

Carsten Müller

# Tangram



25 Jahre auf den Spuren der sieben Teile des Siebenschlau

## **über den Autor:**

Dr. Carsten Müller, Jahrgang 1957, Sternbild Stier, seit fast 40 Jahren glücklich verheiratet, zwei wunderbare Töchter und ebensolche Enkel, Mathematiklehrer, Schulleiter, vielseitig interessiert und stets neugierig geblieben, versucht auch im öffentlichen Raum Mathematik zu den Menschen zu bringen, zum Beispiel durch den Mathematikweg durch Jena und ein mathematisches Gesicht einer außergewöhnlichen Schule

für Daniel, Martin, Carla und Sarah Sophie

## **Inhaltsverzeichnis**

1. Der Anfang Vorwort
2. Das Ende vom Anfang Geometrische Ideen
3. Der Anfang der Mitte Schülerarbeiten
4. Die Mitte Die großen Faltblätter
5. Das Ende der Mitte weitere Ideen
6. Der Anfang vom Ende Tangram in Alltagsbildern
7. Das Ende Danksagung und Literatur

## ***Vorwort***

Im Jahr 1990 wurde ich Schulleiter einer sehr bemerkenswerten Schule, die sich der Förderung von interessierten, begabten und teils hochbegabten Schülerinnen und Schülern auf mathematisch-naturwissenschaftlich-technischem Gebiet damals schon seit mehr als 25 Jahren verschrieben hatte. In dem recht kleinen Schulgebäude am Schreckenbachweg in Jena war eine Vitrine im mittleren Flur vorhanden, in der ich zur Anregung für die Schüler einige mathematische Phänomene darstellen wollte. Darunter war zum Beispiel die Zahlenfolge  $n^2 + n + 41$ , die ich für  $n \geq 0$  aufgelistet und dabei alle Primzahlen markiert hatte. Das waren dann sichtbar mehr als zwei Drittel aller Zahlen. Daneben hatte ich als geometrische Aussage genau 99 Figuren aus den sieben Teilen des Tangramspiels gezeichnet, die eine gewisse Eigenschaft verbunden hat. Es handelt sich bei diesen  $(100 - 1)$  Polygonen um eine Zusammenstellung von Figuren, die  $n$ -Ecke darstellten, die  $(n-4)$ -fach konkav waren. Damit sind einfachkonkave Fünfecke, zweifachkonkave Sechsecke, dreifachkonkave Siebenecke und vierfachkonkave Achtecke gemeint. Man überlegt sich leicht, dass es ab  $n = 9$  keine  $n-4$  konkaven Tangrams geben kann, da die Innenwinkelsumme von  $(n-2) \cdot 180^\circ$  bei  $n-4$  konkaven Winkeln  $\geq 225^\circ$  und den übrigen Winkeln  $\geq 45^\circ$  überschritten würde. Wie ich auf diese Idee gekommen war bzw. aus welchem Motiv heraus ich gerade diese Menge von Tangramfiguren thematisierte, ist mir aus der Entfernung von 25 Jahren nicht mehr erklärlich. Ich hatte vermutlich die Hoffnung, eine Motivation dafür zu schaffen, dass es mindestens 100 solche Figuren geben würde.

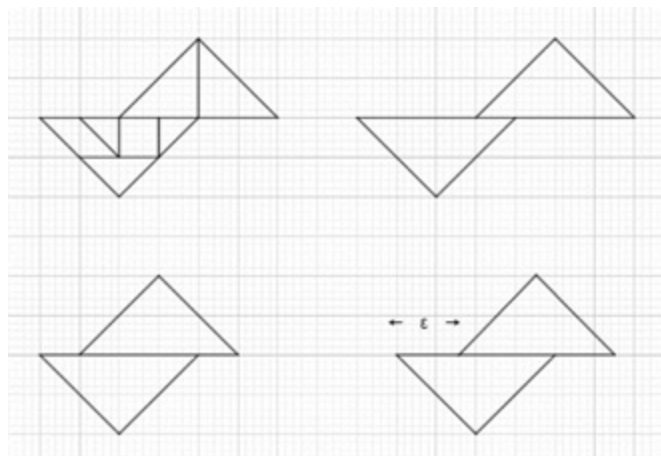
Die Figuren von damals habe ich noch aufgehoben. Nach den Untersuchungen, die noch in diesem Büchlein thematisiert werden, ergaben sich später 20 Fünfecke, 52 Sechsecke, 34 Siebenecke und 11 Achtecke, also insgesamt 117  $n-4$  konkave Gitterfiguren.

Dies ist eines der Ergebnisse, die sich über eine Vielzahl von Jahren und zehn Schülerprojekten ergeben haben. Vier Schülerinnen und Schüler meines Gymnasiums haben sich sehr intensiv mit dem Spiel „Tangram“ beschäftigt. Sehr unterschiedliche Fragestellungen haben die Schüler betrachtet und dabei sehr kreative Ansätze und Lösungen gefunden. Anfänglich ausschließlich auf Gitterfiguren beschränkt, wurden später auch Nichtgitterpolygone betrachtet und auch Figuren, die aus zwei Tangramsätzen bestehen. Es war mir immer eine große Freude, nicht nur die Projekte zu begleiten, sondern die Begeisterung und das Engagement der Schüler zu sehen, die sich den sieben Teilen verschrieben hatten. Immer wieder neue Ideen wurden geboren, verschiedene Methoden probiert und sehr ausdauernd nach den Lösungen gesucht.

Selbst habe ich in diesem Vierteljahrhundert mitgesucht, die Ergebnisse nachvollzogen, weitere Aufgaben aufgegriffen und ebenso wie die Schüler nach kreativen neuen Ansätzen gesucht. Insgesamt ist daraus eine Fülle von Ergebnissen entstanden, die dieses Büchlein ebenso thematisieren soll wie recht eigenartige Beziehungen des Spiels in das allgemeine Leben hinein. Dies soll am Ende des Buches verdeutlicht werden, wobei in Abschnitt 4 – der Mitte – durch die vier entstandenen großen Faltblätter die bisher gefundenen Tangramfiguren anschaulich gemacht werden sollen.

## ***Geometrische Ideen***

Betrachtet man die sieben Teile des Tangramspiels mit den fünf Dreiecken, dem Quadrat und dem Parallelogramm, so erhellt recht schnell, dass die Figuren Innenwinkel haben, die nur Vielfache von  $45^\circ$  sind. Damit gibt es für Tangrams, die nicht nur an Ecken verbunden sind, sondern immer auch Kantenteile gemeinsam besitzen, nur Innenwinkel von  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $225^\circ$ ,  $270^\circ$  und  $315^\circ$ . Schränkt man nun die Figuren dahingehend ein, dass es sich um Gitterfiguren handeln soll, stellt man fest, dass damit nur endlich viele Figuren in Betracht kommen.

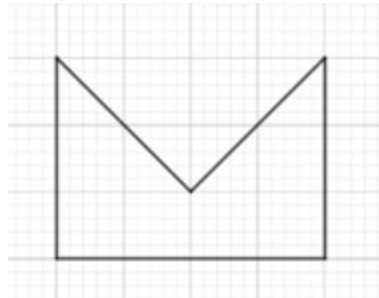
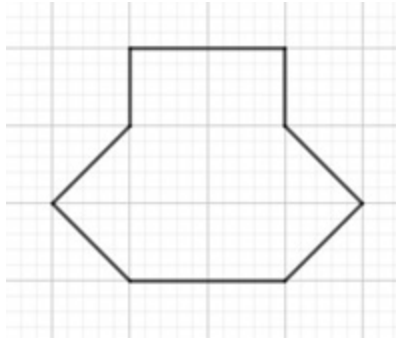


Dies zeigt die einfache Betrachtung der Bilder der zweifachkonkaven Sechsecke. Da jeweils die beiden Teildreiecke in die Tangramteile zerlegbar sind, kann man, wie im Bild unten rechts angedeutet, eine stetige Vielfalt von solchen Tangramfiguren erzeugen. Lässt man allerdings die Ecken der einzelnen Teile nur auf Gitterpunkten zu, so zeigen sich als einzige Möglichkeiten für diese Art zweifachkonkaver Sechsecke die drei anderen Figuren in der Abbildung links.

Nach der Betrachtung von konkaven n-Ecken entstand die Idee, auch Tangramfiguren mit Loch, sogenannte „Tangramringe“, zu betrachten. Dabei war es besonders interessant, solche Figuren zu untersuchen, die als Außenfigur konvex sind. Bemerkenswerterweise ergab sich dabei eine Parallele zu den konvexen Figuren durch die Anzahl 13! Als interessante Eigenschaften erwiesen sich auch die Umfänge der Figuren, die „Gleichseitigkeit“, die Symmetrie der Figuren, ihr Durchmesser, die Minimalzahl verschiedener Innenwinkel neben den „einwinkligen“ konvexen Figuren Quadrat und Rechteck, Tangramringe mit „großen Löchern“ oder auch die so genannten „Fastbrezeln“, von denen es genau elf gibt. Zu verschiedenen Details bei der Suche nach den Figuren wird an der entsprechenden Stelle im vierten Abschnitt berichtet. Beispielhaft sollen zur Illustration der wunderbaren geometrischen Ideen bereits hier einige „Einzelgänger“ vorgestellt werden.

Unter dem Durchmesser eines Polygons versteht man die Länge der längsten Strecke, die zwei Punkte des Polygons verbindet. Das sind in natürlicher Weise zwei Eckpunkte. Damit ist wegen der Gitterpunkteigenschaft diese Zahl die Wurzel aus der Summe zweier Quadratzahlen. Unter den 13 konvexen Figuren gibt es ein Sechseck, das Haus (Seite 101 als Plätzchen), dessen Durchmesser Wurzel 13 ( $= 2^2 + 3^2$ ) ist. Das Quadrat hat einen Durchmesser von 4 (Wurzel 16). Unter den konkaven Gitterfiguren befindet sich genau noch ein Polygon mit diesem zweitkleinsten Durchmesser. Es handelt sich dabei um ein zweifachkonkaves Achteck in Form einer bauchigen Vase.





Bei der Suche nach (einfach)konkaven Gitterfünfecken wurde unter den 20 Figuren genau ein symmetrisches Polygon gefunden, das wegen der ungeraden Eckenzahl achsensymmetrisch mit einer Symmetrieachse durch den konkaven Eckpunkt sein muss.

Sucht man entsprechend den Eckenzahlen weiter, so ergibt sich zuerst, dass es ein- und zweifachkonkave Gittersechsecke zu betrachten gilt. Unter den 52 zweifachkonkaven gibt es neun Figuren, bei denen die beiden konkaven Winkel benachbart sind, darunter auch dasjenige Sechseck mit dem größten Durchmesser Wurzel 72.