Dr. Marco Schuchmann

Jetzt lerne ich Mathematik für die Oberstufe

Schnellkurs zur Abiturvorbereitung: Analysis, analytische Geometrie und Stochastik - www.mathe-total.de

Mathematik lernen für die Oberstufe

Analysis

Vektorrechung

Stochastik

www.mathe-total.de

Vorwort

Mit diesem Buch kann man die drei großen Themen der Oberstufe lernen, erlernen oder üben: Analysis, analytische Geometrie bzw. lineare Algebra und Stochastik. Dabei wird alles mit vielen Beispielen und Abbildungen erklärt. Die Beschreibungen orientieren sich an den Aufgaben- und Problemstellungen, wie sie in der Oberstufe an Gymnasien als auch an Fachoberschulen behandelt werden. Das Buch kann man auch zur Abiturvorbereitung verwenden, wenn man selbstständig noch mal den Stoff der Oberstufe aufarbeiten möchte.

Es wurden viele Erklärungen, wichtige Hinweise für bestimmte Aufgabentypen, Aufgabenbeispiele mit Lösungstipps und Grafiken eingefügt. Bei allen Beschreibungen wurde darauf geachtet, dass diese für Schülerinnen und Schüler möglichst verständlich sind. Die Grafiken und auch die meisten hier beschriebenen Methoden können mit der Seite www.alles-mathe.de erstellt bzw. angewendet werden, um beispielsweise eigene Lösungen von Aufgaben zu überprüfen oder auch mal um eine Wertetabelle zu erstellen. Weitere Aufgaben, Beispiele und Erklärungen zum Buch sind auf der Seite www.mathe-total.de zu finden.

Begonnen wird mit den Anwendungen der Analysis in der Oberstufe. Hier werden ebenso Grundlagen, wie die Bestimmung einer Geradengleichung, die quadratischen Ergänzung, die p-q-Formel und die Polynomdivision beschrieben, wie auch Anwendungen der Differentialrechung (Ableitungsregeln, Extrema, Wendepunkte, Tangentengleichungen, Kurvendiskussion,…) und der Integralrechnung (Flächen zwischen Kurven, partielle Integration,…). Einige Funktionstypen, wie beispielsweise gebrochenrationale Funktionen, werden auch ausführlich beschrieben (Polstellen, hebbare Definitionslücken, Asymptoten).

Im Herbst 2012

Dr. Marco Schuchmann
(e-mail: schuchmann@mathe-total.de)

Inhalt

1 Analysis

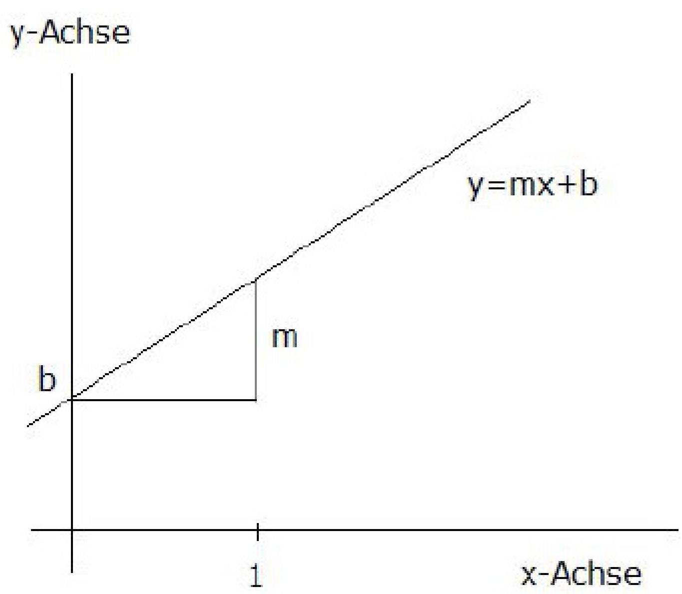
1.1 Geraden

1.1.1 Untersuchung linearer Funktion

Der Graf einer Funktion der Form

$$y = mx + b \text{ bzw. } f(x) = mx + b$$

ist eine Gerade.



Die waagrechte Achse ist im Folgenden immer die x-Achse (Abszisse) und die senkrechte Achse die y-Achse (Ordinate).

m ist die **Steigung**. Wenn x um eines erhöht wird, dann erhöht oder verringert sich f(x) um m, je nachdem, ob m positiv oder negativ ist (denn $f(x+1) - f(x) = m$). Wenn $m = 0$ ist, dann ist die Gerade eine parallele zur x-Achse und für $b = 0$ liegt diese auf der x-Achse. b ist der Achsenabschnitt auf der y-Achse (kurz: **y-Achsenabschnitt**). D.h. die Gerade scheidet die y-Achse im Punkt $S_y(0; b)$, denn f(0) = b. Die Nullstelle ist der Schnittpunkt mit der x-Achse. Da alle Punkte, die auf der x-Achse liegen, die y-Koordinate Null haben, muss man zur Berechnung der Nullstellen die Funktionsgleichung gleich Null setzen.

Nullstellen bestimmen:
Es sei $m \neq 0$

$f(x) = mx + b = 0 \mid -b$

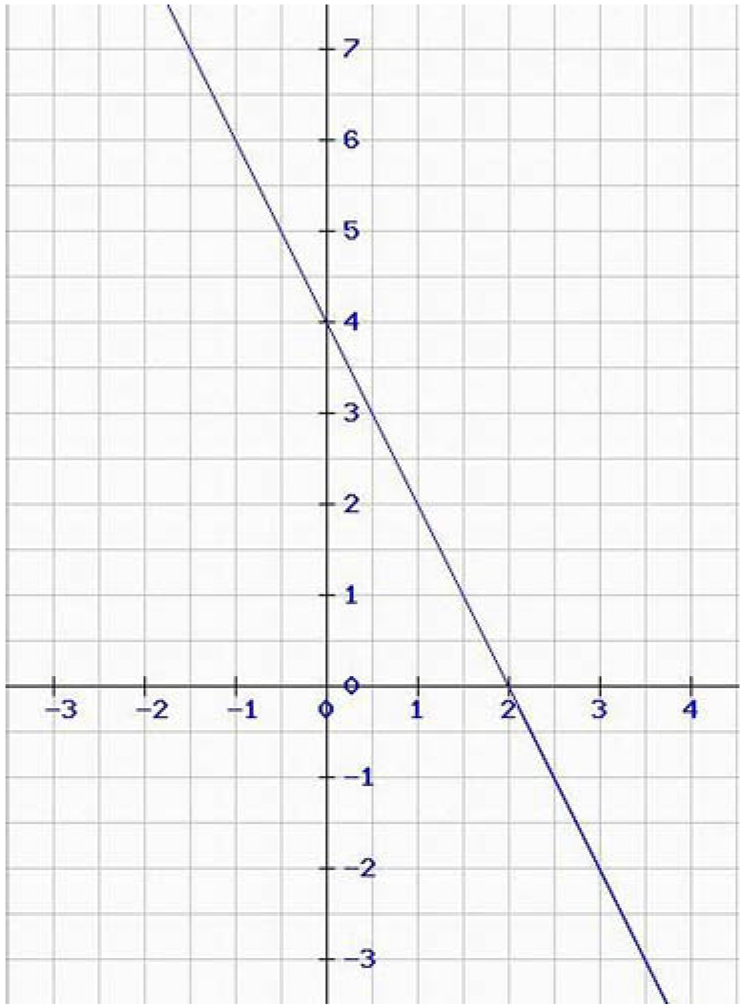
$mx = -b$

$x = -b/m.$

Also ist $x = -b/m$ die Nullstelle der Gerade, bzw. $N(-b/m; 0)$ deren Schnittpunkt mit der x-Achse.

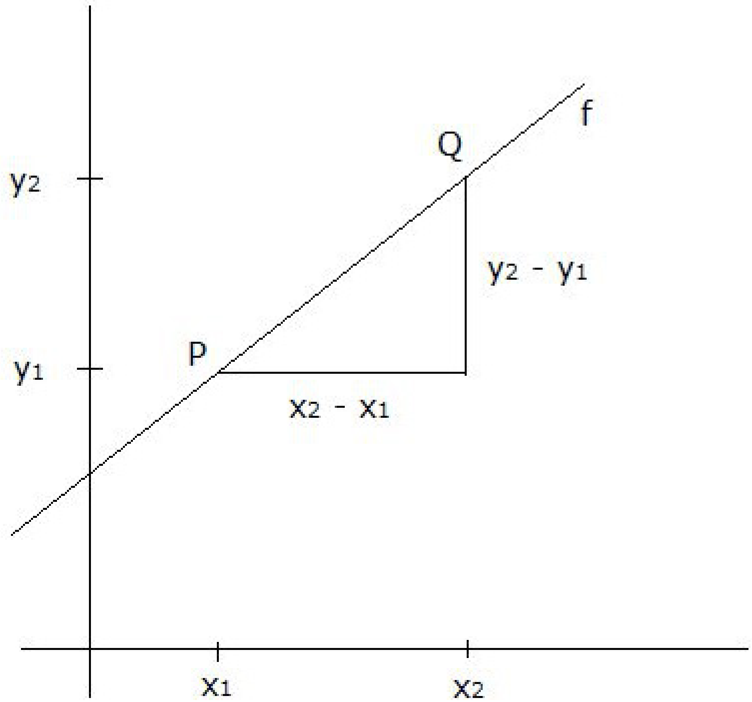
Beispiel:
Gegeben ist die Geradengleichung $f(x) = -2x + 4$. Gesucht sind die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

Mit der y-Achse: $S_y(0; 4)$
Mit der x-Achse: $-2x + 4 = 0 \mid -4$
$-2x = -4 \mid :(-2)$
$x = 2 \Rightarrow N(2; 0)$



1.1.2 Bestimmung der Geradengleichung

Gegeben seien zwei Punkte $P(x_1;\ y_1)$ und $Q(x_2;\ y_2)$ und gesucht ist die Gleichung der Geraden durch diese zwei Punkte.



Beispiel:
Gegeben sind die Punkte P(-2; 4) und Q(1; 10). Gesucht ist die Gleichung der Geraden durch diese Punkte.

Eine Möglichkeit die Gleichung zu bestimmen, wäre die, die Komponenten der beiden Punkte in die Funktion f(x) = mx + b einzusetzen. Diese Möglichkeit funktioniert auch bei anderen Funktionstypen und man muss sich keine Formel merken:

(1) $f(-2) = -2m + b = 4$
(2) $f(1) = \quad m + b = 10$

Es handelt sich hier um ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten.
Subtrahiert man die Gleichung (1) von der Gleichung (2), so „fällt b weg“:

(1) - (2) $-3m = -6 \quad |: (-3)$
$m = 2$

Setzt man m = 2 z.B. in (2) ein, so ergibt sich

$$2 + b = 10 \mid -2$$
$$b = 8$$

Damit lautet die Gleichung: $f(x) = 2x + 8$

Man könnte die Gleichung auch mit folgenden Formeln bestimmen:

(I) $f(x) = m(x - x_1) + y_1$ mit $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Würde man die Formel im Beispiel von oben verwenden, so gilt:

$$m = \frac{10 - 4}{1 - (-2)} = 2$$

$$f(x) = 2(x - (-2)) + 4 = 2x + 8$$

Statt zwei Punkten könnte auch ein Punkt $P(x_1; y_1)$ und die Steigung m gegeben sein. In diesem Fall kann man m und die Koordinaten des Punktes P direkt in (I) einsetzen.

Ein weiteres **Beispiel:**
Gegeben ist die Gleichung $f(x) = 2x + 2$ der Geraden f.
a) Liegt P(1; 4) auf der Geraden f?

$f(1) = 2 + 2 = 4$, womit P auf der Geraden liegt.

b) Bestimme die fehlenden Koordinaten der Punkte Q(3;?) und R(?; -4) auf der Geraden f.

$f(3) = 6 + 2 = 8 \Rightarrow Q(3; 8)$

$$f(x) = 2x + 2 = -4 \mid -2$$
$$2x = -6 \mid :2$$

$x = -3$, also ist R(-3; -4).

1.1.3 Schnittpunkte und Schnittwinkel

Stimmen die Steigungen zweier Geraden überein, so sind diese parallel zueinander. Sind die Achsenabschnitte verschieden, dann sind sie „echt parallel“ und haben auch keinen Schnittpunkt.

Schnittstellen bestimmt man allgemein durch Gleichsetzten beider Funktionsgleichungen.

Beispiel:
$f(x) = 2x + 4$
$g(x) = -x + 1$

$$f(x) = g(x)$$

$$2x + 4 = -x + 1 \mid +x$$

$$3x + 4 = 1 \mid -4$$

$$3x = -3 \mid :3$$

$$x = -1$$

Nun kann man den y-Wert des Schnittpunktes bestimmen, indem man $x = -1$ in eine der beiden Geradengleichungen einsetzt:

$$y = g(-1) = -(-1) + 1 = 2$$

Also ist S(-1; 2) der Schnittpunkt.

Kommen wir nun zur **Berechnung des Schnittwinkels**:
Der **Neigungswinkel einer Geraden** $y = mx + b$ in Bezug zur x-Achse ergibt sich durch folgende Gleichung:

$$m = \tan(\alpha)$$

Hier kann sich auch ein negativer Wert für α ergeben, falls die Gerade eine negative Steigung hat. In diesem Fall ergibt sich die Gerade durch Drehung der x-Achse in negativer Drehrichtung (d.h. mit dem Uhrzeigersinn) um die Nullstelle der Geraden. Der Schnittwinkel mit der x-Achse ist $|\alpha|$.

Somit gilt für die Gerade f:

$$2 = \tan(\alpha_f) \mid \tan^{-1}$$
$$\alpha_f = \tan^{-1}(2) \approx 63{,}43°$$

Und für die Gerade g:

$$-1 = \tan(\alpha_g) \mid \tan^{-1}$$
$$\alpha_g = \tan^{-1}(-1) = -45°$$

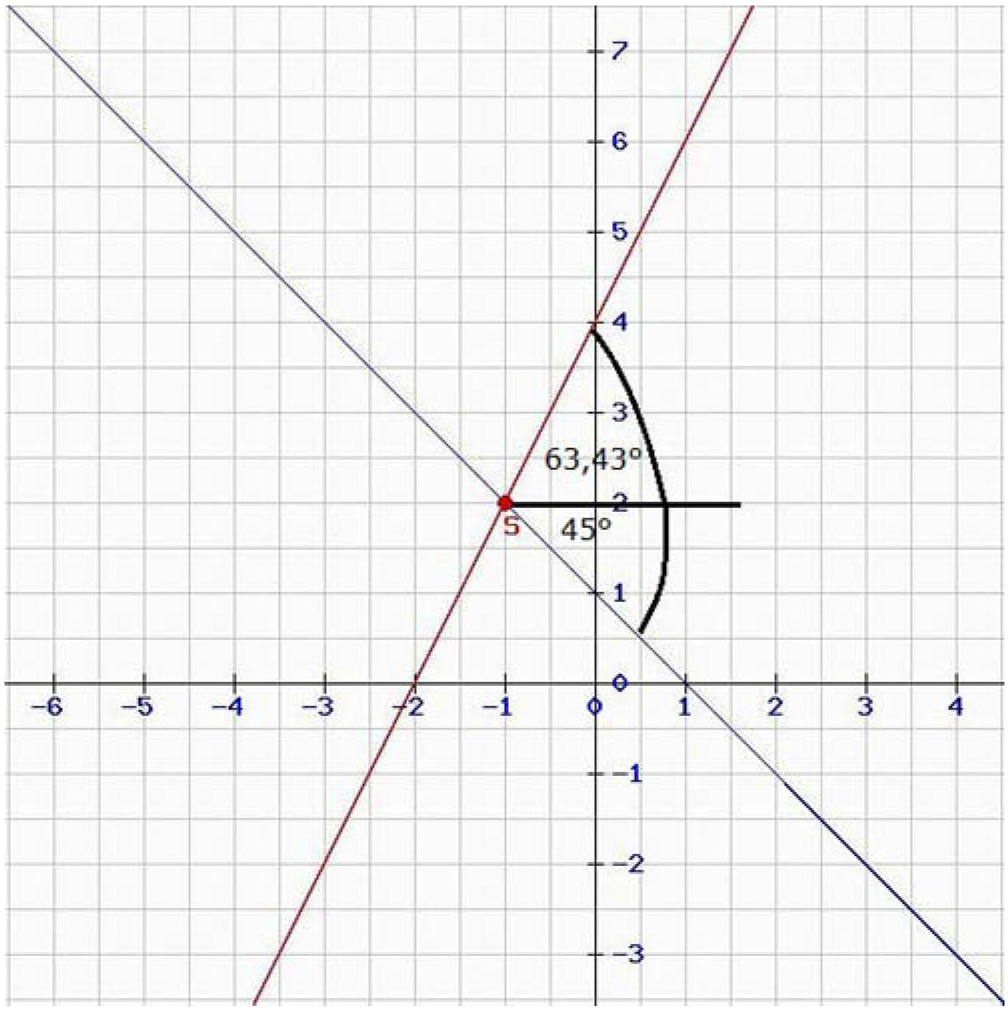
Da $\alpha_f > \alpha_g$ ist, ergibt sich der Schnittwinkel durch:

$$\alpha = \alpha_f - \alpha_g \approx 63{,}43° - (-45°) \approx 108{,}43°$$

Für $\alpha_f \leq \alpha_g$ wäre dieser gleich $\alpha_g - \alpha_f$, oder allgemein:

$$\alpha = |\alpha_f - \alpha_g|$$

Nun ist noch eines zu beachten: Wenn sich bei dieser Berechnung ein Winkel größer als 90° ergibt, so gibt man 180° - α als Schnittwinkel an, d.h. in unserem Beispiel beträgt dieser ca. 71,57°.



Den Schnittwinkel könnte man auch mit der folgenden Formel berechnen, wenn m_1 die Steigung der Geraden f und m_2 die Steigung der Geraden g ist:

$$\tan(\alpha) = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|, \text{ für } m_1 \cdot m_2 \neq -1.$$

Wenn das Produkt beider Steigungen -1 ergibt, dann sind die Geraden senkrecht (orthogonal) zueinander. Also wenn $f(x) = m_1x + b_1$ und $g(x) = m_2x + b_2$ (mit $m_1 \neq 0$ und $m_2 \neq 0$) dann schneiden sich die Geraden f und g orthogonal, wenn

$$m_1 \cdot m_2 = -1.$$

Bemerkung:
Ist z.B. $f(x) = 4$, womit der Graf eine Parallele zur x-Achse ist, dann hat eine senkrechte Gerade zu f die Gleichung $x = c$ und ist somit keine Funktion mehr, da sie parallel zur y-Achse verläuft. Bei einer Funktion gibt es zu einem x-Wert (bzw. an einer Stelle $x = x_0$) nur einen y-Wert (bzw. nur einen Funktionswert $f(x_0)$).

Beispiele zu orthogonalen Geraden:
1) $f(x) = -4x + 3$ schneidet $g(x) = \frac{1}{4}x – 1$ orthogonal.

2) Gesucht ist die Gleichung einer Geraden g, die orthogonal zur Geraden f mit der Gleichung $f(x) = 2x + 4$ ist und die durch den Punkt P(4; 2) geht. Wie groß ist der **Abstand des Punktes P zur Geraden f**?

$g(x) = m_2x + b$ soll orthogonal zur Geraden f mit der Steigung $m_1 = 2$ sein, also muss

$$2m_2 = -1$$

gelten, womit $m_2 = -1/2$ ist. Also gilt $g(x) = -1/2x + b$. Nun soll die Gerade g durch den Punkt P(4; 2) gehen, somit ist

$$g(2) = -1/2 \cdot 4 + b = 2$$

womit sich $b = 4$ ergibt und $g(x) = -1/2x + 4$. Der Punkt auf der Geraden f, der den kleinsten Abstand zu P hat, ist der Schnittpunkt der beiden Geraden, da g senkrecht zu f verläuft und den Punkt P enthält. Wir bestimmen somit zunächst den Schnittpunkt:

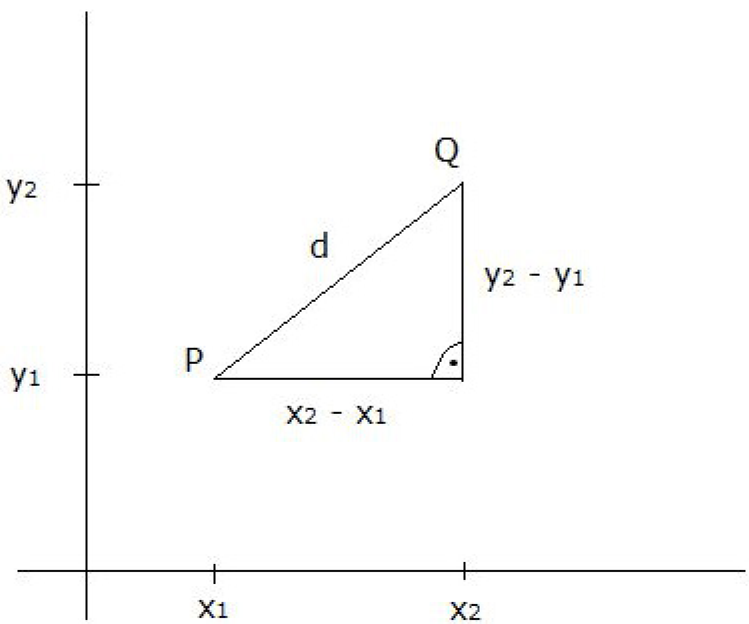
$$g(x) = f(x)$$

$$-2x + 4 = -1/2x + 4$$

Löst man die Gleichung nach x auf, so erhält man x = 0. y = g(0) = 4. Somit ist der Schnittpunkt Q(0; 4). Nun muss man noch den Abstand der beiden Punkte P und Q bestimmen, da dies der Abstand der Geraden f vom Punkt P ist.

Für den **Abstand d von zwei Punkten** P(x_1; y_1) und Q(x_2; y_2) gilt allgemein (die Formel ergibt sich über Pythagoras, siehe Grafik):

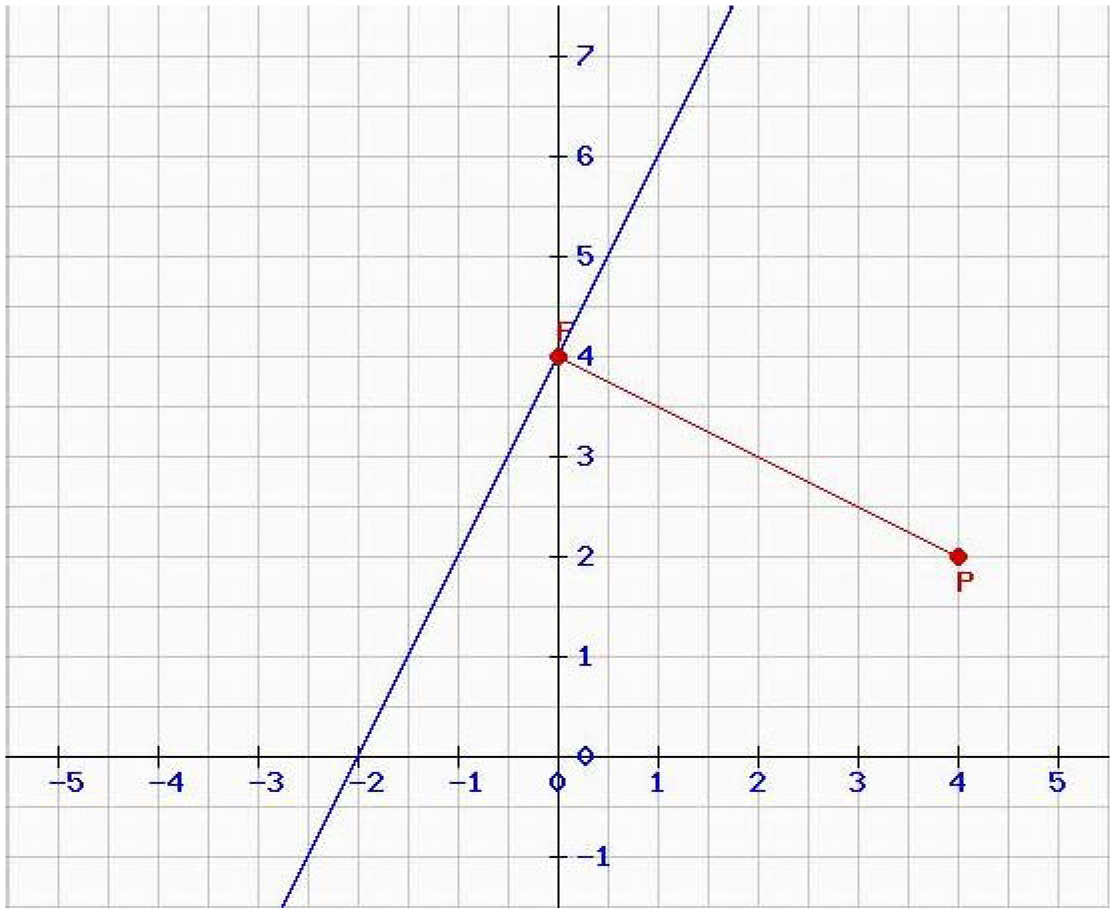
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Im Beispiel ist der Abstand von P und Q bzw. der Abstand von f zu P:

$$d = \sqrt{(0-4)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{20}$$

In der unteren Grafik (von www.alles-mathe.de) wird der Schnittpunkt der beiden Geraden f und g mit F, für Fußpunkt des Lotes, bezeichnet.



7
6
5
F
4
3
2
P
1
0
-1
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

1.2 Parabeln

Parabeln haben allgemein die Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ (mit $a \neq 0$).

$f(x) = x^2$ ist die Normalparabel. Ist in obiger Gleichung $a = 1$, dann handelt es sich somit um die Normalparabel (wenn $b = c = 0$ ist) oder allgemein um eine verschobene Normalparabel. Den Schnittpunkt mit der y-Achse kann man wieder wie bei den Graden und später bei Polynomen einfach ablesen: S(0; b)

Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben und für $a < 0$ nach unten geöffnet.

1.2.1 Nullstellen

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \mid : a$

$x^2 + b/a\ x + c/a = 0$

Somit kann man jede quadratische Gleichung auf die Form

$x^2 + px + q = 0$

bringen.

Wir betrachten zunächst Beispiele, bei denen man noch relativ einfach die Nullstellen bestimmen kann.

Beispiele:
1) Es sei $b = 0$, z.B.:

$$f(x) = 2x^2 - 32 = 0 \mid :2$$

$$x^2 – 16 = 0 \mid + 16$$
$$x^2 = 16 \mid \sqrt{\ }$$

Somit ergibt sich x = 4 oder x = -4, da das Quadrat beider Zahlen 16 ergibt. Man schreibt

$$x_1 = 4 \text{ und } x_2 = -4.$$

Hätte auf der rechten Seite -16 gestanden, so hätte f keine Nullstellen, denn es gibt keine reelle Zahl, die mit sich selbst multipliziert -16 ergibt.

Somit haben wir zwei Nullstellen und die x-Achse wird in den Punkten $N_1(4; 0)$ und $N_2(-4; 0)$ vom Graf von f geschnitten.

2) Es sei c = 0, z.B.:

$$f(x) = -2x^2 + 4x = 0 \mid :(-2)$$
$$x^2 – 2x = 0$$

Hier kann man x ausklammern:

$$x(x – 2) = 0$$

Nun ist ein Produkt gleich Null, wenn ein Faktor Null ist, also ist

$$x = 0 \text{ oder } x – 2 = 0.$$

Somit haben wir die zwei Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$.

Ist $b \neq 0$ und $c \neq 0$, so muss man einen Trick anwenden, oder die so genannte p-q-Formel verwenden.

Beispiel:

Gesucht sind die Nullstellen der Funktion $f(x) = -2x^2 - 8x + 10$.

$$f(x) = -2x^2 - 8x + 10 = 0 \mid :(-2)$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

Wir haben die Gleichung zur Bestimmung der Nullstelle zunächst auf die Form

$$x^2 + px + q = 0$$

gebracht. Nun zeigen wir zunächst, wie man die Gleichung mit einer quadratischen Ergänzung gelöst werden kann (wie in der Mittelstufe, bevor die p-q-Formel hergeleitet wurde). Danach wenden wir direkt die p-q-Formel an (wie es in der Oberstufe üblich ist).

Bemerkungen zur quadratischen Ergänzung:
Hätte man keine Formel, wie die p-q-Formel, die wir gleich herleiten werden, dann müsste man diese Gleichung durch eine quadratische Ergänzung lösen:

Da $(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$ gilt (binomische Formel anwenden), steht vor dem x in einer quadratischen Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ immer das doppelte der Zahl, deren Quadrat man benötigt, um einen Teil der quadratischen Gleichung als Binom schreiben zu können. Also im Beispiel

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

würden man $(4/2)^2 = 4$ benötigen.

Dies kann man mit einem Trick erreichen, indem man 4 addiert und 4 subtrahiert:

$$x^2 + 4x + 4 - 4 - 5 = 0$$

Man hätte hier auch, da es sich um eine Gleichung handelt, auf beiden Seiten 4 addieren können. Nun kann man einen Teil der Gleichung als Binom schreiben:

$$(x + 2)^2 - 4 - 5 = 0$$

$$(x + 2)^2 - 9 = 0 \mid + 9$$

$$(x + 2)^2 = 9 \mid \sqrt{\ }$$

Also ist x + 2 = 3 oder x + 2 = -3, was die Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -5$ ergibt.

Nun muss man nicht jedes mal eine quadratische Ergänzung durchführen, man kann auch die p-q-Formel verwenden, die sich auch aus einer quadratischen Ergänzung ergibt:

Die **p-q-Formel** zum Lösen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$:
q

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Herleitung:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x^2 + px + (p/2)^2 - (p/2)^2 + q = 0$$

$$(x + p/2)^2 - (p/2)^2 + q = 0 \mid + (p/2)^2 - q$$

$$(x + p/2)^2 = (p/2)^2 - q \mid \sqrt{\ }$$

Also gilt:

$$x + p/2 = \sqrt{(p/2)^2 - q} \quad \text{oder} \quad x + p/2 = -\sqrt{(p/2)^2 - q}\ .$$

Es ergibt sich:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Nun sind **drei Fälle** denkbar:

Fall $(p/2)^2 - q > 0$:
Hier gibt es zwei Lösungen der quadratischen Gleichung bzw. zwei Nullstellen.

Fall $(p/2)^2 - q = 0$:
Hier gibt es eine Lösungen der quadratischen Gleichung bzw. eine (doppelte) Nullstellen, an der der Graf die x-Achse berührt.

Fall $(p/2)^2 - q < 0$:
Hier gibt es keine Lösungen der quadratischen Gleichung bzw. keine Nullstellen.

Anwendung der p-q-Formel im Beispiel:

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

Hier ist $p = 4$ und $q = -5$:

$$x_{1/2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - (-5)} = -2 \pm \sqrt{4+5}$$

Somit ist $x_1 = -2 + 3 = 1$ und $x_2 = -2 - 3 = -5$.

1.2.2 Scheitelpunkt und Scheitelform

Der Scheitelpunkt einer Parabel ist der tiefste oder höchste Punkt auf der Parabel, je nachdem ob diese nach oben oder nach unten geöffnet ist. In der Oberstufe kann der Scheitelpunkt über die Differentialrechnung einfach bestimmt werden, indem man die erste Ableitung Null setzt. In der Mittelstufe muss hierzu die **Scheitelform**

$$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$$

einer Parabel bestimmt werden. An dieser kann der **Scheitelpunkt** $S(x_s;\ y_s)$ direkt abgelesen werden. Ist eine Parabel in der Form

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

gegeben, so muss dies erst in die Scheitelform gebracht werden. Hier gilt:

$$x_s = -\frac{b}{2a} \text{ und } y_s = f(x_s)$$

In der Mittelstufe wird dieser Schritt für Schritt über die quadratische Ergänzung bestimmt.

Beispiele:

$$f(x) = x^2 + 4x -5$$

Da, wie bereits im vorangegangenem Kapitel beschrieben, $(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$ gilt (binomische Formel anwenden), steht vor dem x in einer quadratischen Gleichung immer das doppelte der Zahl, deren Quadrat man benötigt, um einen Teil der quadratischen Gleichung als Binom schreiben zu können.

Im Beispiel würden man $(4/2)^2 = 4$ benötigen. Man addiert somit 4 und subtrahiert gleichzeitig 4, was die Funktion nicht verändert:

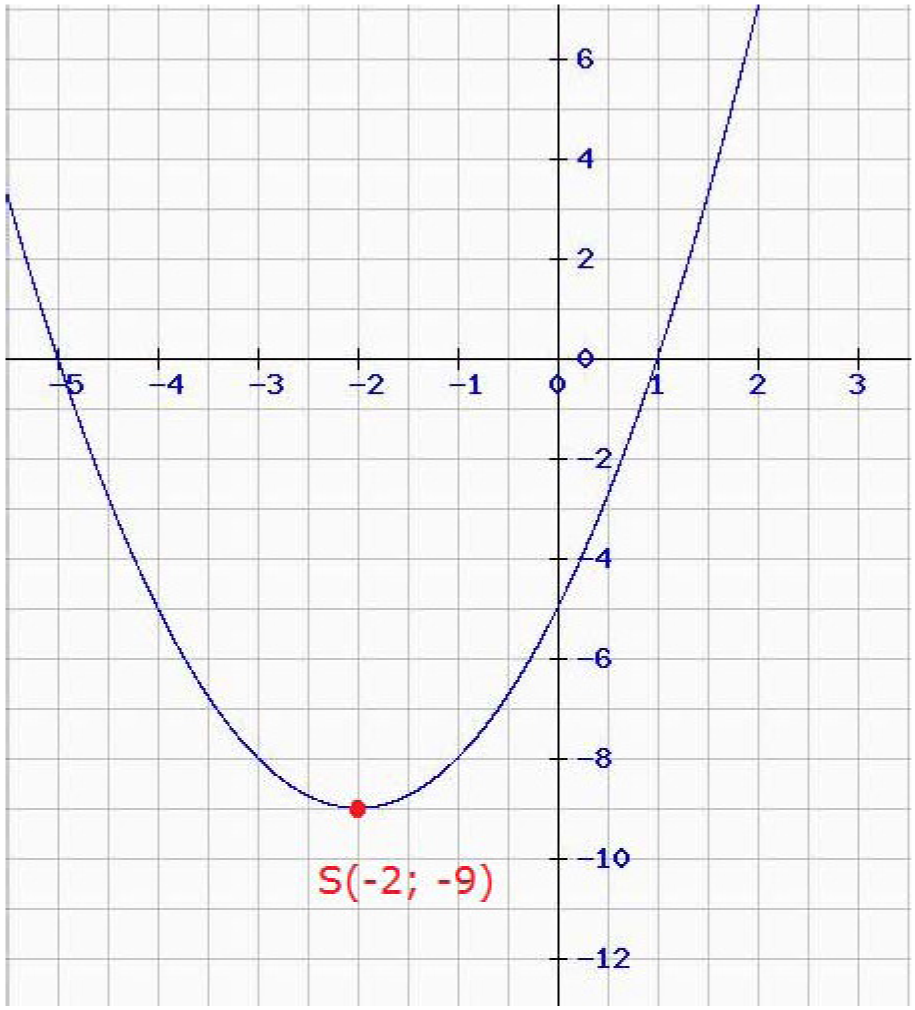
$$f(x) = x^2 + 4x + 4 - 4 - 5$$

Nun kann man einen Teil der Gleichung als Binom schreiben:

$$f(x) = (x + 2)^2 - 4 - 5$$

$$f(x) = (x + 2)^2 - 9$$

Somit können wir den Scheitelpunkt ablesen, der S(-2; -9) ist. Die Symmetrieachse der Parabel ist dann $x = -2$ und den kleinsten Funktionswert, den die Funktion annehmen kann, der ist -9.



Falls a ≠ 0 ist, dann muss zunächst a ausgeklammert und in der Klammer die quadratische Ergänzung durchgeführt werden.

Beispiel:
Gesucht wird die Scheitelform der Parabel mit der Gleichung $f(x) = 2x^2 – 12x + 8$.

Wir klammern 2 vor, wobei wir die Konstante 8 auch außerhalb der Klammern stehen lassen können (in kursiv ist die quadratische Ergänzung zu sehen):

$$f(x) = 2[x^2 – 6x] + 8$$
$$= 2[x^2 – 6x + \mathit{(6/2)^2} - \mathit{(6/2)^2}] + 8$$

$$= 2[(x – 3)^2 – 9] + 8$$
$$= 2(x – 3)^2 - 10$$

1.2.3 Bestimmung der Funktionsgleichung einer Parabel

Um eine Parabelgleichung bestimmen zu können, braucht man insgesamt drei Angaben. Z.B. drei Punkte, durch die die Parabel verläuft. Wenn man es sich um eine verschobene Normalparabel handelt, genügen auch zwei Angaben (da hier $a = 1$ ist).

Kennt man beispielsweise zwei Nullstellen, so ist es relativ einfach, die Parabelgleichung zu findenden, denn es gilt:

$$f(x) = a(x – x_1)(x – x_2)$$

Beispiel:
Eine verschobene Normalparabel ($a = 1$) hat die Nullstellen $x_1 = -4$ und $x_2 = 2$:

$$f(x) = (x – (-4))(x – 2) = (x + 4)(x – 2) = x^2 -2x + 4x – 8$$

Also $f(x) = x^2 +2x – 8$.

Ist a beliebig, dann benötigt man einen weiteren Punkt um a bestimmen zu können.

Beispiel:
Eine Parabel hat die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$ und geht durch den Punkt $P(1;3)$:

$$f(x) = a(x – 0)(x – 4) = ax(x – 4)$$