Matemáticas discretas

RAMÓN ESPINOSA ARMENTA

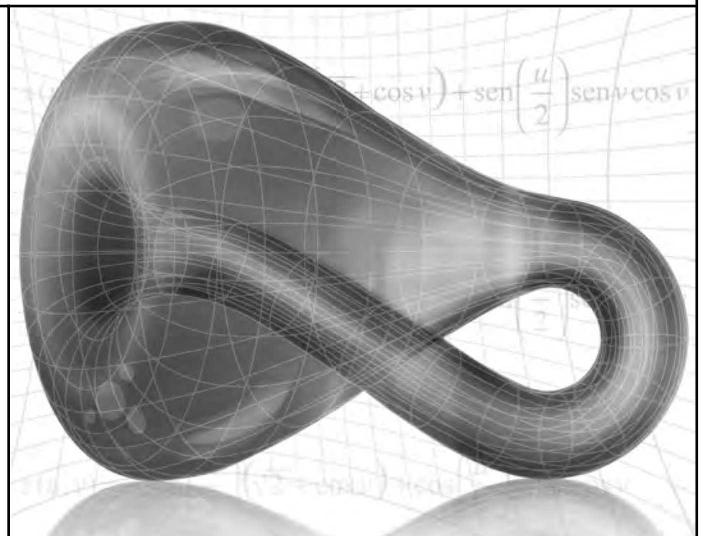
Contenidos interactivos Web

libroWeb

Alfaomega

Matemáticas Discretas

Matemáticas Discretas



RAMÓN ESPINOSA
ARMENTA

Alfaomega

Editor
Francisco Javier Rodríguez Cruz
jrodriguez@alfaomega.com.mx

Gerente editorial
Marcelo Grillo Giannetto
mgrillo@alfaomega.com.mx

Datos catalográficos

Espinosa, Ramón
Matemáticas discretas
Primera Edición
Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V., México
ISBN: 978-607-7854-57-9
Formato: 21 x 24 cm Páginas: 492

Matemáticas discretas
Ramón Espinosa Armenta

Primera edición: Alfaomega Grupo Editor, México, febrero del 2010

Pitágoras 1139, Col. Del Valle, 03100, México D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro No. 2317

Pág. Web: **http://www.alfaomega.com.mx**
E-mail: **atencionalcliente@alfaomega.com.mx**

ISBN: 978-607-7854-57-9

Impreso en México. Printed in Mexico.

Empresas del grupo:

México: Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V. – Pitágoras 1139, Col. Del Valle, México, D.F. – C.P. 03100.
Tel.: (52-55) 5089-7740 – Fax: (52-55) 5575-2420 / 2490. Sin costo: 01-800-020-4396
E-mail: atencionalcliente@alfaomega.com.mx

Colombia: Alfaomega Colombiana S.A. – Carrera 15 No. 64 A 29 – PBX (57-1) 2100122, Bogotá, Colombia,
Fax: (57-1) 6068648 – E-mail: scliente@alfaomega.com.co

Chile: Alfaomega Grupo Editor, S.A. – General del Canto 370-Providencia, Santiago, Chile
Tel.: (56-2) 235-4248 – Fax: (56-2) 235-5786 – E-mail: agechile@alfaomega.cl

Argentina: Alfaomega Grupo Editor Argentino, S.A. – Paraguay 1307 P.B. “11”, Buenos Aires, Argentina,
C.P. 1057 – Tel.: (54-11) 4811-7183 / 8352, E-mail: ventas@alfaomegaeditor.com.ar

A mi esposa Ely,
a mis hijos David Gibrán y Mariana,
y a mis padres Lulú y Ra,
con todo mi amor.

Contenido

* Las secciones marcadas con asterisco se encuentran en la *Plataforma de contenidos interactivos*.

Contenidos interactivos

El material marcado con asterisco (*) sólo está disponible para docentes.

Capítulo I Lógica, conjuntos e inducción

Mapa conceptual

Simuladores

- Operaciones básicas con conjuntos
- Operaciones con conjuntos
- Diagramas de Venn

Lecturas adicionales

- MATLAB y las operaciones con conjuntos
- Colecciones de conjuntos
- Números reales

Respuesta y desarrollo de problemas seleccionados

***Presentaciones**

***Respuesta y desarrollo de problemas**

Glosario

Capítulo II Teoría de números

Mapa conceptual

Simuladores

- Números primos
- Cambio de base
- Máximo común divisor
- Factorización única
- Calendario perpetuo

Software

- Primos
- Factores
- Criterio

Lecturas adicionales

- Distribución de los números primos
- Los problemas de Hilbert
- MATLAB y la teoría de números

Respuesta y desarrollo de problemas seleccionados

***Presentaciones**

***Respuesta y desarrollo de problemas**

Glosario

Capítulo III Relaciones y funciones

Mapa conceptual

Simuladores

- Graficador de funciones
- Función de Ulam
- Algoritmo burbuja
- Ordenación por fusión

Lecturas adicionales

- Conjuntos infinitos
- MATLAB y los algoritmos de ordenación

Respuesta y desarrollo de problemas seleccionados

***Presentaciones**

***Respuesta y desarrollo de problemas**

Glosario

Capítulo IV Grupos, anillos y campos

Mapa conceptual

Simuladores

- Generador de claves RSA
- Codificador RSA
- Decodificador RSA

Lecturas adicionales

- La fórmula de Burnside
- Anillos ordenados
- Números racionales
- Números complejos
- MATLAB y el criptosistema RSA

Respuesta y desarrollo de problemas seleccionados

***Presentaciones**

***Respuesta y desarrollo de problemas**

Glosario

Capítulo V Polinomios

Mapa conceptual

Simulador

- Operaciones con polinomios

Lecturas adicionales

- Raíces reales y complejas
- MATLAB y polinomios
- El criterio de Eisenstein
- Fracciones parciales

Respuesta y desarrollo de problemas seleccionados

***Presentaciones**

***Respuesta y desarrollo de problemas**

Glosario

Capítulo VI Matrices

Mapa conceptual

Simulador

- Operaciones con matrices

Lecturas adicionales

- MATLAB y matrices
- Determinantes

Respuesta y desarrollo de problemas seleccionados

***Presentaciones**

***Respuesta y desarrollo de problemas**

Glosario

Capítulo VII Álgebras booleanas

Mapa conceptual

Simulador

- Compuertas lógicas

Lecturas adicionales

- Simplificación de expresiones booleanas
- Compuertas lógicas

Respuesta y desarrollo de problemas seleccionados

***Presentaciones**

***Respuesta y desarrollo de problemas**

Glosario

Capítulo VIII Conteo

Mapa conceptual

Simulador

- Permutaciones y combinaciones

Lectura adicional

- Extensión del principio de inclusión-exclusión

Respuesta y desarrollo de problemas seleccionados

***Presentaciones**

***Respuesta y desarrollo de problemas**

Glosario

Capítulo IX Funciones generadoras y recurrencia

Mapa conceptual

Lectura adicional

- Funciones generadoras de probabilidad

Respuesta y desarrollo de problemas seleccionados

***Presentaciones**

***Respuesta y desarrollo de problemas**

Glosario

Capítulo X Grafos y algoritmos

Mapa conceptual

Simuladores

- Árbol binario
- Algoritmo de Kruskal
- Algoritmo de Warshall
- Algoritmo de Dijkstra

Lectura adicional

- Grafos químicos

Respuesta y desarrollo de problemas seleccionados

***Presentaciones**

***Respuesta y desarrollo de problemas**

Glosario

Capítulo XI Temas selectos de grafos

Mapa conceptual

Simulador

- Algoritmo de Fleury

Lecturas adicionales

- Algoritmo de Fleury
- La fórmula de Cayley

Respuesta y desarrollo de problemas seleccionados

***Presentaciones**

***Respuesta y desarrollo de problemas**

Glosario

Plataforma de contenidos interactivos

Para tener acceso al material de la plataforma de contenidos interactivos de **Matemáticas Discretas**, siga los siguientes pasos:

1) Ir a la página

http://virtual.alfaomega.com.mx

2) Registrarse como usuario del sitio.

3) Ingresar al apartado de inscripción de libros y registrar la siguiente clave de acceso

4) Para navegar en la plataforma ingrese los nombres de *Usuario* y *Contraseña* definidos en el punto dos.

Prefacio

Se dice que un conjunto es discreto, si sus elementos están separados. Los conjuntos finitos y los subconjuntos infinitos de números enteros son conjuntos discretos, mientras que el conjunto de los números reales no es discreto.

La matemática discreta es el estudio de estructuras matemáticas definidas sobre conjuntos discretos, y aunque sus orígenes se remontan hasta la antigüedad no ha sido sino en años recientes que ha cobrado importancia por sus aplicaciones a diversos campos, en particular a las ciencias de la computación y a la investigación de operaciones.

Acerca del libro

Este es un libro de texto para estudiantes de las carreras de ciencias básicas e ingeniería, y su contenido está dividido en cuatro partes:

Parte I. Se exponen los fundamentos de las matemáticas discretas: lógica, conjuntos, los enteros, inducción matemática, divisibilidad, congruencias, funciones, conjuntos finitos y relaciones binarias.

Parte II. Se estudian estructuras algebraicas discretas: grupos, anillos, campos, aritmética modular, polinomios, matrices y álgebras booleanas.

Parte III. Se presenta la enumeración combinatoria, específicamente se estudian permutaciones, combinaciones, el principio de inclusión-exclusión, funciones generadoras ordinarias, partición de enteros, funciones generadoras exponenciales y relaciones de recurrencia.

Parte IV. Se expone una introducción a la teoría de grafos, y en ésta se estudian grafos, árboles, árboles con raíz, grafos dirigidos, grafos bipartitos, isomorfismos, paseos eulerianos, ciclos hamiltonianos, planaridad, coloración y grafos orientados.

En general, cada tema del libro se expone en forma completa y axiomática, esto es, se plantean las definiciones y axiomas correspondientes y se enuncian y demuestran los teoremas fundamentales.

Además, a lo largo de la exposición se presentan problemas resueltos que ilustran la teoría expuesta, y al final de cada capítulo se incluye una lista de problemas propuestos.

Otra característica importante de esta obra es que en la mayor parte de los capítulos se presentan aplicaciones de las matemáticas discretas a las ciencias de la computación, y entre éstas se encuentran cambio de base, complejidad computacional, criptografía, circuitos lógicos, espacios finitos de probabilidad, el problema del conector, ruta más corta y problemas NP-completos.

Página web del libro

En la página web del libro se cuenta con los siguientes recursos.

- **Simuladores** de tres tipos:

  I) Simuladores que ejemplifican la teoría poniéndola en práctica: Función de Ulam; Algoritmo burbuja; Ordenación por fusión; Compuertas lógicas; Árboles binarios; Algoritmo de Fleury; Algoritmos de Kruskal, de Warshall y de Dijkstra.

  II) Simuladores relacionados con aplicaciones clásicas de las matemáticas discretas: Números primos; Cambio de base; Factorización única.

  III) Simuladores relacionados con una de las aplicaciones modernas más importantes (el encriptamiento de información): Generador de claves RSA; Codificador RSA; Decodificador RSA.

- **Lecturas complementarias** de dos tipos:

  I) Lecturas en las que se exponen temas como números reales, conjuntos infinitos, números complejos, raíces reales y complejas, criterio de irreducibilidad de Eisenstein, fracciones parciales y determinantes. En particular, los primeros seis capítulos del libro junto con estas lecturas constituyen un curso completo (de dos semestres) de álgebra clásica.

  II) Lecturas en las que se describe la estructura de los simuladores desarrollados con MATLAB

- **Respuesta y desarrollo de problemas seleccionados.**

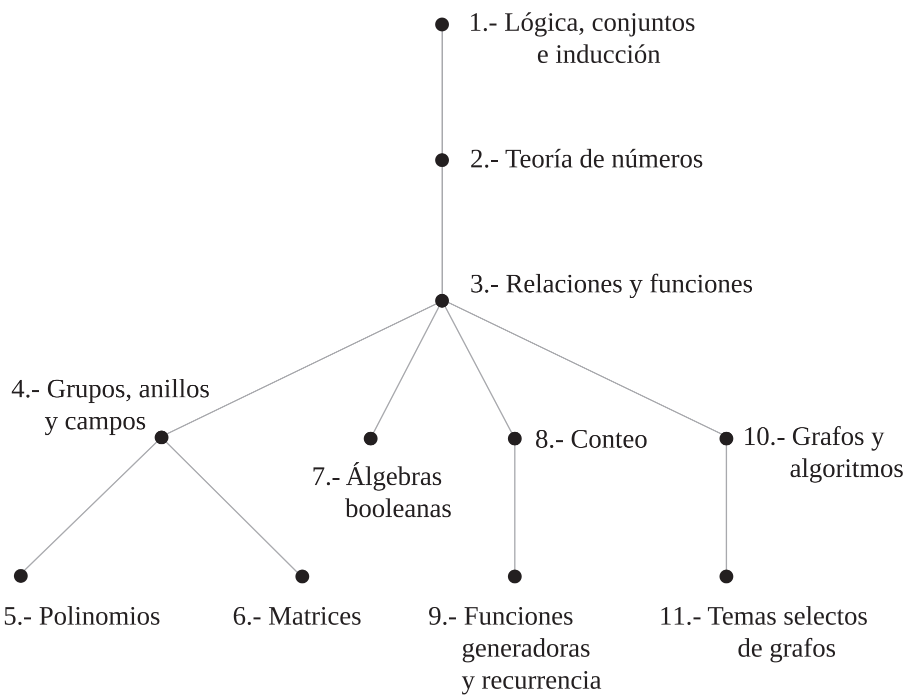
- **Recursos para el profesor:**

  I) Solución completa de todos los problemas propuestos en el libro

  II) Una presentación power point de cada capítulo.

Cursos posibles

Tomando en cuenta el contenido del libro y lo incluido en su página web, esta obra contiene material suficiente para dos cursos semestrales, los cuales se pueden organizar considerando el siguiente diagrama que muestra la interdependencia de los distintos capítulos:



Luego de haber recorrido cualquiera de las rutas posibles, lo que se espera es que se haya apreciado la belleza y la importancia de las matemáticas discretas, se haya descubierto que éstas son una ciencia viva y en constante desarrollo, además de encontrarse estrechamente vinculada con problemas reales. En fin, se espera que se haya disfrutado el viaje y que en él se encuentre la motivación y preparación para recorrer otros caminos del mundo mágico de las matemáticas.

Finalmente, casi todos los libros contienen errores y difícilmente éste será la excepción. Si se detecta algún error, agradeceré que me lo hagan saber escribiendo a la dirección ramone@itam.mx.

Agradecimientos

Agradezco al profesor César Rincón por aquellas inolvidables clases de Álgebra Superior, en la Facultad de Ciencias de la UNAM, que me abrieron las puertas al mundo mágico de las matemáticas.

Agradezco a Jorge Urrutia por aquella tarde de domingo, hace más de veinte años, cuando me mostró por primera vez la belleza e importancia de las matemáticas discretas.

Agradezco a Javier Alfaro y a Marcela González, por casi veinte años de retroalimentación constante acerca de la enseñanza del álgebra y las matemáticas discretas.

Agradezco los comentarios elogiosos que alumnos, profesores y amigos hicieron de mi primera obra y que me motivaron a seguir escribiendo.

Agradezco a Shyamal Kumar por aquellas tardes en las que compartimos nuestras experiencias acerca del galano arte de escribir.

Agradezco a los profesores Alejandro Odgers y Edgar Possani, y al alumno Mauricio González, por sus comentarios y correcciones de algunas partes del texto.

Agradezco a Adolfo Torres Cházaro y a Virginia Urrutia, por sus valiosos comentarios acerca de la presentación del material en muchas partes del texto.

Agradezco el apoyo de la editorial Alfaomega, en particular a Marcelo Grillo, Gerente editorial, a Alejandro Herrera que apoyó inicialmente este proyecto, y muy especialmente al Editor Francisco Javier Rodríguez Cruz cuyos comentarios y notas enriquecieron el libro; fue un placer trabajar con él.

Agradezco a la Gerente de E-Learning de Alfaomega, Luz del Carmen Romero González, a los Programadores Ricardo Martínez Vilchis, Armando Sotelo Soto y Ariel Calzada Solano, y a la Diseñadora María Elena Velasco Rojas, quienes desarrollaron parte de los simuladores que se encuentran en la página web del libro. Agradezco especialmente al Dr. David Báez López por el desarrollo de los simuladores en MATLAB y por las lecturas complementarias correspondientes que escribió.

Agradezco especialmente a mi hija Mariana, por haber leído cuidadosamente el libro, señalándome errores y comentando acerca del contenido.

Agradezco a mi esposa Ely y a mis hijos David Gibrán y Mariana, por su amor, aliento y apoyo constante.

Por último, agradezco el apoyo de la Asociación Mexicana de Cultura, A. C. y del Instituto Tecnológico Autónomo de México, para la realización de esta obra.

Ramón Espinosa Armenta

Ciudad de México, 2010

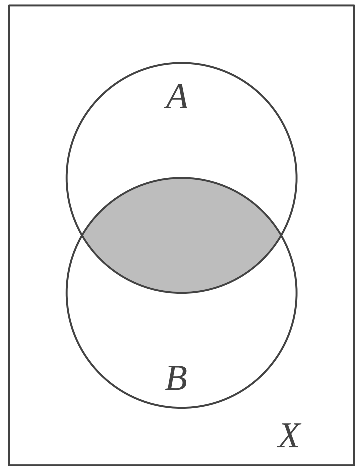
Parte I

Fundamentos

CAPÍTULO

I

Lógica, conjuntos e inducción



$$(p \to q) \Rightarrow [(p \vee r) \to (q \vee s)]$$
$$(p \to q) \Rightarrow [(p \wedge r) \to (q \wedge s)]$$
$$(p \to q) \Rightarrow [(q \to r) \to (p \to r)]$$

*Ver *Plataforma de contenidos interactivos*.

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+x^{n+1}=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}+x^{n+1}$$
$$=\frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x}$$
$$=\frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$$

Las demostraciones matemáticas, como diamantes, son duras y claras, y no son tocadas por nada que no sea el razonamiento estricto.

John Locke

Objetivos

- Exponer las reglas de inferencia y los métodos de demostración.
- Presentar la notación y terminología básica de la teoría de conjuntos.
- Exponer las propiedades fundamentales de los enteros.
- Discutir el método de inducción matemática y sus variantes.

1.1 Introducción

Lo que distingue a las matemáticas de otras disciplinas es que, a excepción de ciertas afirmaciones básicas llamadas axiomas, en matemáticas nada es considerado como verdadero a menos de que haya sido demostrado utilizando un argumento lógico válido.

En este capítulo primero se expone una introducción a la lógica simbólica: se explica qué es una proposición y cómo se utilizan los conectivos lógicos para formar nuevas proposiciones, qué es una implicación lógica y qué significa que dos proposiciones sean lógicamente equivalentes, y se describen las principales reglas de inferencia y los métodos de demostración.

Luego se expone la notación y terminología básica de teoría de conjuntos: se presentan las nociones de pertenencia y contención, la noción de conjunto vacío, el concepto de conjunto potencia, las operaciones con conjuntos, así como sus propiedades.

Por último se plantea una descripción axiomática del sistema de los números enteros y se demuestran algunas propiedades adicionales, además de que se expone el método de inducción matemática.

1.2 Lógica

Uno de los principales propósitos de la lógica consiste en proporcionar reglas por medio de las cuales se pueda determinar si un argumento particular es correcto. La lógica se interesa en cualquier tipo de razonamiento, el cual puede ser, por ejemplo, de carácter legal, matemático o científico, basado en todos los casos en ciertas suposiciones.

El filósofo griego Aristóteles fue el primero en realizar un estudio sistemático del razonamiento lógico, sin embargo no fue sino hasta el siglo XVII cuando el filósofo y matemático alemán Gottfried Leibniz concibió la idea de desarrollar un lenguaje simbólico que pudiera ser utilizado como un lenguaje científico universal.

El sueño de Leibniz se hizo realidad hasta 1854, cuando el matemático inglés George Boole estableció las bases de la lógica simbólica en su obra *An investigation into the laws of thought*. Posteriormente, Bertrand Russell y Alfred Whitehead utilizaron la lógica simbólica en su monumental obra *Principia Mathematica* (1910-1913). Al incorporarse la lógica a las matemáticas, ambas disciplinas se enriquecieron.

Creadores de la lógica

Aristóteles (384 a. C.-322 a. C.), uno de los más grandes filósofos de la antigüedad griega, es el creador de la lógica formal expuesta en su obra *Organon* la cual consta de los libros "Categorías", "Sobre la interpretación", "Primeros analíticos", "Segundos analíticos", "Tópicos" y "Refutación a los sofistas".

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) aportó a la lógica su proyecto de crear un álgebra del pensamiento que redujera el razonamiento a un cálculo preciso.

"Diestro desde su infancia en el manejo de la lógica escolástica, había quedado seducido por la idea (que se remontaba a Raimundo Lulio) de un método que reduciría todos los conceptos humanos a conceptos primitivos, formando un 'Alfabeto de los pensamientos humanos', y volvería a combinarlos de forma casi mecánica para obtener todas las proposiciones verdaderas"[1].

Continúa...

1.2.1 Proposiciones y conectivos lógicos

Una **proposición** es una afirmación que puede ser verdadera o falsa, pero no ambas. Si una proposición es verdadera se dice que su **valor de verdad** es verdadero (V); si la proposición es falsa se dice que su valor de verdad es falso (F).

[1] Nicolas Bourbaki; *Elementos de historia de las matemáticas*; Alianza Editorial, Madrid 1976; p. 18.

Ejemplo 1.1 Las siguientes afirmaciones son proposiciones:

a) Guadalupe Victoria fue el primer Presidente de México.

b) Hay un premio Nobel de Matemáticas.

c) Estaba lloviendo en Tenochtitlan el día que murió Lorenzo de Médicis.

De las proposiciones anteriores, (a) es verdadera, (b) es falsa y (c) podría ser verdadera o falsa, sin embargo es claro que ese día llovió o no en Tenochtitlan y por lo tanto se puede asegurar que la afirmación es una proposición.

Ejemplo 1.2 Las siguientes afirmaciones no son proposiciones:

a) Cierra la puerta.

b) Esta afirmación es falsa.

La afirmación (a) no es una proposición porque no es verdadera o falsa (es una orden), y la afirmación (b) no es una proposición porque si se supone que es verdadera entonces la afirmación es falsa, análogamente, si se supone que es falsa entonces la afirmación es verdadera.

Las proposiciones se pueden combinar para formar nuevas proposiciones, utilizando **conectivos lógicos**. Una proposición formada mediante la combinación de otras proposiciones utilizando conectivos lógicos se dice que es una **proposición compuesta**. Si las proposiciones $p_1, p_2, \ldots, p_n$ se combinan para formar la proposición compuesta p se escribirá $p = p(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

TABLAS DE VERDAD

Las tablas de verdad fueron desarrolladas por Frege, Peirce y Schröder en la década de 1880, y desde 1920 fueron usadas ampliamente en la literatura, sin embargo su uso se consolidó a partir de la aplicación que hizo Wittgenstein de éstas en su *Tractatus logico-philosophicus*.

Por otro lado, como parte de los conceptos básicos del cálculo proposicional se tienen las tablas de verdad de los principales conecti-

Continúa...

Continuación...

George Boole (1815-1864). "La lógica simbólica nació decididamente con el importantísimo folleto de ochenta y dos páginas de Boole, *The mathematical analysis of logic, being an essay toward a calculus of deductive reasonin*, 1847. A esto siguió en 1848 un documento de quince páginas, *The calculus of logic*, y finalmente en 1854 dio Boole una exposición formal de su sistema en su obra maestra *An investigation into the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*.

"Russell ha observado (1901) que *las matemáticas puras fueron descubiertas por Boole en una obra que tituló 'las leyes del pensamiento'... Su obra se ocupaba de la lógica formal, y esto es la misma cosa que las matemáticas*. Aunque la identificación de las matemáticas con la lógica formal ha sido discutida entre 1901 y 1945, nadie puso en duda que Boole fuera el verdadero fundador de la lógica simbólica."[2]

Augustus De Morgan (1806-1871) se interesó especialmente por el álgebra y su contribución a la moderna lógica matemática son las siguientes leyes que llevan su nombre:

- *La negación de la conjunción es equivalente a la disyunción de las negaciones*:

$$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$$

- *La negación de la disyunción es equivalente a la conjunción de las negaciones*:

$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$$

"Al mismo tiempo que Boole, De Morgan dio otro gran paso hacia adelante con su tratado (1847) *Formal logic; or, the calculus of inference, necessary and probable*. De Morgan fue más allá que Boole iniciando en 1860 la lógica de las relaciones en el cuarto de una famosa serie de cinco documentos (1846-1860) sobre el silogismo."[3]

Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925) es considerado el fundador de la lógica matemática moderna. "Sus obras se caracterizan por una precisión y una minuciosidad extremas en el análisis de los conceptos, lo que le lleva a introducir distinciones que han tenido gran importancia en la lógica moderna: por ejemplo, es el primero en distinguir el enunciado de una proposición y la afirmación de que

Continúa...

[2] E. T. Bell; *Historia de las matemáticas*; F.C.E., México 1985; p. 569.
[3] *Ib.*, p. 570.

Continuación...

dicha proposición es verdadera, entre la relación de pertenencia y la de inclusión, entre un objeto x y el conjunto $\{x\}$ formado por este único objeto, etcétera."[4]

Bertrand Russell (1872-1970) publicó en 1910 el primero de tres volúmenes de *Principia Mathematica*, en colaboración con Alfred North Whitehead. El objetivo general de esta obra era deducir la totalidad de las matemáticas a partir de ciertas nociones básicas de la lógica y la teoría de conjuntos, sin embargo Kurt Gödel demostró que este plan era imposible. A pesar de esto, la obra de Russell y Whitehead contribuyó de manera fundamental en el desarrollo de la lógica, la teoría de conjuntos, la inteligencia artificial y la computación.

Kurt Gödel (1906-1978) La aportación fundamental de Gödel a la lógica son sus dos teoremas de la incompletitud, publicados en 1931. En el más célebre de sus teoremas establece que para todo sistema axiomático recursivo existen proposiciones verdaderas sobre los naturales que no pueden demostrarse a partir de los axiomas. Para demostrar este teorema desarrolló una técnica denominada ahora como numeración de Gödel, la cual codifica expresiones formales como números naturales.

Alfred Tarski (1902-1983) Junto con Aristóteles, Frege y Gödel, Tarski es considerado uno de los lógicos más grandes de todos los tiempos. En 1941 publicó *Introduction to logic and to the methodology of deductive sciences* y contribuyó a la lógica fundando una metodología conjuntista de las teorías deductivas sobre dos bases:

- La noción de teoría como conjunto de proposiciones cerrado bajo una noción de derivación mediante aplicación de reglas.
- El desarrollo de una semántica basada en las nociones de satisfacción, verdad y consecuencia lógica.

continuación...

conectivos lógicos (conjunción, disyunción y negación) y de los operadores condicional y bicondicional, así como del operador o excluyente, del operador de Pierce y del operador de Sheffer (véanse los problemas 1.10 a 1.12, respectivamente).

En relación con las aplicaciones las tablas de verdad se usan en la demostración de equivalencias lógicas y en la evaluación de funciones booleanas (véase la sección 7.5 Expresiones y funciones booleanas), así como en la simplificación y diseño de circuitos lógicos (véanse las secciones 7.7 Aplicación: circuitos lógicos y 7.8 Compuertas lógicas).

Los valores de verdad de una proposición compuesta $p = p(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ pueden describirse por medio de una **tabla de verdad**, en la cual se listan todas las posibles combinaciones de los valores de verdad para $p_1, p_2, \ldots, p_n$. A continuación se definen los principales conectivos lógicos.

La **conjunción** de dos proposiciones p y q es la proposición $p \wedge q$, que se lee "p y q". La proposición $p \wedge q$ tiene el valor de verdad V cuando tanto p como q tienen el valor de verdad V, en otro caso su valor de verdad es F. La tabla de verdad de la conjunción es la siguiente:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La **disyunción** de dos proposiciones p y q es la proposición $p \vee q$, que se lee "p ó q". La proposición $p \vee q$ tiene el valor de verdad F sólo cuando tanto p como q tienen el valor de verdad F, en otro caso su valor de verdad es V. Hay que observar que el operador $\vee$ representa un "ó inclusivo". La tabla de verdad de la disyunción es la siguiente:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

[4] *Op.cit.*, Nicolas Bourbaki; p. 23.

La **negación** de una proposición p es la proposición $\neg p$, que se lee como “no p”. La proposición $\neg p$ tiene el valor de verdad V cuando p tiene el valor de verdad F, y tiene el valor de F cuando p tiene el valor de verdad V. La tabla de verdad de la negación es la siguiente:

p	$\neg p$
V	F
F	V

1.2.2 Tautología y contradicción

Una proposición compuesta $p = p(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ es una **tautología** si p es verdadera para todos los valores de verdad que se asignen a $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Se dice que p es una **contradicción** si es falsa para todos los valores de verdad que se asignen a $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Hay que observar que la negación de una tautología es una contradicción y que la negación de una contradicción es una tautología.

Ejemplo 1.3 La siguiente tabla de verdad muestra que $p \vee \neg p$ es una tautología y que $p \wedge \neg p$ es una contradicción.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V	F
F	V	V	F

Charles Sanders Peirce
(1839-1914)

Nació en Cambridge, Massachussets, fue filósofo, lógico y científico, y es considerado el fundador del pragmatismo y el padre de la semiótica moderna.

Fue profesor de astronomía y matemáticas en Harvard, y aunque se graduó en química en la Universidad de Harvard, nunca logró tener una posición académica permanente a causa de su difícil personalidad (tal vez maniaco-depresiva) y del escándalo que rodeó a su segundo matrimonio después de divorciarse de su primera mujer, Melusina Fay. Desarrolló su carrera profesional como científico en la United Status Coast Survey (1859-1891), trabajando especialmente en astronomía, en geodesia y en medidas pendulares. Desde 1879 hasta 1884 fue profesor de lógica a tiempo parcial en la Universidad Johns Hopkins. Tras retirarse en 1888 se estableció con su segunda mujer, Juliette Froissy, en Milford, donde murió de cáncer después de 26 años de escritura intensa y prolífica.

Tautologías comunes[5]

Adición:

$$p \Rightarrow (p \vee q)$$

Simplificación:

$$(p \wedge q) \Rightarrow p$$

Absurdo:

$$(p \rightarrow 0) \Rightarrow p'$$

Modus ponens:

$$[p \wedge (p \rightarrow q)] \Rightarrow q$$

Modus tollens:

$$[(p \rightarrow q) \wedge q'] \Rightarrow p'$$

Transitividad de la bicondicional:

$$[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \leftrightarrow r)$$

Transitividad de la condicional:

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$$

Continúa...

[5] José A. Jiménez Murillo; *Matemáticas para la computación*; Alfaomega Grupo Editor, México 2009; p. 128.

Continuación...

Extensión de la condicional:

$$(p \to q) \Rightarrow [(p \vee r) \to (q \vee s)]$$
$$(p \to q) \Rightarrow [(p \wedge r) \to (q \wedge s)]$$
$$(p \to q) \Rightarrow [(q \to r) \to (p \to r)]$$

Dilemas constructivos:

$$[(p \to q) \wedge (r \to s)] \Rightarrow [(p \vee r) \to (q \vee s)]$$
$$[(p \to q) \wedge (r \to s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \to (q \wedge s)]$$

1.2.3 Implicación y equivalencia lógica

El **operador condicional**, denotado por el símbolo $\to$, está definido por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La proposición compuesta $p \to q$ se llama **proposición condicional**. En este caso, la proposición p se llama **hipótesis** (o **antecedente**) y la proposición q se llama **conclusión** (o **consecuente**). La proposición condicional puede expresarse como:

si p entonces q

p sólo si q,

p implica q,

p es una condición suficiente para q,

q es una condición necesaria para p.

Sean $p = p(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ y $q = q(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ dos proposiciones compuestas, se dice que p **implica lógicamente** a q si $p \to q$ es una tautología. En este caso se escribe $p \Rightarrow q$.

Ejemplo 1.4 Si p y q son dos proposiciones, $p \wedge q \to p$, como lo muestra la siguiente tabla de verdad.

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \to p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

La **recíproca** de la proposición condicional $p \to q$ es la proposición $q \to p$. Es posible que una proposición condicional sea verdadera, pero que su recíproca sea falsa.

El **operador bicondicional**, denotado por el símbolo $\leftrightarrow$, está definido por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Hay que observar que $p \leftrightarrow q$ es verdadera sólo cuando los valores de verdad de p y q coinciden. La proposición compuesta $(p \to q) \wedge (q \to p)$ se llama **proposición bicondicional** y se denota $p \leftrightarrow q$. Esta proposición se lee "p si y sólo si q". La abreviación "sii" se utiliza con frecuencia para representar la frase "si y sólo si".

Sean $p = p(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ y $q = q(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ dos proposiciones compuestas, se dice que p y q son **lógicamente equivalentes** si $p \leftrightarrow q$ es una tautología. En este caso se escribe $p \Leftrightarrow q$. En otras palabras, dos proposiciones compuestas son lógicamente equivalentes si y sólo si sus valores de verdad coinciden.

Ejemplo 1.5 La proposición bicondicional $p \leftrightarrow q$ es lógicamente equivalente a la proposición $(p \to q) \wedge (q \to p)$, como lo muestra la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Por esta razón la proposición bicondicional $p \leftrightarrow q$ también puede expresarse como "p es una condición necesaria y suficiente para q".