

ide extra



*Gabriele Fenkart
Anja Lembens
Edith Erlacher-Zeitlinger
(Hrsg.)*

SPRACHE, MATHEMATIK UND NATURWISSENSCHAFTEN



StudienVerlag

Gabriele Fenkart/Anja Lembens/Edith Erlacher-Zeitlinger (Hrsg.)

Sprache, Mathematik und Naturwissenschaften

ide-extra
Eine deutschdidaktische Publikationsreihe

Herausgegeben von
Annemarie Saxalber-Tetter/Werner Wintersteiner

Band 16

Gabriele Fenkart/Anja Lembens/Edith
Erlacher-Zeitlinger (Hrsg.)

Sprache,
Mathematik
und
Naturwissenschaften

StudienVerlag

Innsbruck
Wien
Bozen

Inhalt

Editorial

1. Von der Alltagssprache zur Fachsprache

Sprachebenen im Unterricht aus der Sicht von Deutsch, Mathematik, Physik, Biologie und Chemie

FRITZ SCHWEIGER: (Fast) alles ist Zahl. Eine kleine Kulturgeschichte der Mathematik und ihrer Sprache

PETER GALLIN URS RUF: Von der Schüler- zur Fachsprache

CLAUS BOLTE REINHARD PASTILLE: Naturwissenschaften zur Sprache bringen. Strategien und Umsetzung eines sprachaktivierenden naturwissenschaftlichen Unterrichts

KARSTEN RINCKE: Von der Alltagssprache zur Fachsprache.
Bruch oder schrittweiser Übergang?

MICHAEL A. ANTON: »Wie heißt das auf Chemisch?«
Sprachebenen der Kommunikation im und nach dem Chemieunterricht

Zweit- und Fremdsprache im Fachunterricht

2. *Spracherwerb im mehrsprachigen Klassenzimmer*

ELISABETH LANGER: Spracherwerb im
Naturwissenschaftsunterricht in Klassen mit
Migrationshintergrund

CHRISTA RITTERSBACHER: Wie Sprachenvergleich zum
(naturwissenschaftlichen) Verstehen beitragen kann:
Zweierlei verstehen – die Sache und die Sprache im
bifokalen Unterricht

MARIA-RITA HELTEN-PACHER: Sprachförderung in allen
Fächern. Überlegungen zur LehrerInnenaus- und -
fortbildung.

3. *Fächerübergreifend Lesen, Schreiben und Reflektieren*

*Gemeinsam Unterrichten in Deutsch, Mathematik und
den Naturwissenschaften*

ANGELA SCHUSTER: Aktionsforschung und schreibende
Reflexion als Mittel zur Veränderung der Denkweisen
von Lehrerinnen und Lehrern naturwissenschaftlicher
Fächer

ASTRID BECKMANN: Fächerübergreifend unterrichten in
Mathematik und Deutsch. Arbeiten mit
Gemeinsamkeiten und Differenzen

BEATE KRÖPFL, MADELEINE STRAUSS : »Die wilden Vier im
geheimnisvollen Zahlenhaus«. Mathematik – Deutsch:

Ein fächerverbindendes Projekt in einer fünften Schulstufe

WERNER GAGGL: »Forschung und Sprache«. Ein Projekt im Rahmen des naturwissenschaftlichen und sprachlichen Unterrichts

4. Verstehen durch Lesen, Schreiben und Erzählen *Fächerverbindende Strategien und Techniken*

GABRIELE FENKART: Sachtexte und Sachbücher im Unterricht aller Fächer. Geschlecht und Textsorte in der Leseerziehung

JOSEF LEISEN: Leseverstehen und Leseförderung in den Naturwissenschaften

MANFRED BERGUNDE: Von Subjekt zu Subjekt. Unterrichtspraktische Anregungen für die fachspezifische Sprachförderung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht

MARTINA NIESWANDT: Verstehen durch Schreiben im naturwissenschaftlichen Unterricht

FRITZ KUBLI: Narrative Aspekte in der Vermittlung der Naturwissenschaften

Autorinnen und Autoren

Ediotorial

Wilhelm von Humboldt stellte fest: »Die Sprache ist das bildende Organ des Gedankens« (zit. nach Dörner 2006). Diese grundlegende Bedeutung der Sprache für das Denken und Verstehen in den Domänen der Mathematik und den Naturwissenschaften unterstreichen die Beiträge in diesem Band auf vielfältige Weise.

Wir verknüpfen mit Worten Bilder und Modelle in unserer Vorstellung, konstruieren Zusammenhänge und teilen uns gegenseitig unsere Wahrnehmung von Welt mit. Heurismen, also das Finden von Wegen, um ein Problem zu lösen, sind nach Dörner (2006) Frage-Antwort-Spiele mit einem selbst. In psychologischen Tests stellte man beispielsweise fest, dass bei Versuchspersonen, denen man das laute und das innere Sprechen beim Denken verbietet, eine erhebliche Verschlechterung des Denkprozesses zu verzeichnen ist (vgl. Dörner 2006). Wenn eine differenzierte Sprachbeherrschung also für ein differenziertes Denkvermögen spricht, so sollte es für alle Lehrenden ein Anliegen sein, der Sprache auch im mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht die gebührende Aufmerksamkeit zu widmen.

Die Idee zum vorliegenden Buch entstand während des Universitätslehrgangs »Fachbezogenes Bildungsmanagement« 2006–2008, einer Kooperation der Österreichischen Kompetenzzentren (AECCs) für Deutschdidaktik und Mathematikdidaktik an der Alpen-

Adria-Universität Klagenfurt, für Didaktik der Biologie, der Chemie und der Physik an der Universität Wien, dem Institut für Unterrichts- und Schulentwicklung (IUS) und der Pädagogischen Hochschule Kärnten. Die Zusammenarbeit der drei großen Bereiche Deutsch, Mathematik und Naturwissenschaften (Biologie, Physik und Chemie) als Fachdidaktiken und Unterrichtsfächer resultiert aber auch aus der erweiterten Grundkonzeption des IMST-Fonds¹, einer Maßnahme zur Unterstützung von innovativen Unterrichtsprojekten.

Die gemeinsame Schnittstelle ist dabei die Sprache, denn die Thematisierung von Sprache als Medium in allen Unterrichtsfächern zeigt sich als Brennpunkt sowohl im Schulalltag und der LehrerInnenaus- und -fortbildung wie auch in den Fachdidaktiken. Seit Verstehensleistungen in Mathematik, den naturwissenschaftlichen Fächern und in Deutsch Gegenstand internationaler und nationaler Testungen (PISA, TIMMS etc.) sind, rücken sprachliche Kompetenzen, im Besonderen Leselernprozesse, in den Blickwinkel der Aufmerksamkeit. Hier eröffnet sich ein großer Forschungsbereich für die Fachdidaktiken und ein bedeutsames Aufgabengebiet für die Unterrichtspraxis. Beide Zugänge, sowohl die Unterrichtspraxis als auch die fachdidaktische Forschung, kommen in diesem Band zu Wort.

Die einzelnen Beiträge öffnen die Wahrnehmung für die Vielschichtigkeit der Herausforderungen aus jeweils anderen Blickwinkeln. Da jeder Fachunterricht auf der Alltagssprache aufbaut, ist die Entwicklung allgemeiner sprachlicher Kompetenzen die Voraussetzung für die Entwicklung von fachsprachlichen Kompetenzen und damit für einen erfolgreichen Unterricht in allen Fächern. Die große Anzahl an Beiträgen aus den Bereichen der

Mathematik und den Naturwissenschaften zeigt eine zunehmende Bewusstseinsbildung für die Tatsache, dass auch ihr Unterricht in diesem Sinne Sprachunterricht ist.

Das vorliegende Buch beleuchtet vier verschiedene Aspekte dieser Thematik.

Die altersgemäße Entwicklung einer Fachsprachlichkeit ist eine große didaktische Herausforderung, in der es darum geht, Kinder und Jugendliche bewusst von ihrer Alltagssprache zur Fach- und Formensprache heranzuführen. Das Ziel ist die Entwicklung eines inneren Sprachregisters, das Übersetzungstransfers von einer Sprachebene in die andere ermöglicht. Mit diesem Bereich beschäftigt sich das erste Kapitel des Bandes.

Da mehrsprachige bzw. multikulturelle Klassenzimmer zunehmend die Arbeitsrealität bestimmen, sehen sich LehrerInnen vor neuen Herausforderungen, denen nicht durch Förderkurse und Deutsch-als-Zweitsprache-Unterricht alleine begegnet werden kann. Sie sind Aufgabe von schulischer Bildung und damit Aufgabe aller Fächer. Einige Beiträge beschäftigen sich daher mit den Themen Lese- und Sprachkompetenz bei SchülerInnen mit Migrationshintergrund.

Das Thema Sprache als Schnittstelle des fächerübergreifenden Unterrichts zwischen den Fächern Deutsch, Mathematik und den Naturwissenschaften behandelt das dritte Kapitel. Der Bogen spannt sich von konkreten Unterrichtsprojekten, von Sprache und Literatur als verbindendem Element bis zum reflektierenden Schreiben als Methode der Aktionsforschung.

Mit den grundlegenden Kulturtechniken Lesen, Schreiben, Sprechen (Erzählen) für das Verstehen und das Lernen setzt sich das vierte Kapitel auseinander. Wenn sich

alle Unterrichtsfächer für Strategien des Lesens, Schreibens und des eigenverantwortlichen Lernens zuständig fühlen, führt dies zu einer deutlichen Stärkung dieser grundlegenden Kompetenzen. Diese Erkenntnis ist nicht neu, hat aber doch noch nicht konsequent ihren Niederschlag im schulischen Alltag gefunden.

Der Band versteht sich als ein Plädoyer für Blicke über den Zaun, für zunehmende Zusammenarbeit und Vernetzung zum Wohle einer gelingenden Bildung, mit dem Ziel, den Lernenden Zugänge zum Verstehen von Welt zu erschließen.

Wir hoffen, Sie finden aufschlussreiche Anregungen und neue Argumente für die Förderung von Sprachkompetenzen in Ihrem Unterricht, in Ihren Fortbildungs- und Lehrveranstaltungen, und wünschen anregende Lektüre.

Gabriele Fenkart, Anja Lembens, Edith Erlacher-Zeitlinger

Anmerkung

- 1 IMST: Innovations in Mathematics, Science and Technology von 1999–2008. Ab 2008: Innovationen Machen Schulen Top. Infos siehe unter: <http://imst.uni-klu.ac.at/fonds>.

Literatur

DÖRNER, DIETRICH (2006): Sprache und Denken. In: Funke, J. (Hrsg.): *Denken und Problemlösen* Göttingen: Hogrefe (= Enzyklopädie der Psychologie, Themenbereich C: Theorie und Forschung, Serie II: Kognition, Bd. 8).

1

Von der Alltagssprache zur Fachsprache

Sprachebenen im Unterricht aus der Sicht von Deutsch,
Mathematik, Physik, Biologie und Chemie

Fritz Schweiger

(Fast) alles ist Zahl

Eine kleine Kulturgeschichte der Mathematik und ihrer Sprache

1. Einleitung

An den Anfang wollen wir das berühmte Zitat aus dem *Saggiatore* Galileo Galileis setzen:

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche [...]. (Galilei 1623, S. 631)

Die Philosophie ist in dem großartigen Buche niedergeschrieben, das immer offen vor unseren Augen liegt (ich meine das Universum). Aber man kann es erst lesen, wenn man die Sprache erlernt und sich die Zeichen vertraut macht, in denen es geschrieben ist. Es ist in mathematischer Sprache geschrieben, und die Buchstaben sind Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren [...].

Dieser Gedanke wird auch von Werner Heisenberg aufgegriffen:

Im Grunde war ich mit meiner Freude an der mathematischen Beschreibung der Natur [...] auf den einen Grundzug des abendländischen Denkens überhaupt gestoßen, nämlich eben auf die [...] Verbindung der prinzipiellen Fragestellung mit dem praktischen Handeln. Die Mathematik ist sozusagen die Sprache, in der die Frage gestellt und beantwortet werden kann, aber die Frage selbst zielt auf einen Vorgang in der praktischen materiellen Welt; die Geometrie zum Beispiel diene der Vermessung von Ackerland. (Heisenberg 1955, S. 40)

Eine Einführung in die Probleme Sprache und Mathematik bietet Maier/Schweiger (1999). Einen kurz gefassten Überblick über gewisse Aspekte findet man in Schweiger (2005). In diesem Essay soll dargestellt werden, wie wesentliche Entwicklungslinien des mathematischen Registers (dies ist das Subsystem einer natürlichen Sprache, das durch ein spezielles Vokabular und durch

mathematische Zeichen angereichert, der sprachlichen Kodierung mathematischer Tätigkeiten und Ideen dient) durch die Zahl geprägt sind.

2. Strategien mathematischer Tätigkeit

Zählen und Messen stehen wohl am Ursprung der Mathematik und sind zutiefst mit sprachlichen Ausdrücken verbunden. Wir folgen zunächst der klassischen Sprachlehre, wenn wir uns den Umständen des Ortes, der Zeit, der Weise und des Grundes zuwenden.

Lokale Bestimmungen stehen auf die Fragen: Wo? Wohin? Woher? Wie weit (hoch, tief, lang, breit)? Qualitative Antworten überwiegen zunächst.

»Wo warst Du gestern Abend?« – »Mit meiner Freundin in der Disco in Krähwinkel.« – »Wo ist denn das?« – »In der Nähe.« – »Was heißt das, zu Fuß oder mit dem Auto?« – »Ja, etwa 20 km südlich vom Stadtzentrum, aber wegen des dichten Verkehrs haben wir über eine halbe Stunde gebraucht.« Plötzlich sind die (mathematischen) Begriffe der Orientierung und des Messens da. Das Messen ist Zählen mittels eines konventionellen Maßstabes.

Hatte man früher von einem Tagesmarsch gesprochen und Tücher mit Ellen gemessen, so hat sich allmählich herausgebildet, dass ein konventioneller Maßstab *präziser* und *verlässlicher* ist, wenn man das Zählen voraussetzt. Alte Längen, Flächen- und Raummaße können eine Fundgrube für sprachgeschichtliche Überlegungen sein. Die Verwendung vielerlei Maße führte letztlich dazu, dass man in Paris das Urmeter aufbewahrte, um auf der ganzen Erde einen verlässlichen Maßstab einzuführen: das Meter.

Bündelung und *Teilung* gestatteten eine Vermehrung der Begriffe: Kilometer und Millimeter, die allmählich von der mathematisch durchsichtigen Schreibweise 10^3 m und 10^{-3} m abgelöst werden.

Die lokalen Bestimmungen »nah« und »fern« verlangen früher oder später nach Präzisierung; die Richtungsangaben »südlich«, »westlich«, »östlich« und »nördlich« sind für Navigation zu ungenau, man muss Winkel und Winkelmessung einführen. Ein rechter Winkel, das ist eine Vierteldrehung (da gebrauchen wir eine wichtige Strategie: das Teilen), aber, wenn es *genauer* werden soll, so besteht

ein rechter Winkel aus 90 kleinen Schritten, die Drehung um 1° genannt werden.

Auch der folgende Dialog ist aufschlussreich: »Wie alt sind Sie?« – »Nicht mehr der Jüngste.« – »Als Arzt muss ich das schon genauer wissen.« – »Ja, 63 Jahre, geboren am 29. Februar 1946.« – »Das kann nicht stimmen, denn 1946 war kein Schaltjahr.« – »Entschuldigung, ich wollte 23. Februar sagen.«

Die Zählung von Schaltjahren nach einem Algorithmus modulo 4 kommt noch hinzu! Auch hier überwiegen zunächst qualitative Aussagen, aber unsere Kultur verlangt mehr. Die Zählung der Jahre und die Erfindung von Kalendern sind uraltes Kulturgut. Das eigentümliche Mischsystem unserer Kalenderangaben (Zählung der Tage, Benennung der Monate nach einer konventionellen Zwölferreihe, Zählung der Jahre) ist bemerkenswert, wobei zusehends auf Angaben wie 290246 (siehe E-Card) umgestiegen wird. Dafür sind physikalische Tatsachen verantwortlich, nämlich die (näherungsweise bestehende) Inkommensurabilität von Tageslänge und Jahreslänge bzw. Mondumlauf (wenn man andere Kalenderformen hinzunimmt). Die mathematisch bemerkenswerte Tatsache, dass man auf das Jahr 1 vor Christi Geburt gleich das Jahr 1 nach Christi Geburt folgen ließ (und das Jahr 0 übersprungen hatte!), führte zumindest um die letzte Jahrtausendwende zu einigen heiteren Disputen, wann denn das dritte Jahrtausend beginne.

Bündeln und *Teilen* sind auch hier am Werk, wenn auch nicht immer systematisch. Der Tag ist von Natur aus vorgegeben. Die Woche hat 7 Tage, aber der Monat kann verschieden viele Tage beinhalten. Der Tag wird konventionell in 24 Stunden eingeteilt, die Stunde in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden. Bis hierher reicht das Erbe Babylons, dann verwendet man Zehntel- und Hundertstelsekunden.

Maß- und Wertangaben können durch konventionelle Maßstäbe verfeinert werden. »Max verdient mehr als Moritz« – »Ja, geht es nicht genauer?« – »Max hat im Monat rund 800,- € mehr auf seinem Gehaltszettel« – »Nun, wenn das Brutto bedeutet, brauche ich noch mehr *Informationen* um zu wissen, wie viel das Netto ist.«

Modale Bestimmungen sind gegen Mathematisierung zunächst sperrig. Sie ist *schön* wie eine Fee, er ist *charmant* wie ein echter Gentleman. Da haben Zahlen nichts verloren, außer im Umweg über

begleitende Zählungen: Sie verdient als Model über 100.000,- € im Jahr, er hat schon mehr als ein Dutzend Heiratsanträge erhalten. Ob damit (und mit dem derzeit überbordenden Gebrauch von Kennzahlen) Wesentliches erfasst wird, mag dahin gestellt bleiben.

Eine Art modaler Bestimmung hat sich lange der Quantifizierung widersetzt. »Morgen wird es *wahrscheinlich* regnen, aber übermorgen scheint *sicher* wieder die Sonne.« - »Ich habe 2 kg Kirschen gekauft, aber die ersten beiden sind wurmig. Sind wohl alle Kirschen verdorben?« Wahrscheinlichkeit in Zahlen auszudrücken ist nur sinnvoll, wenn Ereignisse oft stattfinden oder zumindest stattfinden könnten! Darum gehen die ersten mathematischen Überlegungen auf das Würfel- und Kartenspiel zurück, bevor die industrielle Revolution und die Naturwissenschaften der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Statistik eine neue Rolle zugeschrieben haben. »Ich bin mir 100 % *sicher*« kann daher nur metaphorisch verstanden werden, wie die Aussage »Dies ist ein *tiefer* Gedanke«, da es für Gedankentiefe keine Maßeinheit gibt. Auch die Ansicht, dass unser Leben im Kosmos ein Zufall sei, verwendet (vorläufig) den Begriff Zufall bloß im Sinne »Ursache unbekannt«.

Man sieht, die Sprache ist reich an Wörtern und Begriffen, die auf *Präzisierung* drängen und Mathematik ist eine Möglichkeit dazu. Grundlegend dafür sind der Begriff der Zahl und die damit verbundene Tätigkeit des Zählens. Zur Weiterentwicklung der Sprache sind dazu *Zahlwörter* entstanden. In diesem Aufsatz sei nur auf Grundzahlwörter eingegangen, obgleich gerade in den abgeleiteten Zahlwörtern viel implizite Mathematik enthalten ist. Die Anfänge der Zahlwortreihe werden mit dem Erwerb der Sprache gelernt. Diese Zahlwörter sind opak, d.h. man muss sie einfach lernen: eins, zwei, drei, vier ... Im Fremdsprachenunterricht passiert Ähnliches: un, deux, trois, quatre ... Dann sind verschiedene Schichten erkennbar: elf und zwölf entstanden aus »eins-darüber« und »zwei-darüber« (nämlich über zehn), aber von dreizehn bis neunzehn wird (im Deutschen!) einfach addiert. Die Zahlen zwanzig bis neunzig lassen ein wenig System erkennen (obgleich *zweizig und *dreizig besser ins System passen würden!). Die Umstellung dieser Zahlen mit eingefügtem »und« hat schon viele irritiert: einundzwanzig, neununddreißig usw. Dann werden kühn

Brückenpfeiler geschlagen: hundert, tausend, (eine) Million. Es kann reizvoll sein, wenn im Fremdsprachenunterricht auf die Unterschiede der Wortbildung eingegangen wird. Der Erwerb der Zahlreihe kann als abgeschlossen angesehen werden, wenn die darunter liegende Grammatik verstanden wird, d.h. ein Kind versteht den Sinn etwa von »einhundertdreißig«, obwohl es diese Zahl vorher nie gehört oder verwendet hat.

Das Messen ist auf dem Zählen aufgebaut. Im ersten Schritt wird abgezählt, wie oft eine gegebene Maßeinheit nötig ist. Das Messen hat, wie schon erwähnt, zur Präzisierung zweier wichtiger Schritte Anlass gegeben, das Bündeln und das Teilen. Auch hier ist die Alltagssprache reich an Ausdrücken: eine Herde Kühe, ein Büschel Bananen, ein Stapel Bücher. Für den Handel und andere Zwecke ist eine Präzisierung notwendig, durch die Anzahl der Objekte (es wurden 67 Kühe verkauft, eine Kiste Bier enthält 20 Flaschen), oder durch die Anzahl der Maßeinheiten (ein Büschel Bananen wiegt etwa 40 kg). Neben die Währungseinheit 1 Euro tritt die kleinere Einheit 1 Cent, neben die Stunde die Minute. Die Idee der Verwendung kleinerer Einheiten war es, das Rechnen mit Brüchen und rationalen Zahlen aufzuschieben. Wer 25 Cents sagen kann, braucht den Begriff $\frac{1}{4}$ Euro nicht! Allerdings hat sich gezeigt, dass man durch Einführung kleinerer oder größerer Einheiten (die Astronomen haben noch Lichtjahr und Parsec als Entfernungsmaßstäbe eingeführt) an Grenzen stößt. Die Exponentialschreibweise 10^z , $z \in \mathbb{Z}$, ist derzeit das Mittel der Wahl! Die Verwendung von Zahlen erschließt und verfeinert unser Weltbild, man darf aber nicht in den Fehler verfallen, alles und jedes messbar machen zu wollen, die Schönheit eines Sonnenuntergangs, das Glück leuchtender Augen, die Bedeutsamkeit von Ereignissen, vor allem nicht den Wert des Menschen.

3. Zahl trifft Funktion

»Heute«, »morgen«, »gestern« – das sind einfache Einteilungen des Zeitverlaufs. »Seit meinem Unfall sind nun schon drei Monate vergangen und in zwei Wochen darf ich wieder arbeiten.« Die Verfolgung von Zeitabläufen steht auch am Anfang des

Funktionsbegriffs. Man versuchte den jeweiligen Ort als Funktion der Zeit zu beschreiben, etwa durch $x = x(t)$. Man begann mit Differenzen zu rechnen. Ein Weg zur Differentialrechnung $\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$ wurde sichtbar.

Ebenso auf dem Begriff der Zahl aufbauend ist das *Modellieren* mit Funktionen. »Wenn wir schneller fahren, sind wir früher dort.« Richtig, aber die Gleichung $s=vt$ führt zu aussagekräftigeren Umformungen, etwa $t = s/v$. Wenn wir daher um ein Drittel schneller fahren, d. h. v durch $v^\circ = v + v/3 = (4/3)v$ ersetzen, wird die neue Fahrzeit $t^\circ = 3s/4v = (3/4)t$ um ein Viertel verkürzt.

Ein wichtiger Schritt ist schon verwendet worden. Mit der Entwicklung der Schrift, die es gestattet, Gesprochenes und Gedachtes festzuhalten, zu bewahren und zu kommunizieren, ist die Entwicklung der mathematischen Symbolsprache verbunden (siehe dazu Tropfke 1980, Schweiger 2008). Zunächst waren es Zahlzeichen, historisch zunächst wohl aus Kerben entwickelt I, I I, I I I, aber bald treten opake Zahlzeichen hinzu. Die Gestalt der Ziffer 7 verrät nichts mehr über ihren Begriffsinhalt. Die Entwicklung des Positionssystems ermöglicht, die mentalen Operationen der Arithmetik (Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren) durch die Verschriftlichung auf »große« Zahlen auszudehnen. Die elektronischen Rechenhilfen reduzieren dies allerdings auf die Eingabe von Daten und Operationszeichen und das Lesen der Angabe.

Der Mensch ist ein »homo ludens«. Daher stehen spielerische Aufgaben schon in den ältesten erhaltenen Büchern, etwa Aufgaben wie »Ein Bauer hat Hühner und Hasen. Miteinander sind es 35 Tiere, und sie haben zusammen 100 Beine. Wie viele Hühner und Hasen hat er?« Natürlich kann man diese Aufgabe durch Probieren lösen, aber die Symbolschrift macht es zu einem *Routinefall*. Sei x die Anzahl der Hühner und y die Anzahl der Hasen, so hat man zwei Gleichungen

$$x + y = 35$$

$$2x + 4y = 100$$

mit den unbekannten Variablen x und y .

Natürlich muss man mit sprachlichen Interferenzen umgehen können, wie die berühmte Testaufgabe »In einem College sind 5 mal

mehr Studenten als Professoren. Drücke dies in einer Gleichung aus!« zeigt, wo sehr oft die Gleichung $5s = p$ hingeschrieben wird (s bezeichne die Anzahl der Studenten, p die der Professoren). Dies ist eine Mathematisierung, die nur die Schlüsselwörter »5 mal«, »Studenten« und »Professoren« in dieser Reihenfolge aufschreibt!

Die mathematische Symbolsprache dient dazu, *Information* zu *verdichten* und kann zu *syntaktischem Arbeiten* verwendet werden. »Das Quadrat der Summe zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate dieser Zahlen vermehrt um das Zweifache des Produkts dieser Zahlen.« Wenn dem Lernenden klar wird, dass $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ eine gute Abkürzung ist, ist ein wichtiges Ziel erreicht! Mit der Gleichung $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ kann man auch Entdeckungen machen. Man *ersetze* b durch $-b$ und kommt auf $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$.

Daher ist $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Setzt man $a^2 = A$, $b^2 = B$, so erhält man mühelos die Ungleichung $\sqrt{AB} \leq \frac{A+B}{2}$.

Man versuche aus der obigen verbalen Formulierung dieses Ergebnis herzuleiten! Natürlich muss man vorsichtig sein. Die Gleichungskette $-1 = i^2 = \sqrt{-1} \sqrt{-1} = \sqrt{1} = 1$ enthält irgendwo einen oder mehrere Fehler! Der Verdacht bestätigt sich. Die Regel $\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy}$ ist anwendbar, wenn erstens das Wurzelsymbol eine Funktion bezeichnet und zweitens die richtige Funktion gewählt wird! Wählt man etwa für $x \geq 0$ die Funktion $f(x) = \sqrt{x} \geq 0$, so ist die obige Regel richtig. Wählt man hingegen $x \geq 0$ für die Funktion $g(x) = -\sqrt{x} \geq 0$, so ist die obige Regel falsch! Auch die Wahl $f(z) = e^{\pi i \phi}$ für $z = e^{2\pi i \phi}$ hilft nicht weiter, da dann $\sqrt{1} = -1$ festgelegt ist!

Die Moral aus dieser Geschichte: Es gibt keine Festlegung $\sqrt{x}$ von als Funktion, so dass obige Gleichungskette richtig ist. Man sieht, dass man aus Fehlschlüssen auch einen Nutzen ziehen kann.

Das mengentheoretische Paradox von Russell ist in Zeichen geradezu lächerlich einfach auszudrücken. Sei $M := \{S : S \notin S\}$. Gilt $M \in M$, so folgt aus der Definition von M sofort $M \notin M$; ist hingegen $M \notin M$, so folgt $M \in M$. Das sprachliche Ungetüm »Die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten« bezeichnet eben keine Menge! Dazu ein Hinweis: Einen guten Überblick über

die *Verlässlichkeit* mathematischen Arbeitens findet man in Harrison (2008).

Ein Ursprung der mathematischen Symbolsprache ist in der Verwendung von Abkürzungen zu finden. Das Wurzelzeichen $\sqrt{}$ ist aus Lateinisch *radix* »Wurzel« entstanden, das Integralsymbol $\int$ stammt aus einem stilisierten großen S (für Lateinisch *summa* »Summe«). Variablen stehen sprachlich für Pronomina. »Denk dir eine Zahl. Multipliziere sie mit 2, addiere dazu ihr Quadrat und sage, was du erhältst!« »35« »Dann ist die Zahl 5!« Für die Zahl schreibe x . Dann erhält man $2x + x^2 = 35$. Das Symbol x ist ein Pronomen, ein Fürwort für die gesuchte Zahl. Ein wesentlicher Schritt ist die Ausdehnung dieser Symbolsprache auf gedachte (erfundene oder entdeckte, jedenfalls vorstellbare) Objekte. Die Abkürzung $x \in \mathbb{Q}$ sollte aber nicht zur unschönen Sprechweise » x ist ein Element der Menge der rationalen Zahlen« Anlass geben, sondern die einfache Sprechweise » x ist eine rationale Zahl« beibehalten werden. Übersetzungsübungen und Bewusstmachen der Regeln der Fachsprache sollten in keinem Unterricht fehlen. Ist etwa $ax + by + c = 0$ die (allgemeine) Gleichung einer Geraden, so sollte man die Gleichung $y = x$ gelegentlich in die Form $1 \cdot x + (-1) \cdot y + 0 = 0$ übersetzen. Andererseits, das vielleicht bei einer Rechnung auftretende Ergebnis $a = 0$, $b = 2$, $c = 4$ sollte über die Zwischenform $0x + 2y + 4$ zur Gleichung $y = -2$ vereinfacht werden.

Ein- und Ausgaben bei computeralgebraischem Einsatz können hier helfen. Ebenso können Taschenrechner und Computer die zwei Systeme der Funktionsbezeichnung »EINGABE und dann die FUNKTION« oder »FUNKTION und dann die EINGABE« bewusst machen: Man schreibt x^2 , und spricht » x -Quadrat«, aber schreibt $\sqrt{x}$ und sagt »Wurzel aus x «.

Wissen über die Kulturgeschichte ist vor allem *Reflexionswissen*. Ein möglicher Einsatz im Unterricht erfordert viel didaktisches Geschick und muss wohl dosiert sein. Kinder lernen auch nicht schreiben, indem man den historischen Weg von den Hieroglyphen über die Schriften des Alten Orients bis heute nachvollzieht! Die Verwendung kleinerer Einheiten (durch Teilen) führt allerdings nicht nur zum Bereich der rationalen Zahlen (mit der Zwischenstufe der Brüche!), sondern zugleich zu deren Begrenztheit. Mit keiner noch so kleinen Längeneinheit kann man die Längen von Seite und

Diagonale eines Quadrats zugleich messen. Wir sagen dafür » $\sqrt{2}$ ist irrational« (lat. *ratio* »Verhältnis«). Die Entdeckung dieses Sachverhalts soll eine Erschütterung der griechischen Wissenschaft nach sich gezogen haben, aber es gelingt nicht so recht, dies in den Unterricht zu übertragen. Immerhin hat die Menschheit gut zwei Jahrtausende mit irrationalen Zahlen gelebt und irgendwie gerechnet. Der *Kalkül* überwand die Bedenken, und erst im 19. Jahrhundert hat man hier entscheidend weitergearbeitet; die Erforschung der Grundlagen der Mathematik bekam einen neuen Aufwind. Kinder sitzen vor dem Fernseher ohne etwas über die Entdeckung des Elektrons als Elementarteilchen zu wissen. Sie fahren auch im Flugzeug in den Urlaub, bewundern vielleicht die technologische Umgebung, aber empfinden nicht das Staunen über das aerodynamische Prinzip des Auftriebs.

4. Zeichen, Wörter und Sätze

Daher ist es legitim, Mathematik als *Handeln* zu vermitteln, mit einer Dosis Reflexionswissen im Hintergrund. Auch das Vokabular kann technisch sein. Es ist gut, wenn Wörter wie »Addieren, Multiplizieren, Funktion, komplexe Zahl ...« signalisieren, dass man Mathematik treibt. »Hinzuzählen, Vervielfachen« sind Wörter mit begrenzter Reichweite (und die Differenz zur Alltagssprache soll bei der Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ nicht verschwiegen werden). Wenn Subtrahieren »Wegnehmen« bedeutet, so ist die Aufgabe $2x^2 - x^2 = 2$ richtig gelöst, denn x^2 wurde ja weggenommen. Störend ist dabei die Konvention der 1-Deletion, nämlich x^2 statt $1 \cdot x^2$ zu schreiben (ähnlich wie wir »zehn« statt »*ein-zehn« sagen, bei »hundert« ist aber auch schon »einhundert« zulässig und das Wort »Million« kommt ohne Zusatz »eine Million« nicht aus).

Eine Schwierigkeit liegt auch darin, dass im Alltag Wörter kontrastiv verwendet werden: Eine Ellipse ist durch ihr typisches Aussehen kein Kreis, aber in der Mathematik ist ein Kreis ein Spezialfall einer Ellipse, ebenso ist ein Quadrat prototypisch kein Rechteck. Über den Randfall »leere Menge« könnte man lange diskutieren, denn eine Menge sollte doch eben eine Menge von Dingen oder Ähnlichem sein! Die freie Verwendung von Wörtern wie »Gruppe«, »Ring«, »Körper« usw. ist sicher kein Problem. Die Verwendung von »Topologischer Raum«, »Metrischer Raum« oder »Vektorraum« zeigt die metaphorische Dimension des Wortes »Raum« auf, denn in der Mathematik gibt es keine Definition von Raum. Historisch erklärbar ist die Verwendung von Wörtern für Elemente mancher Strukturen (z.B. »Vektor« für »Element eines Vektorraums«), was aber auch zu Interferenzen führen kann, weil im Physikunterricht mit dem Begriff »Vektor« andere Vorstellungen angesprochen werden als mit den Axiomen eines Vektorraums. Die Beschränkung weiterer Teile der Schulmathematik auf Zahlen im weitesten Sinn ist insofern nicht zufällig, als die Strukturen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ »kategorisch« sind, d.h. sie sind durch die dahinter liegenden Axiome im Wesentlichen eindeutig bestimmt, während es viele Gruppen, Ringe oder auch Körper gibt.

Eine gewisse Schwierigkeit liegt in der Verwendung von Adjektiven. Ein schwarzer Hund ist im Alltagsverständnis jedenfalls ein Hund, ein abgebranntes Haus allerdings eigentlich kein Haus mehr. Eine komplexe Zahl ist nur dann sinnvoll, wenn man schon weiß, was eine Zahl ist. Dies erinnert eher an den Begriff Fledermaus, die ja auch keine Maus (im zoologischen Sinn) ist. StudentInnen haben oft Schwierigkeiten zu verstehen, warum man beweisen muss, dass eine »offene Kugel« (die Menge aller Punkte x in einem metrischen Raum, die die Bedingung $|x - m| < r$ erfüllen) eine »offene Menge« im Sinne der Topologie ist.

Doppeldeutigkeiten, mit denen man ganz gut leben kann, liegen bei geometrischen Begriffen und zugeordneten Maßzahlen vor. Ein Radius eines Kreises ist eine gerichtete Strecke (eine Menge von Punkten mit festgelegtem Anfangspunkt), aber die Aussage, dass der Radius des Kreises gleich 5 ist, ist dennoch korrekt interpretierbar. Der Hintergrund ist hier, dass geometrische Verfahren und Messverfahren eng zusammenhängen. Die Gleichheit der Länge

zweier Strecken ist durch Kongruenz feststellbar, aber eben auch durch Längenmessung. Bei der Flächenmessung von Rechtecken ist das bereits anders!

Die Verdichtung der Information, die das Verständnis mathematischer Texte erschwert, ist mit dem Lückentest leicht nachvollziehbar. Der Satz »G_st_rn war i__i_Ki_o« ist spielend zu »Gestern war ich im Kino« ergänzbar. Die Aussage »1kg Äpfel kostet € 1,12. Wie viel bezahlte Frau Bauer für 1,75 kg?« ist aus »_kg Äpf_l kostet € 1,12. Wie viel bezahlte Fr_u Bau_r für 1,75 __?« mit größerer Mühe rekonstruierbar. Die Nichtbeachtung des minimalen Unterschieds (Beisetzung eines hochgestellten Striches) zwischen der Funktion f und ihrer Ableitung f' kann verhängnisvoll sein.

Hat der Lernende sich mit dem mathematischen Vokabular und den Anfängen der Symbolsprache angefreundet, so wartet die nächste Hürde auf ihn, die mathematische Syntax. Hier ist oft die Reihenfolge entscheidend! Der Satz »Es gibt eine Frau für jeden Mann« wird im Alltag meist zu dem (in Grenzen richtigen) Satz »Für jeden Mann gibt es eine Frau« uminterpretiert. Hingegen wird bei einer Algebraprüfung die Aussage »In einer Gruppe gibt es ein inverses Element zu jedem Element« schon als Fehler angesehen, denn korrekt sollte es doch heißen »In einer Gruppe gibt es zu jedem Element ein inverses Element.« Besonders auffällig ist diese Diskrepanz bei der berühmten Formulierung »Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$...«, obwohl der Kundige schon die konventionelle Signalwirkung am Buchstaben ε erkennt. Im Alltag ist es die Verschiedenheit der Begriffe und eine leichte Phrasierung, die hier helfen: »Für jede Krankheit gibt es eine passende Behandlung« ist vielleicht noch ein Wunschtraum, aber der Satz »Es gibt eine Behandlung, die bei jeder Krankheit hilft« kaum glaubwürdig. In der Mathematik sind ε und δ beides eben nur Zahlen.

Dazu kommen noch die (zum Teil vermeidbaren) Nominalisierungen (»Aus der Orthogonalität zweier Vektoren folgt ihre lineare Unabhängigkeit«) und die Schachtelsätze: »Eine Funktion f heißt im Punkt x_0 differenzierbar, wenn es eine Zahl k gibt, so dass es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ gibt, so dass aus der Bedingung $|x - x_0| \leq \delta$ folgt $|f(x) - f(x_0) - k(x - x_0)| \leq \varepsilon|x - x_0|$ «. Ist die Zahl k eindeutig bestimmt, so setzt man $f'(x_0) := k$.

In einer noch stärker formalisierten Sprache könnte der Bedingungssatz etwa so geschrieben werden: $\exists k. \forall \varepsilon. \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta. \delta > 0 \wedge \forall x. |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) + f(x_0) - k(x - x_0)| \leq \varepsilon |x - x_0|$.

Es sei darauf hingewiesen, dass kausale Bestimmungen, vor allem die Fragen Warum? und Wieso? ebenfalls zu Mathematik führen. Das Modell kausaler Abläufe (»Wenn die Sonne scheint, wird es wärmer«) spiegelt sich im mathematischen Beweis wider. Gewiss sind hier die Gründe nicht physikalischer Natur oder empirisch abgesichert, aber logischer Natur und dann für den Mathematiker eine Freude, für andere eher abschreckend. »Wenn eine Zahl n^2 gerade ist, so ist auch ihr Quadrat n^2 gerade.« Der Alltag gibt aber immer wieder Anlass zur Vermischung von Implikation und Äquivalenz. »Wenn morgen die Sonne scheint, gehen wir ins Schwimmbad.« Es ist anzunehmen, dass der Badeausflug entfällt, wenn die Sonne nicht scheint.

Die Bedeutung der Sprache in der Mathematik wird auch bei einer Analyse des *Modellierens* deutlich. Folgt man etwa dem Lösungsplan nach Blum 2006, so werden vier Schritte unterschieden: Aufgabe verstehen – Modell erstellen – Mathematik benützen – Ergebnis entdecken. Eine Aufgabe verstehen bedeutet, die in einer Sprache kodierte Information zu entschlüsseln. Die Erstellung eines Modells verlangt die Übersetzung in das mathematische Register, mit welchem dann gearbeitet wird, also Mathematik benutzt wird. Das Ergebnis erklären, erfordert sodann die Rückübersetzung in eine mit nur wenigen fachsprachlichen Elementen angereicherte Sprache.

5. Epilog

In den Bildungsstandards für den Abschluss der Sekundarstufe I Deutschlands werden fünf Leitideen unterschieden: Zahl – Messen – Raum und Form – Funktionaler Zusammenhang – Daten und Zufall. Man erkennt aber, dass in fast all diesen Leitideen die Zahl enthalten ist. Die Leitidee Zahl meint offenbar vor allem geläufige Schulung der Arithmetik. Das Messen ist ohne Zahl gar nicht möglich! Funktionale Zusammenhänge sind auf diesem Niveau vor allem Zusammenhänge zwischen Zahlenreihen. Qualitative Aussagen, wie »die Funktion steigt oder fällt«, werden durch Ungleichungen

präzisiert. Daten und Zufall – das ist geradezu die Betrachtung großer Mengen von Zahlen! Raum und Form können durch ihre visuelle Komponente, ästhetische Aspekte und Erfahrungen durch Begreifen und Bewegen eine von der Zahl unabhängige mathematische Einsicht beanspruchen. Wenn man diese Einsichten aber genauer beschreiben will, tritt dann doch die Zahl auf den Plan – Beschreibung der Lage durch Koordinaten, Gleichungen für Kurven und Flächen, Darstellung von Symmetrien und Kongruenzabbildungen durch Matrizen (hier werden Modelle andersartiger Strukturen sichtbar, nämlich Gruppen!).

Mathematisches Denken ist die Basis unserer technologisch orientierten Kultur. Es wurde versucht darzustellen, wie aus den Anfängen des Zahlbegriffs durch Hinzunahme verschiedener Strategien und Entwicklung einer geeigneten Sprache die Mathematik entstanden ist. Verstehen der Sprache der Mathematik ist somit ein Beitrag zur Bildung. Die Wichtigkeit dieser Sprachform einzuschätzen, heißt auch ihre Grenzen zu erkennen. In einer Zeitschrift las ich den Satz »Die Erde dreht sich zärtlich« (Dorothee Sölle). »Die Erde dreht sich«. Das ist Physik und vieles ist daraus in Mathematik beschreibbar. Das Adverb »zärtlich« entzieht sich der Rationalität. Es kann spirituelle Erfahrung ausdrücken oder schlichter die Hoffnung vieler Menschen auf eine gute Zukunft, zu der auch die Mathematik etwas beitragen könnte.

Literatur

- BLUM, WERNER (2006): Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht – Herausforderungen für Schüler und Lehrer. In: Büchter, Andreas et al.: *Realitätsnaher Mathematikunterricht – Vom Fach aus und für die Praxis. Festschrift für Hans-Wolfgang Henn zum 60. Geburtstag*. Hildesheim: Franzbecker, S. 8-23.
- GALILEI, GALILEO (1623): Il saggiaiore. In: *Opere di Galileo Galilei a cura di Franz Brunetti*. Volume Primo. Torino: Unione Tipografica – Editrice Torinese 1964.
- HARRISON, JOHN (2008): Formal Proof – Theory and Practice. In: *Notices of the AMS* 55, S. 1395-1406.
- HEISENBERG, WERNER (1955): *Das Naturbild der heutigen Physik*. Hamburg: Rowohlt.
- MAIER, HERMANN; SCHWEIGER, FRITZ (1999): Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Unterricht. In: Reichel, Hans-Christian (Hrsg.): *Mathematik für Schule und Praxis*. Bd. 4. Wien: ÖBV & HPT.
- SCHWEIGER, FRITZ (2008): The grammar of mathematical symbolism. In: Barbin, Evelyne; Stehlíková, Nad'a; Tzanakis, Constantinos (Ed.): *History and Epistemology in*

Mathematics Education. Proceedings of the 5th European Summer University. Plzen: Vydavatelský servis, S. 423–430.

DERS. (2005): Sprache und Mathematik. In: Maaß, Jürgen; Langer, Ulrich; Larcher, Gerhard (Hrsg.): *Kepler Symposium. Philosophie und Geschichte der Mathematik.* Linz: Universitätsverlag Rudolf Trauner, S. 38–50.

TROPFKE, JOHANNES (1980): *Geschichte der Elementarmathematik. Bd. 1: Arithmetik und Algebra.* 4. Auflage vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel, Karin Reich, Helmuth Gericke. Berlin-New York: Walter de Gruyter.

Peter Gallin, Urs Ruf

Von der Schüler- zur Fachsprache*

Authentische Begegnungen zwischen Lernenden und Unterrichtsstoffen kommen zustande, wenn die Annäherung an den Inhalt jeweils so erfolgt, dass sie der Verfassung der Lernenden entspricht. Zwischen der singulären Position des Lernenden und der regulären Welt des Fachs liegt immer ein Spannungsfeld, aus dem alle Lernprozesse ihre Dynamik beziehen.¹

Wer ein Fachgebiet durchschaut und beherrscht, kann sich in den unterschiedlichen Sprachebenen sicher bewegen. Er vermag reguläre Formalisierungen jederzeit bis ins Fundament der singulären Sprech- und Sehweisen zurückzuführen und ist umgekehrt in der Lage, Probleme aus seiner unmittelbaren Umgebung wahrzunehmen und ihre fachlichen Aspekte über alle Abstraktionsstufen bis hin zur fachlichen Präzision zu verdichten. Diese sprachliche und fachliche Beweglichkeit darf man allenfalls als hochgesteckte Zielvorstellung eines Fachstudiums fordern, nicht aber als unreflektierte Grundvoraussetzung für den Fachunterricht in der Schule. Der Lehrende muss also über diese Beweglichkeit verfügen, der Lernende muss sie nach und nach erwerben.

Konkret bedeutet das: Die Schülerinnen und Schüler reden in ihrer Sprache und auf dem für sie erreichbaren Abstraktionsniveau über Fachliches; der Lehrkraft obliegt die Aufgabe der Übersetzung und Interpretation. Diese einfache und naheliegende Forderung an den Unterricht wird in der heutigen Realität des Schulalltags mit regelmässiger Hartnäckigkeit missachtet: Normalerweise setzt die Lehrperson die Sprachebene fest, in der sie den Stoff darbieten und verhandeln will, und die Schülerinnen und Schüler sind stillschweigend dazu verpflichtet, die Aufgabe der Interpretation und der Übersetzung in ihre eigene Sprache zu übernehmen.

1. Sprache des Verstehens und Sprache des Verstandenen

In der persönlichen und singulären Auseinandersetzung mit dem Stoff erfährt man die eigenen Möglichkeiten und Grenzen, im erzählenden Austausch mit anderen gestaltet man seine Erkenntnisse und erweitert seinen Horizont. So arbeitet man gemeinsam an einer Sprache, die zwar mehr und mehr in die Welt des Regulären hineinwächst, trotzdem aber auch etwas ganz Persönliches bleibt. Martin Wagenschein nennt sie die Sprache des Verstehens und unterscheidet sie scharf von der Sprache des Verstandenen (Wagenschein 1980). Die Sprache des Verstandenen ist ökonomisch und effizient. Aber ein Unterricht, der sich darauf beschränkt, sie zu vermitteln und einzuüben, überlässt Bildung dem Zufall und produziert reihenweise Schädigungen. Der Unterricht muss Schülerinnen und Schüler anleiten, wie sie fachliche Fragestellungen mit ihrem Ich-Zentrum in Verbindung bringen und wie sie mit Hilfe persönlich durchdrungener Begriffe zum Verstehen vordringen können. Hans-Georg Gadamer hat dies so formuliert: »Das erste, womit das Verstehen beginnt, ist, dass etwas uns anspricht: Das ist die oberste aller hermeneutischen Bedingungen.« (Gadamer 1959) Und Martin Wagenschein ergänzt: »Das wirkliche Verstehen bringt uns das Gespräch. Ausgehend und angeregt von etwas Rätselhaftem, auf der Suche nach dem Grund.« (Wagenschein 1986, S. 74) Der Unterricht muss also auch Gelegenheiten für den Austausch der Lernenden untereinander schaffen, damit die singulären Positionen im Gespräch geklärt und zu regulären Einsichten erweitert werden können. Verstehen ereignet sich im Gespräch. Selber mit dem Stoff reden und seine Erlebnisse mit anderen austauschen, das sind die beiden Quellen des Verstehens.

Überall, wo Menschen sich aufmachen, um mit einer Sache Kontakt aufzunehmen und sie in der Vorschau zu erforschen und zu begreifen, ist die Sprache des Verstehens am Werk. Und überall, wo Menschen zurückschauen, um das Erforschte zu sichten, zu ordnen, zu integrieren und für die Zukunft verfügbar zu machen, bewegen sie sich erklärend und definierend in der Sprache des Verstandenen. Das ist in der Wissenschaft nicht anders als in der Schule. Auch die Forscher bedienen sich singulärer, vorläufiger Sprechweisen, wenn

sie in der »Vorschau-Perspektive« in unbekannte Gebiete vorstoßen. Erst wenn alles klar und gesichert ist, entstehen in der »Rückschau« erklärende Publikationen, die sich der regulären Fachsprache bedienen.

2. Singuläre Standortbestimmung, divergierender Austausch, reguläre Einsichten

Gängige Fragestellungen erzeugen keine Unruhe; Probleme dagegen werfen uns buchstäblich aus der Bahn. Charakteristisch für authentische Begegnungen mit Problemen ist die Verunsicherung und der Zwang zur Neuorientierung. Diese Aufgabe des Herausforderns, des Stimulierens oder sogar des Provozierens übernehmen sach- und schülergerechte Kernideen im Unterricht, welche – zu expliziten Aufträgen umgeformt – die Lernenden in einer ersten Phase längere Zeit beschäftigen. Die singuläre Standortbestimmung ist die notwendige Antwort der Lernenden auf die provozierenden Kernideen und sie erfolgt ganz in der Sprache des Verstehens. Damit die Heterogenität innerhalb einer Schulklasse die verschiedenen Antworten nicht schon im Keime erstickt, muss jede Schülerin und jeder Schüler das Protokoll der Auseinandersetzung mit der Kernidee in schriftlicher Form abgeben. Fachliche und sprachliche Normen treten dabei in den Hintergrund. Im Unterricht muss man dieser Phase der Erarbeitung viel Raum und Zeit zumessen. Auf dem Weg zur professionellen Handhabung der regulären Produktions- und Rezeptionsmuster kommt in einer zweiten Phase dem divergierenden Austausch eine Schlüsselrolle zu. Die verschiedenen Arbeitsformen, die den Austausch mit der Lehrperson einerseits unter den Lernenden andererseits ermöglichen, müssen mit Geduld und Beharrlichkeit erprobt und erlernt werden. Alles, was den Lernschritten in den ersten beiden Phasen dient, gehört in den Bereich des internen Sprachgebrauchs, hat Werkstattcharakter und findet seinen Niederschlag im Reisetagebuch oder Lernjournal; hier gelten die Regeln der Sprache des Verstehens. Alle schriftlichen und mündlichen Formen der regulären Einsichten hingegen, die den Charakter von Auftritten vor dem Publikum haben – also Prüfungen, Referate, szenische

Darstellungen, Texte für Leser, Theorien usw. – nennen wir Produkte; sie orientieren sich an der Sprache des Verstandenen.

3. Lernen auf eigenen Wegen

Das zentrale Anliegen des Konzepts »Lernen auf eigenen Wegen« besteht darin, die Lernenden zum Aufbau regulärer Kenntnisse und Fertigkeiten anzuleiten, ohne sie dadurch von ihrer singulären Basis zu entfremden. Am Anfang eines Lernprozesses stehen Kernideen, die das ganze Stoffgebiet in vagen Umrissen einfangen und als attraktives Gegenüber die Lernenden zum sachbezogenen Handeln herausfordern. Der generelle Auftrag lautet: »Dokumentiere deinen Lernweg!« Das ferne Ziel des Lernwegs ist der Überblick über das Sachgebiet in der Rückschau und die Beherrschung der zugehörigen, selbstständig aufgebauten Algorithmen und Kenntnisse. Als Orientierungshilfen für Lehrpersonen dienen folgende Fragen, aus denen Aufträge für die Lernenden geformt werden können:

- Wie wirkt dieser Stoff auf mich? (Vorschau)
- Wie verhalte ich mich beim Problemlösen? (Weg)
- Kann ich mit meinem Wissen und Können vor anderen bestehen? (Produkt)
- Was habe ich erreicht? (Rückschau)

4. Kernidee und Reisetagebuch

Die schriftliche Arbeit an Aufträgen im Reisetagebuch erlaubt es, die Lernenden mit großen und zusammenhängenden Stoffgebieten in der Form von Kernideen zu konfrontieren und ihnen genügend Raum für authentische Begegnungen und für singuläre Standortbestimmungen anzubieten. Je nach Standort, den ein Lernender der Sache gegenüber einnimmt, und je nach Intensität seiner Interaktionen wird er beim Lernen mehr oder weniger lange Wege beschreiten. Jeder kann sich allerdings nur auf die ihm gemäße Weise entwickeln, wenn ihm der Unterricht spezifische Arbeitsinstrumente und adäquate Beurteilungskriterien anbietet. Leistungen im Reisetagebuch entstehen unter anderen Bedingungen und müssen anders beurteilt werden als Leistungen, die sich an ein