	266
6.3.5.	Relación antisimétrica	267
6.3.6.	Relación transitiva	267
6.4.	Relaciones de equivalencia, clases de equivalencia y particiones	272
6.4.1.	Cerraduras	275
6.5.	Operaciones entre relaciones	279
6.6.	Propiedades de las relaciones	282
6.7.	Diagramas de Hasse	284
6.8.	Aplicaciones de las relaciones	290
6.8.1.	Una lista enlazada es una relación	290
6.8.2.	La relaciones en las bases de datos	295
6.9.	Funciones	298
6.9.1.	Composición de funciones	302
6.9.2.	Tipos de funciones	303
6.10.	Funciones invertibles	306
6.11.	Aplicación de las funciones	308
6.12.	Resumen	309
6.13.	Problemas	313
Capítulo 7. Grafos		
7.1.	Introducción	326
7.2.	Partes de un grafo	329
7.3.	Tipos de grafos	330
7.4.	Representación matricial	334
7.5.	Caminos y circuitos	335
7.6.	Isomorfismo	343
7.7.	Grafos planos	347
7.8.	Coloración de grafos	351
7.8.1.	Número cromático	351

7.8.2. Características del número cromático	354
7.8.3. Coloración de grafos planos	355
7.8.4. Polinomio cromático	359
7.9. Aplicaciones de los grafos	363
7.9.1. Reconocimiento de patrones mediante grafos de similaridad	363
7.9.2. Determinación de la ruta más corta mediante grafos ponderados	366
7.10. Resumen	371
7.11. Problemas propuestos	374
Capítulo 8. Árboles	
8.1. Introducción	390
8.2. Propiedades de los árboles	391
8.3. Tipos de árboles	392
8.3.1. Clasificación por número de nodos	392
8.3.2. Clasificación por altura	394
8.4. Bosques	396
8.5. Árboles con pesos	397
8.6. Árboles generadores	402
8.6.1. Búsqueda a lo ancho.	402
8.6.2. Búsqueda en profundidad	403
8.6.3. Obtención de árboles generadores	404
8.6.4. Árbol generador mínimo	408
8.7. Recorrido de un árbol	416
8.7.1. Recorridos en árboles etiquetados	418
8.8. Búsquedas	423
8.8.1. Árboles de búsqueda binarios	423
8.9. Aplicación de los árboles	426
8.10. Resumen	428
8.11. Problemas	429
Capítulo 9. Introducción a los lenguajes formales	
9.1. Introducción	438
9.2. Gramáticas y lenguajes formales	439
9.2.1. Estructuración de las gramáticas	439
9.2.2. Clasificación de las gramáticas	441
9.2.3. Representación de las gramáticas	443

9.3. Autómatas finitos	450
9.3.1. Terminología básica	451
9.3.2. Autómatas finitos determinísticos (AFD)	461
9.3.3. Autómatas finitos no determinísticos (AFN)	462
9.3.4. Conversión de un AFN a un AFD	464
9.4. Máquinas de estado finito	467
9.4.1. Equivalencia entre autómatas finitos y máquinas de estados finitos	470
9.4.2. Máquinas de Turing.	473
9.5. Teoría de la computabilidad	481
9.5.1. Teoría de la complejidad	483
9.6. Aplicación de los lenguajes formales	486
9.7. Resumen	490
9.8. Problemas	493
Respuestas seleccionadas	503
Índice analítico	553

Prefacio

Las matemáticas siempre han sido una de las disciplinas que le cuesta más trabajo entender a los estudiantes. Si se observan las estadísticas de reprobación en las carreras relacionadas con la computación, también la materia de programación es una aduana muy difícil de librar. Sin embargo, al mismo tiempo ambas disciplinas constituyen un campo importante, apasionante y ameno. La computación y las matemáticas tienen gran relación entre sí, solamente hay que recordar que las computadoras fueron creadas inicialmente para realizar con mayor rapidez operaciones matemáticas, y la computación no se podría entender sin la participación de las matemáticas. Es cierto que actualmente la computación apoya a todas las actividades que se desarrollan diariamente en la administración, educación, medicina, ingeniería e investigación.

Simplemente no se podría entender el funcionamiento adecuado de una empresa sin la ayuda de la computadora, ¿qué haríamos si se tuviera que regresar al tiempo en que todo se procesaba manualmente? ¿Qué pasaría si no se contara con el correo electrónico, hojas de cálculo, procesadores de texto, lenguajes de programación e internet? Si bien es cierto que todos estos elementos son parte de las acciones que se pueden llevar a cabo en la computadora, también lo es que las matemáticas proporcionaron el soporte necesario para desarrollar todas estas herramientas computacionales. Ramas de las matemáticas como sistemas numéricos, métodos de conteo, conjuntos, matrices, lógica matemática, álgebra booleana, relaciones y funciones, son la base para el diseño de todo lo que se maneja en la computadora. Es por eso que surgen las matemáticas para la computación, mismas que permiten entender el aspecto formal de la relación matemáticas-computadora.

La presente obra tiene como objetivo fundamental que los alumnos que cursan alguna carrera relacionada con la computación, aprendan con facilidad los conocimientos básicos matemáticos necesarios para entender el principio matemático usado en la creación de herramientas computacionales, se espera que el joven que incursiona en el siempre interesante mundo de la computación, tenga una visión más clara de los aspectos que se toman en cuenta para el desarrollo y manejo de estructuras de datos, bases de datos, circuitos electrónicos y lenguajes de programación, no para desarrollar un software al final del curso, pero sí para tener una mejor visión de todo aquello que ayudó a desarrollar estas herramientas computacionales que hoy usamos y de las cuales somos muy dependientes. Para entender el contenido del libro no es necesaria una plataforma muy fuerte de matemáticas, ya que se tratan todos los temas con palabras y conceptos que los estudiantes pueden entender, sin olvidar el aspecto formal propio de las matemáticas.

En la presente obra se pretende que el alumno vincule los conocimientos matemáticos con la compu-

tación, usando los esquemas de conocimientos con los cuales los alumnos llegan a la licenciatura, con la finalidad de que el alumno le de significado al material presentado en los diferentes temas en cada uno de los capítulos se resuelven problemas representativos e ilustrativos, pero se dejan para que el alumno resuelva otros algunas veces con mayor dificultad e igualmente interesantes, con la finalidad de que el alumno relacione lo aprendido en el aula con el nuevo problema a resolver, lo cual habla de un conocimiento significativo y el aprendizaje basado en competencias. Se recomienda al maestro asignar proyectos que tengan relación con el material del libro, para que los alumnos los desarrollen fuera del salón de clases, con el fin de que el alumno realice trabajo en equipo, ya que se pretende que estos proyectos tengan mayor dificultad, en donde implique el trabajo de más de una persona. La presente obra tiene las bases para que el alumno pueda aumentar su estructura cognoscitiva, al relacionar las matemáticas con la computación.

Este libro está integrado por nueve capítulos. El capítulo uno es *sistemas numéricos* y tiene como finalidad la representación y operación de cantidades en los sistemas binario, octal y hexadecimal como una forma de comunicación entre el ser humano y la computadora, se aborda la forma de llevar acabo operaciones aritméticas básicas en diferentes sistemas numéricos, la suma de dos cantidades en complemento a dos, adicionalmente en esta edición se tiene la multiplicación de dos cantidades usando el algoritmo de Booth. El segundo capítulo es *métodos de conteo*, mismos que permiten evaluar y mejorar el software, ya que en computación se busca desarrollar software cada vez más eficiente y compacto, que permita disminuir el número de interacciones, comparaciones y ciclos, tendientes a optimizar los recursos, tiene información de combinaciones, permutaciones, binomio de Newton y se agrega el problema del palomar. El tercer capítulo es *conjuntos*, ya que son las bases necesarias para entender todo el material relacionado con la computación, se establece la relación de los conjuntos con lógica matemática y álgebra booleana. En el cuarto capítulo se aborda *lógica matemática*, con el objetivo de que el alumno aprenda a resolver problemas usando como herramientas fundamentales la reflexión, vinculación y el sentido común, pero teniendo como herramientas las reglas de inferencia, equivalencias lógicas y tautologías, en este capítulo se aborda la validez de proposiciones por medio de métodos deductivos como ocurre con la demostración por el método directo y contradicción, pero también se usa inducción matemática para demostrar si una proposición es cierta, como una alternativa para probar algoritmos, se incluye información del método de Quine para demostrar la validez de una proposición. El quinto capítulo es *álgebra booleana*, cuya finalidad es que el alumno adquiera las bases necesarias para entender, representar y manejar circuitos electrónicos básicos partiendo de la consideración de que la computadora está integrada con ellos, se simplifican funciones booleanas por medio de teoremas del álgebra booleana y mapas de Karnaugh, así como la representación de expresiones booleanas usando para ello bloques lógicos.

El sexto capítulo es *relaciones y funciones*, con el objetivo de que el estudiante aprenda la representación y manejo de las relaciones, sabiendo de antemano que en las relaciones y funciones son esenciales en bases de datos, estructuras de datos y programación, se incluyó material de diagramas de Hasse. El séptimo capítulo es *grafos*, partiendo del hecho de que los grafos son una representación gráfica de las redes de comunicación, incluyendo por supuesto las redes de computadoras, se abordan circuitos famosos como el circuito de Euler y Hamilton, se manejan problemas en donde las aristas tienen pesos, distancias o costos, como ocurre con el algoritmo de Dijkstra, que permiten eliminar aristas costosas, se

tratan temas importantes como coloración de grafos planos y se utilizan los grafos de similaridad como una forma de discriminar información con características semejantes como ocurre en el reconocimiento de patrones. El octavo capítulo es *árboles*, los cuales son grafos no dirigidos conexos, sin ciclos ni lazos que permiten la estructuración de los datos necesaria en la computación para acceder de manera más rápida y eficiente la información, permiten la evaluación de expresiones matemáticas, se usa para la compactación de información como ocurre con el código de Huffman, en este capítulo se aborda el recorrido de árboles y la búsqueda de información a lo ancho y en profundidad. El noveno capítulo es *introducción a los lenguajes formales*, con la finalidad de que el alumno adquiriera las bases necesarias para comprender asignaturas posteriores que tienen relación directa con matemáticas para la computación, en este capítulo se tiene material de gramáticas, lenguajes regulares, árboles de derivación, autómatas finitos determinísticos y no determinísticos, máquinas de estado finito, representación BNF y máquinas de Turing.

Material Web de apoyo

Además del contenido descrito, este libro cuenta con material Web de apoyo que permitirá reforzar, complementar, y enriquecer los conocimientos del alumno y auxiliar al maestro en su noble tarea. Para el alumno los tipos específicos de material Web incluidos son los siguientes:

- Mapas conceptuales.
- Simuladores.
- Lecturas complementarias.

Para el profesor los tipos de material Web disponibles son los anteriores, además de los siguientes:

- Presentaciones en Power Point.
- Solución detallada de todos los problemas propuestos.

José Alfredo Jiménez Murillo

Plataforma de contenidos interactivos

Para tener acceso al material de la plataforma de contenidos interactivos de **Matemáticas para la computación 3^a Edición**, siga los siguientes pasos:

1. Ir a la página: <http://libroweb.alfaomega.com.mx>
2. Ir a la sección de catálogo y seleccionar la imagen de la portada del libro, al dar doble clic sobre ella tendrá acceso al material descargable.

NOTA: se recomienda respaldar los archivos descargados de la página web en un soporte físico.

9 D 4.₍₁₇₎ B 7 D .6₍₁₇₎
 6 A 0 C 8 7 .9₍₁₇₎

6 5 9 A

Capítulo 1

8 2 8
 4 0 7 B

Sistemas numéricos

9 7 B E 7
 7 8 2 1

0 3 C 6 9

3 7 B 7

0 4 C 2

- 1.1 Introducción
- 1.2 Sistema decimal
- 1.3 Sistemas binario, octal y hexadecimal
- 1.4 Generalización de las conversiones
- 1.5 Operaciones básicas
- 1.6 Suma de dos cantidades en complemento a 2
- 1.7 Multiplicación de dos cantidades usando el algoritmo de Booth
- 1.8 Aplicación de los sistemas numéricos
- 1.9 Resumen
- 1.10 Material Web Complementario
- 1.11 Problemas

La mayoría de las ideas fundamentales de la ciencia son esencialmente sencillas, y por regla general pueden ser expresadas en un lenguaje comprensible para todos.

Albert Einstein

Competencia del capítulo

Aprender a representar y realizar operaciones aritméticas básicas en diferentes sistemas numéricos, así como la suma en complemento a 2 y la multiplicación de dos cantidades por medio del algoritmo de Booth, con la finalidad de comprender la forma en que la computadora lleva a cabo el procesamiento de información.

Competencias específicas

- Representar cantidades en cualquier sistema numérico, incluyendo los sistemas binario, octal y hexadecimal.
- Realizar las operaciones aritméticas básicas en diferentes sistemas numéricos, incluyendo los sistemas de numeración binario, octal y hexadecimal.
- Sumar dos cantidades en complemento a 2, para ilustrar la forma en que la computadora lleva a cabo operaciones aritméticas.
- Multiplicar dos cantidades por medio del algoritmo de Booth.

1.1 Introducción

De acuerdo con la historia, se cree que los primeros pobladores utilizaban rayas, círculos, figuras de animales u objetos para representar cantidades. Por ejemplo, una manada de siete animales podría estar representada por siete rayas o siete figuras de ese animal, pero para representar cantidades cada vez mayores se usó la agrupación de varios símbolos en uno solo, con la finalidad de compactar la información.

Por ejemplo, los egipcios empleaban símbolos para representar cantidades y algunos de ellos son $| = 1$, $\cap = 10$, $? = 100$; utilizando éstos, la representación de 134 es la siguiente:

$$? \cap \cap \cap |||| = 134$$

Un sistema como el anterior se conoce como *sistema aditivo*, y en él se suman los valores de todos los símbolos para obtener la cantidad total, sin embargo este sistema es impráctico para la representación de cantidades grandes o muy pequeñas, ya que se necesitarían muchos símbolos para su representación.

Otro sistema aditivo es el sistema de numeración romano en el cual los símbolos I, V, X, L, C, D y M representan cantidades, y una línea sobre el símbolo implica una multiplicación del número por mil. En ambos casos se suman los valores de los caracteres de acuerdo con sus propias reglas, pero en éstas no importa la posición sino únicamente el símbolo y es por eso que se les llama *sistemas de numeración aditivos*.

Se cree que los babilonios fueron uno de los primeros pueblos en usar un sistema posicional para la representación de cantidades, ya que con base en el movimiento de los astros empleaban un sistema sexagesimal (60 caracteres diferentes, en donde cada uno representa un número) para indicar cantidades. Su sistema aún se utiliza para la medición de horas, minutos y segundos, sin embargo tiene problemas con la representación del cero.

Otro sistema posicional es el sistema numérico maya, en el que se estableció un símbolo para representar el número cero, necesario para el buen funcionamiento de todo sistema posicional, con lo cual la cultura maya hizo una aportación valiosa a la ciencia. Este sistema tiene una base de 20, y los 20 símbolos distintos correspondientes se obtienen a partir de la combinación de los que se consideran los tres símbolos básicos para la representación de cantidades. Los siguientes son algunos de los símbolos de este sistema:

	•	••	•••	••••	—
0	1	2	3	4	5
—	•	••	•••	••••	••••
6	7	10	13	15	19

Hasta este momento parece que se trata de un sistema numérico aditivo, ya que se suman las rayas y los puntos para obtener los diferentes símbolos utilizados, sin embargo a partir del 20 se utilizan los diferentes símbolos considerando la posición que ocupan, de forma que al multiplicar el símbolo por potencias de 20 (según su posición) y sumar los resultados parciales se obtiene la cantidad a representar. Se puede notar que para representar cantidades se coloca un símbolo encima del otro, asignando la posición 0 al que está en la parte más baja, al que le sigue hacia arriba la posición 1 y así sucesivamente. Como se muestra a continuación, el número que corresponde a las siguientes representaciones es el que se obtiene luego de sumar el valor de los símbolos utilizados:

$\bullet \bullet \bullet \quad 3 \times 20^2 = 1\,200$  $0 \times 20^1 = 0$ $\bullet \bullet \quad 7 \times 20^0 = 7$ <hr style="width: 20px; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 20px; margin: 0 auto;"/> $15 \times 20^3 = 120\,000$ $\bullet \bullet \quad 2 \times 20^2 = 800$  $0 \times 20^1 = 0$  $0 \times 20^0 = 0$
Cantidad: 1 207	Cantidad: 120 800

Como se ve en esta representación, la posición del símbolo utilizado juega un papel importante.

Actualmente los sistemas para la representación de cantidades son posicionales, ya que éstos tienen muchas ventajas en relación con los aditivos. Ejemplos de sistemas posicionales son los sistemas numéricos decimal, binario, octal y hexadecimal. Una característica de los sistemas posicionales es que el valor del símbolo lo determina la posición que ocupa, y la base del sistema, que es la cantidad de símbolos diferentes usados en un sistema numérico. En este libro se trata preferentemente la representación, conversión y operaciones aritméticas en los sistemas *decimal*, *binario*, *octal* y *hexadecimal*, pero es importante mencionar que el procedimiento de representación, conversión y operación es el mismo, independientemente del sistema numérico.

1.2 Sistema decimal

El sistema decimal se usa en forma rutinaria para la representación de cantidades mediante los siguientes 10 caracteres diferentes:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Con estas cifras se pueden expresar cantidades hasta el 9. Para expresar cantidades más allá de este número es necesario introducir la representación posicional, es decir, a cada cifra se le asigna un valor posicional determinado de acuerdo con el lugar que ocupa dentro del número. Por ejemplo: el número decimal 836.74 se compone en la parte entera de la cifra 8 con el valor posicional 100, la cifra 3 con el valor posicional 10 y la cifra 6 con el valor posicional 1, y en la parte fraccionaria de la cifra 7 con el valor posicional 0.1 y la cifra 4 con el valor posicional 0.01. Así se tiene que:

$$836.74 = 8 \times 100 + 3 \times 10 + 6 \times 1 + \frac{7}{10} + \frac{4}{100}$$

Usando exponentes esto se puede representar como:

$$836.74 = 8 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 6 \times 10^0 + 7 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2}$$

A esta forma de representación se le llama *representación exponencial*. La representación exponencial es especialmente importante porque por medio de ella se puede convertir una cantidad representada en

cualquier sistema numérico al sistema decimal, como se estudiará más adelante. El valor de la posición lo determina el exponente en una sucesión ascendente de derecha a izquierda para los enteros a partir del punto decimal (el 6 se encuentra en la posición 0, el 3 en la posición 1 y el 8 en la posición 2), y de izquierda a derecha para la parte fraccionaria (el 7 está en la posición -1 y el 4 en la posición -2), usando como base el número 10, debido a que se está en el sistema decimal. También se dice que la base de este sistema aritmético es 10, tomando en cuenta los 10 símbolos disponibles para representar cantidades.

Sistema decimal

De acuerdo con la antropología, el origen del sistema decimal se encuentra en el hecho de que los seres humanos tenemos diez dedos en las manos.

1.3 Sistemas binario, octal y hexadecimal

1.3.1 Sistema binario

En el sistema binario sólo hay dos cifras: 0 y 1. Como sucede en el sistema decimal, en el sistema binario también se utilizan exponentes para expresar cantidades mayores. Mientras que en el sistema decimal la base es 10, en el sistema binario la base es 2.

Como se mencionó anteriormente, la representación exponencial se utiliza para convertir una cantidad de un sistema numérico cualquiera al sistema decimal. A continuación se muestra la forma de hacer esto.

Ejemplo 1.1

Convertir el número binario 10011.01 a decimal.

Solución. Expresando el número propuesto en notación exponencial y realizando las operaciones correspondientes, se obtiene la siguiente conversión de binario a decimal:

$$\begin{aligned} 10011.01_{(2)} &= 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} \\ &= 16 + 0 + 0 + 2 + 1 + 0 + 0.25 = 19.25_{(10)} \end{aligned}$$

Como el 0 y el 1 son caracteres válidos en el sistema decimal y en otros sistemas de mayor base, de aquí en adelante se indicará el sistema en que se encuentra un número expresando su base como un subíndice entre paréntesis, como se hizo en el ejemplo anterior en el que la cantidad binaria está indicada como $10011.01_{(2)}$.

Toda cantidad multiplicada por cero es cero, como se mostró en el caso anterior, sin embargo a partir de ahora esto será suprimido.

Si se desea convertir una cantidad que tiene una parte entera y otra fraccionaria de base diez a base dos, la parte entera se divide sucesivamente entre 2 y los restos resultantes se toman en orden contrario a como se encontraron. La parte fraccionaria se multiplica por 2 y el entero del resultado conforma la parte fraccionaria en el orden en que fueron encontrados. Este procedimiento se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2

Convertir el número $28.37_{(10)}$ a binario.

Solución. Parte entera:

	Resto	
$28/2 = 14$	0	Los restos se toman en orden inverso a como fueron encontrados.
$14/2 = 7$	0	
$7/2 = 3$	1	
$3/2 = 1$	1	
$1/2 = 0$	1	

Parte fraccionaria:

	Entero	
$0.37 \times 2 = 0.74$	0	Los enteros se toman en el mismo orden en que fueron encontrados.
$0.74 \times 2 = 1.48$	1	
$0.48 \times 2 = 0.96$	0	
$0.96 \times 2 = 1.92$	1	
$0.92 \times 2 = 1.84$	1	

Se podría seguir aproximando para determinar más dígitos en la parte fraccionaria y obtener así un

resultado más exacto, sin embargo para ilustrar el procedimiento es suficiente con cuatro dígitos después del punto que separa a la parte entera de la parte fraccionaria. De esta forma, el resultado es:

$$28.37_{(10)} = 11100.0101_{(2)}$$

Sistema binario

El antiguo matemático Pingala presentó la primera descripción que se conoce de un sistema de numeración binario en el siglo III a. de C., lo cual coincidió con su descubrimiento del número cero.

El sistema binario moderno fue documentado en su totalidad por Leibniz en el siglo XVII, en su artículo *Explication de l'Arithmétique Binaire*. Aquí Leibniz usó el 0 y el 1, al igual que el sistema de numeración binario actual.



Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)

Fue un filósofo, matemático, jurista y político alemán que nació en Leipzig y que en el área de las matemáticas descubrió el cálculo infinitesimal, independientemente de Newton, e inventó el sistema de numeración binario en que se basan casi todas las arquitecturas de computación actuales.

1.3.2 Sistema octal

Las reglas descritas para los sistemas decimal y binario, también son aplicables al sistema octal. En los siguientes ejemplos se ilustra este planteamiento.

Ejemplo 1.3

Convertir $631.532_{(8)}$ a binario.

Solución. Primero se convierte el número dado a decimal y luego de decimal a binario.

Para convertir una cantidad de cualquier sistema numérico a decimal, se plantea su representación en notación exponencial y se realizan las operaciones. En este caso particular se tiene que:

$$\begin{aligned} 631.532_{(8)} &= 6 \times 8^2 + 3 \times 8^1 + 1 \times 8^0 + 5 \times 8^{-1} + 3 \times 8^{-2} + 2 \times 8^{-3} \\ &= 409.6758_{(10)} \end{aligned}$$

La conversión del número obtenido a binario es la siguiente:

Parte entera	Resto	Parte fraccionaria	Entero
$409/2 = 204$	1		
$204/2 = 102$	0		
$102/2 = 51$	0		
$51/2 = 25$	1	$0.6758 \times 2 = 1.3516$	1
$25/2 = 12$	1	$0.3516 \times 2 = 0.7032$	0
$12/2 = 6$	0	$0.7032 \times 2 = 1.4064$	1
$6/2 = 3$	0	$0.4064 \times 2 = 0.8128$	0
$3/2 = 1$	1		
$1/2 = 0$	1		

Octal	Binario
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

La conversión de octal a binario y de binario a octal es relativamente fácil si se utiliza una tabla de equivalencias. En esta tabla se puede apreciar que se utilizan tres dígitos en binario, para cada número en octal, debido a que la cantidad mayor válida en el sistema octal es el número 7, que ocupa tres bits, por lo tanto, todos deberán usar la misma cantidad de bits.

Sistema octal

El sistema de numeración octal usa 8 dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) que tienen el mismo valor que en el sistema de numeración decimal.

Este sistema es muy usado en la computación por tener una base que es potencia exacta de 2, además de que esta característica hace que la conversión a binario o viceversa sea bastante simple.

Ejemplo 1.4

Convertir $631.532_{(8)}$ a binario usando la tabla de equivalencias anterior.

Solución. En la siguiente tabla se presenta la conversión pedida:

6	3	1	.	5	3	$2_{(8)}$
110	011	001	.	101	011	$010_{(2)}$

Como se puede observar en el ejemplo 1.4, usando la tabla de equivalencias el resultado es igual al obtenido al aplicar el método general usado en el ejemplo 1.3, sin embargo se debe mencionar que cuando se usa el método general algunas veces existen diferencias en los resultados, ya que al convertir la cantidad de octal a decimal y posteriormente a binario se pierde exactitud por el redondeo y también debido a que se acordó anteriormente encontrar solamente los primeros cuatro dígitos en la parte fraccionaria. A pesar de esto, si existiera alguna diferencia ésta se presentaría en la parte fraccionaria y no en la parte entera.

Ejemplo 1.5

Convertir $11010100000111101011010.0001101_{(2)}$ a octal usando tablas y verificar dicho resultado usando el método general.

Solución. Cuando se usan tablas, se deben separar los bits de la cantidad binaria en bloques de tres en tres, a partir del punto decimal hacia la izquierda en la parte entera, y del punto decimal a la derecha

en la parte fraccionaria. Si los bloques no se completan, se agregan ceros en los extremos como se indica a continuación:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 011 & 010 & 100 & 000 & 111 & 101 & 011 & 010 & . & 000 & 110 & 100_{(2)} \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 7 & 5 & 3 & 2 & . & 0 & 6 & 4_{(8)} \end{array}$$

Para verificar este resultado usando el método general, primero se convierte de binario a decimal de forma que:

$$\begin{aligned} 11010100000111101011010.0001101_{(2)} &= 1 \times 2^{22} + 1 \times 2^{21} + 1 \times 2^{19} + 1 \times 2^{17} + 1 \times 2^{11} + 1 \times 2^{10} \\ &\quad + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1 \\ &\quad + 1 \times 2^{-4} + 1 \times 2^{-5} + 1 \times 2^{-7} \\ &= 4194304 + 2097152 + 524288 + 131072 + 2048 + 1024 \\ &\quad + 512 + 256 + 64 + 16 + 8 + 2 + 0.0625 + 0.0312 + 0.0078 \\ &= 6950746.1015_{(10)} \end{aligned}$$

A continuación se convierte de decimal a octal:

Parte entera		Resto	Parte fraccionaria	Entero
$6950746/8 = 868843$		2		
$868843/8 = 108605$		3		
$108605/8 = 13575$		5	$0.1015 \times 8 = 0.8120$	0
$13575/8 = 1696$		7	$0.8120 \times 8 = 6.4960$	6
$1696/8 = 212$		0	$0.4960 \times 8 = 3.9680$	3
$212/8 = 26$		4	$0.9680 \times 8 = 7.7440$	7
$26/8 = 3$		2		
$3/8 = 0$		3		

Al comparar los resultados obtenidos por el método general y mediante la tabla de equivalencias, se observa que la parte entera coincide totalmente y que solamente existe una pequeña diferencia en la parte fraccionaria, debido a errores de redondeo.

Recomendación

Es importante tener cuidado cuando se encuentra el resto de una división. En el caso de este ejemplo se dividió $108605/8 = 13575.625$, y el resto resultó de multiplicar la parte fraccionaria del cociente por la base, esto es, $0.625 \times 8 = 5$

1.3.3 Sistema hexadecimal

La base numérica del sistema hexadecimal es 16 y para representar cantidades en él se utilizan los diez dígitos del sistema decimal (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) así como las seis primeras letras del alfabeto (A, B, C, D, E, F). Con esto pueden formarse números según el principio de valor posicional como en los demás sistemas aritméticos.

Los caracteres válidos en hexadecimal son del 1 al 15, con la particularidad de que a las letras se les asigna el siguiente valor: A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14 y F = 15.

Ejemplo 1.6

Convertir $E8A7.3D_{(16)}$ a octal.

Solución. El número dado primero se convierte a decimal:

$$E8A7.3D_{(16)} = 14 \times 16^3 + 8 \times 16^2 + 10 \times 16^1 + 7 \times 16^0 + 3 \times 16^{-1} + 13 \times 16^{-2} = 59559.2383_{(10)}$$

Ahora el número obtenido se convierte a octal:

Parte entera	Resto	Parte fraccionaria	Entero
$59559/8 = 7444$	7		
$7444/8 = 930$	4	$0.2383 \times 8 = 1.9064$	1
$930/8 = 116$	2	$0.9064 \times 8 = 7.2512$	7
$116/8 = 14$	4	$0.2512 \times 8 = 2.0096$	2
$14/8 = 1$	6	$0.0096 \times 8 = 0.0768$	0
$1/8 = 0$	1		

De igual manera que en la conversión de binario a octal, se puede obtener la siguiente tabla de equivalencias de binario a hexadecimal.

Hexadecimal	Binario
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Nuevamente el número mayor del sistema numérico es el que manda en relación con cuántos bits se deberán usar para representar cada uno de los caracteres. En este caso $F = 15$ es el símbolo mayor y ocupa cuatro bits, por lo tanto todos los símbolos deberán representarse por cuatro bits.

Ejemplo 1.7

Convertir $E8A7.3D_{(16)}$ a octal usando tablas de equivalencias.

Solución. A diferencia del método general, en que el sistema intermedio es el sistema decimal, cuando se utilizan tablas de equivalencias el sistema intermedio es el binario, por lo que primero se pasa la cantidad al sistema binario poniendo los cuatro bits correspondientes a cada uno de los caracteres del sistema hexadecimal:

$$\begin{array}{ccccccc}
 E & 8 & A & 7 & . & 3 & D_{16} \\
 1110 & 1000 & 1010 & 0111 & . & 0011 & 1101_{(2)}
 \end{array}$$

A continuación se pasa de binario a octal, agrupando la información en bloques de tres bits, ya que la tabla de equivalencia octal-binario utiliza solamente tres bits para cada uno de los caracteres. En caso de no completarse los bloques de tres bits, se deberán agregar los ceros necesarios en los extremos:

001	110	100	010	100	111	.	001	111	010 ₂
1	6	4	2	4	7	.	1	7	2 ₍₈₎

Como se puede observar, el resultado es semejante al obtenido en el ejemplo 1.6 y la variación, en caso de existir, es muy pequeña.

Sistema hexadecimal

El uso del sistema hexadecimal está estrechamente relacionado con la informática y con las ciencias de la computación, ya que las computadoras suelen utilizar el byte u octeto como unidad básica de memoria.

1.4 Generalización de las conversiones

De la misma manera en que fueron creados los sistemas posicionales decimal, binario, octal y hexadecimal, es posible crear nuestro propio sistema usando los dígitos necesarios del 0 al 9, y también en el caso de que se requieran las letras del alfabeto.

Las siguientes cantidades están expresadas en sistemas posicionales inexistentes, pero que podrían ser perfectamente válidos ya que respetan todas las reglas de los sistemas posicionales:

20541.32₍₇₎

Aquí la base es 7 y los caracteres válidos van del 0 al 6.

7G5A90.HB₍₁₈₎

En este caso, además de poder usar los dígitos del 0 al 9 es posible utilizar las letras A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15, G = 16, H = 17, ya que en base 18 los caracteres válidos van del 0 al 17.

Se puede notar que el número menor siempre es el 0 y que el mayor es el que corresponde a (base - 1).

Esas cantidades expresadas en cualquier sistema numérico pueden ser convertidas a otro sistema existente o no, de tal forma que se puede establecer que para pasar de un sistema X cualquiera a decimal