



Robert Sturm

3D-FRAKTALE

Stereoskopische Visualisierung
von selbstähnlichen
geometrischen Mustern

Vorwort

In zahlreichen Monografien, welche vom Autor in der näheren Vergangenheit publiziert worden waren, konnte bereits mehrfach auf das Potenzial der Stereoskopie in verschiedenen wissenschaftlichen Disziplinen hingewiesen werden. So vermag das optische Verfahren zur Herstellung von Raumbildern in den Naturwissenschaften eine ebenso breite Anwendung wie in der Archäologie, in der Kunstgeschichte oder in der Architektur zu finden. Anhand zahlreicher Forschungspublikation (siehe auch Literaturverzeichnis) konnte der Nachweis dafür erbracht werden, dass das Raumbild seinen sinnvollen Beitrag zur Klärung diverser wissenschaftlicher Fragestellungen leisten kann. Noch besteht jedoch keine Klarheit darüber, wo das stereoskopische Verfahren in zehn Jahren stehen wird und ob ihm bis dahin eine dauerhafte Etablierung im wissenschaftlichen Methodenkanon gelungen sein wird. In der Vergangenheit konnte demonstriert werden, dass die Stereoskopie auch in der Mathematik eine gewisse Daseinsberechtigung besitzt, wobei sich insbesondere die Chaostheorie und Fraktalgeometrie als vorzügliche Anwendungsbereiche herauszukristallisieren scheinen. Im vorliegenden Buch soll im Detail auf das Zusammenwirken zwischen fraktaler Geometrie und räumlicher Visualisierung eingegangen werden. Dabei wird eine klare Herausarbeitung der Tatsache, wonach das Raumbild zusätzliche Information zum Fraktalgebilde zu liefern vermag, angestrebt. Die Monografie unternimmt den ambitionierten Versuch, einer vorwiegend mathematisch gebildeten Leserschaft die Anwendung einer physikalischen Methode und deren

Zweckmäßigkeit nahezubringen. Natürlich richtet sich die Publikation nicht nur an jene Menschen, welche in direktem Bezug zur Mathematik stehen, sondern auch an all jene Leser und Leserinnen, die von der Faszination des 3D-Bildes gepackt werden.

Das Buch gliedert sich in einen Einleitungsteil, in welchem eine kurze Beschreibung der Grundprinzipien der Fraktalgeometrie erfolgt, ein Kapitel zu den räumlichen Fraktalen, einen Methodenteil und den Bildkatalog. Letzterer umfasst eine Vielzahl an Bildbeispielen mit entsprechenden räumlichen Darstellungen unterschiedlicher Fraktalgebilde, für deren Betrachtung eine Rot-Cyan-Farbbrille heranzuziehen ist. Diese kann im Internet zu einem niedrigen Stückpreis bezogen oder alternativ auch selbst hergestellt werden.

Robert Sturm, Herbst 2020

Es gibt nichts Anthropomorpheres als die gerade Linie.

Paul Valéry

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

- 1.1 Der Begriff des Fraktals**
- 1.2 Verschiedene Fraktale und ihre Erzeugung**
- 1.3 Anwendungsbereiche von Fraktalen**
- 1.4 Nichtlineare Systeme und Chaos**

Kapitel 2

Räumliche Fraktale

- 2.1 Einige einleitende Bemerkungen**
- 2.2 Klassifikation räumlicher Fraktale**

Kapitel 3

3D-Visualisierung

- 3.1 Grundprinzipien der Steroskopie**
- 3.2 Herstellung von Stereobildern**
- 3.3 Betrachtung von Stereobildern**

Kapitel 4

3D-Fraktale - Beispiele

Resümee

Literatur

1 Einleitung

1.1 Der Begriff des Fraktals

Der Begriff Fraktal leitet sich im Allgemeinen von den lateinischen Wörtern *fractus* (gebrochen) und *frangere* ([in Stücke zer-]brechen) ab und geht auf den französischen Mathematiker Benoît Mandelbrot zurück. Er repräsentiert bestimmte natürliche oder künstliche Gebilde sowie geometrische Muster unterschiedlicher Komplexität, welche sich durch eine nicht der Menge der Ganzen Zahlen zugehörige Hausdorff-Dimension (s. u.) auszeichnen. Das Auftreten der gebrochenen Dimension spiegelt sich gerade im Namen der einzelnen Objekte wider. Fraktale sind durch einen hohen Grad der Selbstähnlichkeit (Skaleninvarianz) charakterisiert, was bedeutet, dass sie unabhängig vom verwendeten Maßstab stets dieselben Muster aufweisen [1-5].

Jenes Teilgebiet der Mathematik, welches sich mit Fraktalen und deren Gesetzmäßigkeiten beschäftigt, wird gemeinhin als fraktale Geometrie bezeichnet. Diese steht in enger Verbindung mit zahlreichen anderen mathematischen Bereichen (z. B. dynamische Systeme, Funktionentheorie, Berechenbarkeitstheorie), die allesamt Unterstützung bei der Erstellung diverser Definitionen und Formalismen bieten. Die fraktale Geometrie gilt als Erweiterung der klassischen euklidischen Geometrie, da sie die dort zur Anwendung gebrachten natürlichen Dimensionen durch die schon erwähnten gebrochenen ergänzt [6-10].

Um ein besseres Verständnis von der fraktalen Dimension einerseits und der Selbstähnlichkeit andererseits zu

erlangen, bedient man sich zunächst der Grundlagen der traditionellen Geometrie. Dort nämlich wird eine Linie als eindimensional, eine Fläche als zweidimensional und ein Körper oder räumliches Gebilde als dreidimensional angesehen. Im Falle einer fraktalen Menge, wie sie beispielsweise durch die Mandelbrotmenge oder Julia-Menge (Abb. 1) repräsentiert wird, stößt die unmittelbare Angabe der Dimensionalität an ihre Grenzen. Eine in großer Zahl auf ein fraktales Linienmuster angewandte Rechenoperation hat nämlich eine kontinuierliche Füllung der Zeichenfläche mit entsprechenden Linien zur Folge, wodurch sich letztendlich ein eindimensionales Gebilde (Linie) einem zweidimensionalen (Ebene) annähert [1, 2].

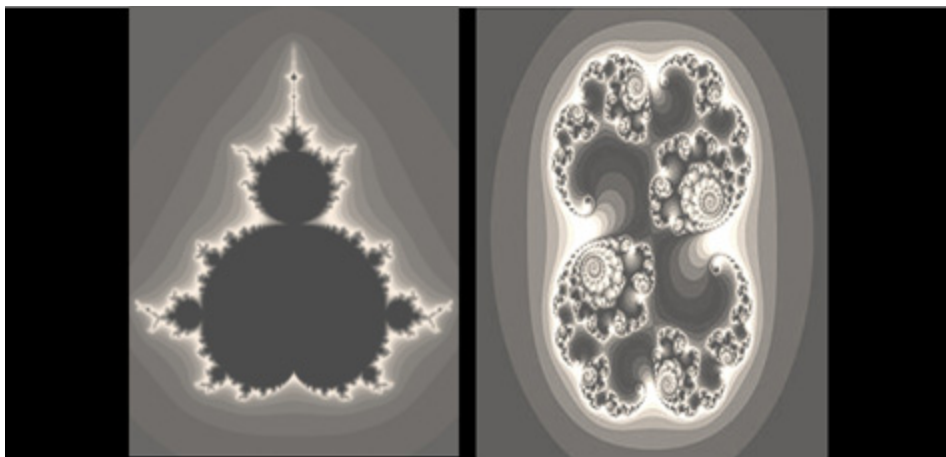


Abb. 1. Beispiele für fraktale Mengen mit gebrochener Dimensionalität: links - Mandelbrotmenge, rechts - Julia-Menge.

Bereits Benoît Mandelbrot stellte in seiner im Jahre 1975 erschienenen Monografie zu den Fraktalen fest, dass die auf Basis von fraktalen Mengen konstruierbaren geometrischen Gebilde in der Regel eine nicht-ganzzahlige Dimension (fraktale Dimension) aufweisen. Zur Präsentation einer Grunddefinition für das Fraktal ist es zunächst notwendig, sich etwas eingehender mit den Begriffen der Hausdorff-Dimension und Lebesgue-Überdeckungsdimension auseinanderzusetzen. Die nach Felix Hausdorff benannte

Dimension bietet dem Mathematiker die Möglichkeit, beliebigen metrischen Räumen eine Dimension zuzuordnen. Bei einfachen geometrischen Objekten zeichnet sich ihr Wert durch eine Übereinstimmung mit dem des gewöhnlichen Dimensionsbegriffs aus. Die Hausdorff-Dimension vermag jedoch auch rationale oder irrationale Werte anzunehmen. Für eine vereinfachte Definition der Größe betrachtet man die Anzahl N der Kugeln mit dem Radius R , die mindestens erforderlich ist, um eine Punktmenge endlicher Ausdehnung im dreidimensionalen Raum abzudecken. Diese Mindestzahl wird durch eine Funktion $N(R)$ des Radius dargestellt, wobei folgender Zusammenhang gilt:

$$N(R) \sim 1/R^D.$$

In der obigen Formel steht D gerade für die Hausdorff-Dimension, welche sich wie folgt explizieren lässt:

$$D = -\lim_{R \rightarrow 0} (\log N / \log R).$$

Betrachtet man zunächst eine gewöhnliche endliche Kurve, so wächst die Zahl der Kugeln umgekehrt proportional zum Kugelradius, womit sich die Hausdorff-Dimension $D = 1$ ergibt. Im Falle einer gewöhnlichen endlichen Fläche steigt die Zahl der Kugeln hingegen proportional zu $1/R^2$ an, woraus letztendlich $D = 2$ resultiert [5-8].

Setzt sich ein geometrisches Objekt aus n disjunkten Teilobjekten zusammen, welche im Maßstab $1 : m$ verkleinerte Kopien des Gesamtobjektes repräsentieren, erhält man für die Hausdorff-Dimension folgenden mathematischen Ausdruck:

$$D = \log n / \log m.$$

Besitzen die n Teilobjekte unterschiedliche Größe, so lässt sich D durch die Gleichung

$$1/m_1^D + 1/m_2^D + \dots + 1/m_n^D = 1$$

darstellen, in welcher $1/m_i$ ($i = 1, \dots, n$) den einzelnen Maßstäben entspricht. Aufgrund der Verwendung von ähnlichen Teilobjekten ist hier auch oftmals der Begriff der Ähnlichkeitsdimension gebräuchlich [11, 12].

Einige Beispiele zur Berechnung der Hausdorff-Dimension auf Basis des oben vorgestellten Prinzips der Teilobjekte sind in Abb. 2 zusammengefasst. Ein gleichseitiges Dreieck, das sich aus 9 ebenfalls gleichseitigen Dreiecken mit $1/3$ Seitenlänge zusammensetzt, besitzt den obigen Überlegungen zufolge die Hausdorff-Dimension $D = \log 9 / \log 3 = 2$. Die Koch-Kurve, bei der sich ein Segment jeweils aus 4 im Maßstab $1 : 3$ verkleinerten linearen Teilobjekten zusammensetzt, verfügt über eine Hausdorff-Dimension $D = \log 4 / \log 3 = 1,2618595$ [9, 10].

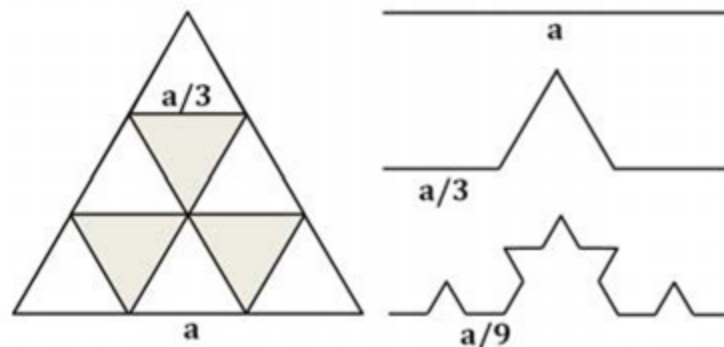


Abb. 2. Einfache Beispiele zur Berechnung der Hausdorff-Dimension auf der Basis von n disjunkten Teilobjekten mit dem Maßstab $1 : m$. Links - Dreieck, rechts - Koch-Kurve.

Richtet man sein Augenmerk in weiterer Folge auf reale Strukturen, wie sie beispielsweise in biologischen Systemen auftreten, so erhält die Frage der fraktalen Dimension eine neue Qualität. Dieser Sachverhalt lässt sich etwa am Beispiel diffusionsgesteuerter Wachstumsprozesse zur Darstellung bringen. Gemäß dem von Witten & Sander entwickelten Algorithmus wird ein Teilchen im Ursprung

eines Koordinatensystems fixiert. Ein zweites Partikel wird nun von einem zufällig ausgewählten Punkt, welcher sich auf einem um den Ursprung gezogenen Kreis befindet, entlang eines Zufallspfades transportiert, bis es den Keim im Ursprung erreicht. Dieser zufallsbasierte Diffusionsprozess wird beliebig oft wiederholt. Während sich die ersten Partikel noch an den verschiedenen Seiten des Keims anzulagern vermögen und dadurch entsprechende Fortsätze ausbilden, bleiben spätere Partikel an diesen Fortsätzen hängen, so dass sich letztendlich eine dendritische Struktur ergibt (Abb. 3) [7, 9-12].



Abb. 3. Fraktale Dimension komplexerer zweidimensionaler Strukturen. Links - Witten-Sander-Modellcluster, Mitte - Zählmethode zur Berechnung der fraktalen Dimension, rechts - Ausgleichsgerade zur Ermittlung von **D**.

Der durch den oben geschilderten Zufallsprozess entstehende Cluster zeichnet sich insofern durch eine Skaleninvarianz aus, als durch zahlreiche Ausschnittsvergrößerungen hindurch statistisch ähnliche Äste auftreten. Für die Berechnung der fraktalen Dimension **D** gelangt in der Regel das sogenannte box-counting-Verfahren zur Anwendung. Als mathematische Basis für diese Methode gilt der für Fraktale typische Zusammenhang zwischen Masse **M** (Zahl der Partikel) eines (Flächen-)Ausschnitts der Größe **R** (konkret: konzentrische Kreisscheiben um den Ursprung mit dem Radius **R**) und der Dimension **D** ($M \sim R^D$). Diese Relation weist in der Regel eine Unabhängigkeit von **R** auf. In weiterer Folge wird die