

}essentials{

Karl-Heinz Zimmermann

# Abzähltheorie nach Pólya



Springer Spektrum

---

**essentials**

*essentials* liefern aktuelles Wissen in konzentrierter Form. Die Essenz dessen, worauf es als „State-of-the-Art“ in der gegenwärtigen Fachdiskussion oder in der Praxis ankommt. *essentials* informieren schnell, unkompliziert und verständlich

- als Einführung in ein aktuelles Thema aus Ihrem Fachgebiet
- als Einstieg in ein für Sie noch unbekanntes Themenfeld
- als Einblick, um zum Thema mitreden zu können

Die Bücher in elektronischer und gedruckter Form bringen das Fachwissen von Springerautor\*innen kompakt zur Darstellung. Sie sind besonders für die Nutzung als eBook auf Tablet-PCs, eBook-Readern und Smartphones geeignet. *essentials* sind Wissensbausteine aus den Wirtschafts-, Sozial- und Geisteswissenschaften, aus Technik und Naturwissenschaften sowie aus Medizin, Psychologie und Gesundheitsberufen. Von renommierten Autor\*innen aller Springer-Verlagsmarken.

Weitere Bände in der Reihe <https://link.springer.com/bookseries/13088>

---

Karl-Heinz Zimmermann

# Abzähltheorie nach Pólya

 Springer Spektrum

Karl-Heinz Zimmermann  
Institut für Eingebettete Systeme  
TU Hamburg  
Hamburg, Deutschland

ISSN 2197-6708  
essentials

ISSN 2197-6716 (electronic)

ISBN 978-3-658-36497-7

ISBN 978-3-658-36498-4 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-658-36498-4>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Der/die Herausgeber bzw. der/die Autor(en), exklusiv lizenziert durch Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2022

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Iris Ruhmann

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

---

## Was Sie in diesem *essential* finden können

Kurz ausgedrückt, eine Einführung in das mathematische Konzept der Abzählung nach Pólya. Welche kombinatorischen Objekte lassen sich damit effektiv abzählen? Zum Beispiel die Menge aller wesentlich verschiedenen Halsketten mit  $n$  Perlen, wobei jede Perle eine von  $m$  Farben trägt. Wird eine solche Perlenkette durch ein reguläres  $n$ -Eck dargestellt, dann bleibt sie bei Drehung oder Spiegelung des  $n$ -Ecks erhalten. Derartige Transformationen müssen bei der Abzählung berücksichtigt werden, um Mehrfachnennungen zu vermeiden. Hier kommt die Gruppentheorie ins Spiel, die in der Lage ist, solche Transformationen zu beschreiben. Aber dies ist nur die Spitze des Eisberges. Es geht allgemein gesprochen um die Abzählung von kombinatorischen Objekten mit Symmetrien. Die elementare Kombinatorik, die sich bekanntlich mit Kombinationen, Permutationen, Variationen und Partitionen beschäftigt und teilweise schon in der Oberstufe im Rahmen des Stochastik-Unterrichts gelehrt wird, kann hier leider nicht weiterhelfen.

Das vorliegende Büchlein behandelt ausführlich den gefeierten Abzählssatz von Pólya, der eine Abzählung von kombinatorischen Objekten mit Symmetrien auf elegante Weise ermöglicht. Die Darstellung ist in sich abgeschlossen und erörtert insbesondere die notwendigen mathematischen Grundlagen. Motivation und Durchhaltevermögen sind gefragt, aber die Mühe lohnt sich. Am Schluss werden neben dem obigen Halskettenproblem weitere Abzählprobleme behandelt, insbesondere die Abzählung von gefärbten Spielwürfeln, Graphen und Bäumen.

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung in die kombinatorische Abzählung</b> . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Algebraische Grundlagen</b> . . . . .	5
2.1	Gruppen . . . . .	5
2.2	Untergruppen und Homomorphismen . . . . .	13
2.3	Symmetriegruppen . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Zentrale Konzepte</b> . . . . .	29
3.1	Gruppenoperationen . . . . .	29
3.2	Bahnen, Stabilisatoren und Fixpunkte . . . . .	31
3.3	Färbungen . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Abzählung nach Pólya</b> . . . . .	37
4.1	Das Lemma von Burnside . . . . .	37
4.2	Zyklenindexpolynome . . . . .	43
4.3	Der Abzählssatz von Pólya . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Historie und Zusammenfassung</b> . . . . .	57
	<b>Benutzung von Maple<sup>TM</sup></b> . . . . .	61
	<b>Literatur</b> . . . . .	67
	<b>Stichwortverzeichnis</b> . . . . .	69



# Einführung in die kombinatorische Abzählung

# 1

Die Kombinatorik als mathematische Disziplin ist in erster Linie als Kunst des Zählens bekannt. Damit sollen Fragen untersucht werden, die mit „Wie viele“ beginnen. Für die Bewältigung des vorliegenden Büchleins werden grundlegende Konzepte aus der Mengenlehre vorausgesetzt.

## Zählprinzipien

Kombinatorische Überlegungen fußen auf drei fundamentalen Prinzipien der Abzählung:

- Nach dem *Gleichheitsprinzip* sind zwei Mengen  $A$  und  $B$  *gleichmächtig*, geschrieben  $|A| = |B|$ , wenn es eine bijektive Abbildung  $f : A \rightarrow B$  gibt. Beispielsweise sind die Mengen  $\{a, b, c\}$  und  $\{1, 2, 3\}$  gleichmächtig, weil die Abbildung  $f : \{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$  mit  $f(a) = 1$ ,  $f(b) = 2$  und  $f(c) = 3$  bijektiv ist.
- Mit dem *Additionsprinzip* ist die Mächtigkeit der Vereinigung endlicher disjunkter Mengen  $A$  und  $B$  durch die Summe der Mächtigkeiten der beiden Mengen gegeben:

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Es gilt:  $|\{1, 2, 3, 4, 5\}| = |\{1, 2, 3\} \cup \{4, 5\}| = |\{1, 2, 3\}| + |\{4, 5\}| = 3 + 2 = 5$ .

- Das *Multiplikationsprinzip* besagt, dass die Mächtigkeit des kartesischen Produkts endlicher Mengen  $A$  und  $B$  durch das Produkt der Einzelmächtigkeiten festgelegt ist:

$$|A \times B| = |A| \times |B|.$$

Es gilt:  $|\{a, b, c\} \times \{1, 2\}| = |\{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}| = |\{a, b, c\}| \cdot |\{1, 2\}| = 3 \cdot 2 = 6$ .