

2. Auflage

Ingenieurbaustoffe

Hans-Wolf Reinhardt

 **Ernst & Sohn**
A Wiley Company

Contents

Copyright

Vorwort

A Allgemeine Grundlagen

1 Einleitung und Übersicht

2 Mechanische Grundlagen

3 Transportmechanismen

B Stahl

1 Allgemeines zur Festigkeit der Metalle

2 Festigkeitsversuche

3 Stähle für den Stahlbau

4 Betonstähle

5 Spannstähle

6 Anwendung der Festigkeitshypothesen
auf Stahl im Bauwesen

C Aluminium und Aluminiumlegierungen

1 Allgemeines

2 Spannungs-Dehnungs-Linie bei zügiger
Beanspruchung

3 Einfluss der Temperatur auf die Festigkeit

4 Einfluss der Lastdauer auf die Festigkeit

5 Einfluss schwingender Beanspruchung auf
die Festigkeit

6 Anwendung

D Kunststoffe

1 Allgemeines

2 Aufbau

3 Struktur und allgemeines mechanisches Verhalten

4 Rheologische Modelle der verschiedenen Aggregat- und Belastungszustände

5 Prüfung der mechanischen Eigenschaften

6 Anwendungsbeispiele für Kunststoffe im Bauwesen

E Holz

1 Allgemeines

2 Makroskopischer Aufbau

3 Mikroskopischer Aufbau

4 Struktur und chemische Zusammensetzung

5 Feuchtigkeit, Schwinden und Quellen

6 Prüfverfahren für die Festigkeit

7 Festigkeit des Holzes

8 Einflüsse auf die Festigkeit

9 Elastizitätsmodul

10 Orthogonal anisotropes Elastizitätsgesetz

11 Spannungs-Dehnungs-Linie

12 Kriechen, Relaxation

13 Festigkeitskriterien und Bruchmechanik

14 Bruchformen

15 Vergütete Holzprodukte

**16 Berücksichtigung der Holzeigenschaften
in den Normen**

F Beton

1 Definition und Klassen

2 Ausgangsstoffe

3 Junger Beton

4 Festigkeit und Verformung von Festbeton

5 Lastunabhängige Verformungen

6 Last- und zeitabhängige Verformungen

7 Faserbeton

8 Ultrahochfester Beton

9 Konstruktionsleichtbeton

Literatur

Sachverzeichnis

2. Auflage

Ingenieurbaustoffe

Hans-Wolf Reinhardt

 **Ernst & Sohn**
A Wiley Company

Prof. Dr.-Ing. Prof. h. c. Dr.-Ing. E. h. Hans-Wolf Reinhardt
Universität Stuttgart
Institut für Werkstoffe im Bauwesen (IWB)
Pfaffenwaldring 4
70569 Stuttgart

Umschlagbild: Bruchstruktur eines Betonwürfels,
René A. Vonk, Leiderdorp, Niederlande
Bibliografische Information Der Deutschen
Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese
Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie:
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

2., vollständig überarbeitete Auflage

© 2010 Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und
technische Wissenschaften GmbH & Co. KG, Rotherstraße
21, 10245 Berlin, Germany

Alle Rechte, insbesondere die der Übersetzung in andere
Sprachen, vorbehalten. Kein Teil dieses Buches darf ohne
schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form –
durch Fotokopie, Mikrofilm oder irgendein anderes Verfahren
– reproduziert oder in eine von Maschinen, insbesondere
von Datenverarbeitungsmaschinen, verwendbare Sprache
übertragen oder übersetzt werden.

All rights reserved (including those of translation into other
languages). No part of this book may be reproduced in any
form – by photoprint, microfilm, or any other means – nor
transmitted or translated into a machine language without
written permission from the publishers.

Die Wiedergabe von Warenbezeichnungen, Handelsnamen
oder sonstigen Kennzeichen in diesem Buch berechtigt nicht

zu der Annahme, dass diese von jedermann frei benutzt werden dürfen. Vielmehr kann es sich auch dann um eingetragene Warenzeichen oder sonstige gesetzlich geschützte Kennzeichen handeln, wenn sie als solche nicht eigens markiert sind.

Umschlaggestaltung: Sonja Frank, Berlin

Satz: Dörr + Schiller GmbH, Stuttgart

Druck und Bindung: Scheel Print-Medien GmbH, Waiblingen-Hohenacker

Gedruckt auf säurefreiem Papier

ISBN 978-3-433-02920-6

Vorwort

Das vorliegende Buch ist die 2. Auflage des gleichnamigen Vorgängerwerkes, das schon lange vergriffen ist. Das Buch wurde völlig überarbeitet und neue Abschnitte wurden hinzugefügt. Der Inhalt konzentriert sich wiederum auf die mechanischen Eigenschaften der Ingenieurbaustoffe. Im ersten Teil werden grundsätzliche Aspekte besprochen, wie die Festigkeit und die Verformung unter einmaliger und wiederholter Beanspruchung. Neu ist der Abschnitt über Bruchmechanik, der einen kurzen Abriss über linear-elastische und nichtlineare Bruchmechanik darstellt. Neu ist auch ein Abschnitt über Transportmechanismen in porösen Werkstoffen. Dieser Abschnitt wurde aufgenommen, da wesentliche mechanische Aspekte auf den Transport von Flüssigkeiten und Gasen zurückzuführen sind. Man denke hierbei an das Schwinden von Holz und Beton, das Eigenspannungen und Zwangspannungen erzeugen kann. Auch das Kriechen wird vom Wassertransport beeinflusst. Die weiteren Teile behandeln die wichtigsten Ingenieurbaustoffe: Stahl mit Baustahl, Betonstahl und Spannstahl, Aluminium, Kunststoffe, Holz und Beton. Beton wird relativ ausführlich abgehandelt, da der Bauingenieur den Beton im Gegensatz zu anderen Werkstoffen selbst entwirft, herstellt, verarbeitet und anwendet. Außerdem gibt es heute eine Vielzahl unterschiedlicher Betone, die für tragende Teile verwendet werden. Hierzu zählen Normalbeton, Leichtbeton, Faserbeton und Hochleistungsbeton. Die im ersten Teil des Buches in allgemeiner Form behandelten Eigenschaften und Einflüsse werden systematisch auf die einzelnen Baustoffe bezogen und mit Beispielen belegt.

Es zeigt sich, dass die „Werkstoffkonstanten“ keine Konstanten im strengen Sinne sind, sondern dass sie

vielmehr von vielen Parametern abhängen, z. B. von der Temperatur, der Feuchte, der Belastungsgeschwindigkeit, um nur einige zu nennen. Andererseits gibt es auch Parallelen zwischen den Werkstoffen, die es erlauben, die Kenntnis über einen Stoff auf den anderen zu übertragen. Dem konstruktiven Ingenieur müssen diese Abhängigkeiten bekannt sein, will er ein Tragwerk sicher, zuverlässig und wirtschaftlich entwerfen. Dazu gehörte eigentlich auch die Kenntnis der Schadensmechanismen und der Dauerhaftigkeit ebenso wie der Aspekt der Nachhaltigkeit. Diese Aspekte werden in dem Buch jedoch nicht berücksichtigt.

Das Buch entstand aus der jahrzehntelangen Erfahrung in Lehre, Forschung und Praxis. Es wendet sich somit an die Studierenden und die Ingenieure in der Praxis, vor allem an die konstruktiven Ingenieure. Das Buch ist keine Enzyklopädie, es ist vielmehr eine systematische Abhandlung, die die Grundlagen des Stoffverhaltens betont und nicht sosehr auf Vollständigkeit aller Daten Wert legt.

Es ist mir ein Anliegen, allen Mitarbeitern des Instituts für Werkstoffe im Bauwesen und des Otto-Graf-Instituts der Universität Stuttgart und den Personen außerhalb der Universität zu danken, die mir bei der Vorbereitung des Buches behilflich waren. Einige will ich nennen. Das sind Herr Dr. -Ing. Joachim Schwarte, der mich bei der Abfassung der Abschnitte über rheologische Modelle und Bruchmechanik unterstützt hat, Herr Dr. -Ing. Jörg Moersch, der mich beim Abschnitt Betonstähle mit neuesten Informationen versorgte, Frau Dipl.-Bibliothekarin Monika Werner, die jede Literaturstelle fand, die ich suchte, Frau Dipl.-Ing. Judit Tevesz und Herr Dipl.-Ing. Alexander Assmann, die mich vielfältig unterstützten. Ganz besonders möchte ich danken Frau Simone Stumpp, die in bewährter Manier die Textverarbeitung übernahm, und Herrn stud.ing. Máté Gécsek, der die Zeichnungen im Computer realisierte.

Dem Verlag Ernst & Sohn, und hier vor allem Frau Dipl.-Ing. Claudia Ozimek und Frau Ute-Marlen Günther, danke ich für die Betreuung bei der Herausgabe des Buches. Auch danke ich dem Verlag dafür, dass ich im Kapitel Beton einige Teile des Beton- Kalenders verwenden durfte.

Stuttgart, Februar 2010

Hans-Wolf Reinhardt

A Allgemeine Grundlagen

1 Einleitung und Übersicht

Werkstoffe erfüllen ihren Zweck, wenn sie richtig ausgewählt, hergestellt und verarbeitet sind. Sie bestimmen die Tragfähigkeit einer Konstruktion, das Aussehen, den Wärme- und Schallschutz, die Wasserdichtigkeit, den Widerstand gegen aggressive Medien sowie Temperatur- und Feuchtewechsel und dann auch den Preis. Der Ingenieur ist verantwortlich für die richtige Auswahl und Verarbeitung der Werkstoffe, manchmal auch für deren Herstellung (z. B. Beton). Eine gründliche Kenntnis des mechanischen, physikalischen und chemischen Verhaltens ist Voraussetzung für eine optimale Stoffauswahl.

Werkstoffe des Bauwesens oder kurz Baustoffe sind solche, die der Bauingenieur, aber auch der Architekt, in seinen Bauwerken einsetzt. Als Ingenieurbaustoffe werden eingrenzend solche bezeichnet, die vorwiegend für tragende Konstruktionen benötigt werden. Entsprechend werden Stoffe wie Kalk und Gips in diesem Buch nicht behandelt, auch Asphalt, der im Straßenbau verwendet wird, kommt nicht an die Reihe. Der Hauptaspekt, der bei tragenden Konstruktionen wichtig ist, sind die mechanischen Eigenschaften, also Festigkeit und Verformung. Auf diese Eigenschaften wird bei allen behandelten Baustoffen ausführlich eingegangen. Die physikalischen und chemischen Eigenschaften werden soweit behandelt, wie sie für die Gebrauchstauglichkeit und Dauerhaftigkeit von Konstruktionen wichtig sind. Als Beispiel werden die Wärmeleitung und die Diffusion genannt, die für die Entstehung von Eigenspannungen und mögliche Rissbildung entscheidend sind. Die chemisch-physikalischen Grundlagen werden vorausgesetzt, da dies Stoff der höheren Schule ist.

Wenn über Atome, Moleküle und Aggregatzustände gesprochen wird, wird angenommen, dass der Leser soweit nötig Bescheid weiß. Eine andere Frage betrifft die Struktur der Materie, die mit kristallin und amorph angedeutet werden kann und die für die mechanischen Eigenschaften bedeutend ist.

Die Baustoffe sind in ständiger Entwicklung. Die Eigenschaften klassischer Werkstoffe wie Beton und Kunststoff werden durch Modifikation verbessert, z. B. durch Zugabe von Fasern, und neue Stoffe erscheinen auf dem Markt, z. B. Kohlefasern, die im Bauwesen eingesetzt werden können. [Tabelle A.1](#) gibt einen Überblick über die Werkstoffe im Bauwesen. Die anorganisch-mineralischen haben in der Regel eine hohe Druckfestigkeit und eine weitaus geringere Zugfestigkeit und verhalten sich spröde.

Tabelle A.1 Einteilung der Werkstoffe des Bauwesens

nach chemischer Zusammensetzung	nach Herkunft oder Herstellung	Beispiele
anorganisch	natürlich	Lehm, Naturstein, Sand, Kies
mineralisch	künstlich hergestellt	Ziegel, Glas, Zement, Beton, Kalksandstein
metallisch	natürlich	keine
	künstlich hergestellt	Eisen, Stahl, Aluminium, Blei, Zink, Titan
organisch	natürlich	Holz, Reet, Bambus, Sisalfasern
	künstlich hergestellt	Kunststoffe, Gummi, Reaktionsharze

Mit Ausnahme von Glas und einigen Natursteinen sind sie porös. Von der Porenmenge und der Porengrößenverteilung hängen Stofftransporte durch Permeabilität, Kapillarität und Diffusion ab, die wiederum für den Widerstand gegen klimatische Einflüsse entscheidend sind. Metallische Werkstoffe zeichnen sich durch hohe Zug- und Druckfestigkeit und große Verformbarkeit (Duktilität) aus. Im

Gegensatz zu mineralischen Baustoffen sind sie gute elektrische und thermische Leiter. Die organischen Baustoffe sind leichter als die mineralischen und die metallischen und besitzen eine sehr große Bandbreite an mechanischen und physikalischen Eigenschaften.

Nicht aufgenommen in [Tabelle A.1](#) sind die Verbundwerkstoffe, die durch Kombination von Werkstoffen entstehen, z. B. stahlfaserbewehrter Beton (Stahlfaserbeton), Glasfaserkunststoffe (GFK), kunststoffbeschichtete Gewebe, Sperrholz, Brettschichtholz oder andere Mehrschichtlamine. Genaugenommen sind die meisten Baustoffe Verbundwerkstoffe, wie z. B. Beton, der aus mehreren Komponenten hergestellt, aber trotzdem als homogen betrachtet wird. Gerade Verbundwerkstoffe besitzen zielgerichtete Modifikationsmöglichkeiten und versprechen große Effizienz.

Für fast alle Baustoffe gibt es nationale DIN-, europäische EN- und internationale ISO-Normen, Richtlinien oder Merkblätter, die den Stand der Technik darstellen. Für Neuentwicklungen gibt das Deutsche Institut für Bautechnik (DIBt) sog. allgemeine bauaufsichtliche Zulassungen heraus, die genauso verbindlich sind wie Normen. In diesem Buch wird öfters auf Normen etc. verwiesen, aber die Normen werden nicht beschrieben. Dieses Buch soll Zusammenhänge und grundlegendes Wissen vermitteln, das bei der Anwendung von Baustoffen wichtig ist, und es soll derzeitige Entwicklungen aufzeigen.

Das Buch ist so angelegt, dass erst allgemeine Eigenschaften und Mechanismen behandelt werden, die nicht nur für einen bestimmten Werkstoff gelten. Dazu zählen mechanische Aspekte wie Festigkeit und Verformung, auch Bruchmechanik wird gestreift, und physikalische Aspekte wie Transportmechanismen, also Permeabilität, Kapillarität und Diffusion. Danach kommen baustoffspezifische Kapitel an die Reihe, in denen die

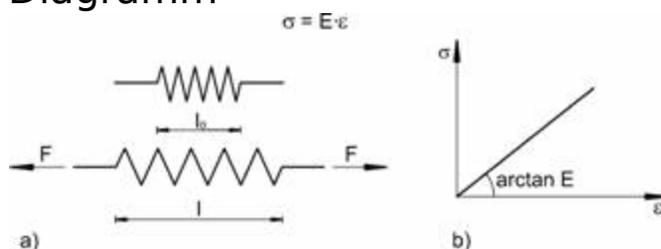
mechanischen und physikalischen Eigenschaften besprochen werden.

2 Mechanische Grundlagen

2.1 Rheologische Modelle

Rheologische Modelle (Rheologie ist die Lehre vom Fließen) oder Materialmodelle sind Veranschaulichungen des Spannungs-Dehnungs-Verhaltens von Werkstoffen. Spannung ist dabei der Quotient aus Kraft F und Querschnittsfläche A , angegeben in $\text{N/m}^2 = \text{Pa}$ oder $\text{N/mm}^2 = \text{MPa}$, und Dehnung ist der Quotient aus Verlängerung $l - l_0$ und Anfangslänge l_0 , also eine dimensionslose Größe. Die Spannung wird mit σ bezeichnet, die Dehnung mit ε . Für das *linear-elastische* Verhalten gilt in der Elastizitätstheorie das Hooke'sche Gesetz $\sigma = E \varepsilon$, wobei E der Elastizitätsmodul ist, mit der Dimension einer Spannung. Veranschaulicht wird das σ - ε -Verhalten durch eine Feder und im σ - ε -Diagramm ergibt sich eine gerade Linie mit der Steigung von E , siehe [Bild A.1](#).

Bild A.1 Linear-elastischer Stoff, Hooke'sche Feder und σ - ε -Diagramm



Bei Entlastung folgt der Verlauf derselben Linie. Wird ein Stab gezogen, so vermindert sich sein Durchmesser um die Querdehnung ε_q . Das Verhältnis zwischen Quer- und Längsdehnung wird Querdehnzahl oder Poissonzahl genannt: $\nu = -\varepsilon_q / \varepsilon$. Mit den zwei elastischen Konstanten

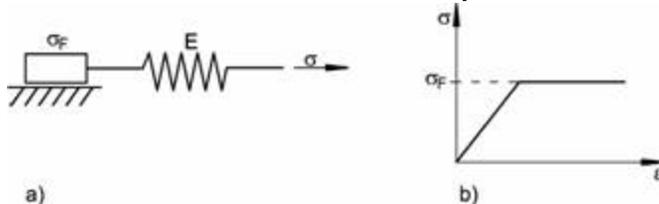
Elastizitätsmodul und Querdehnzahl lässt sich der Schubmodul G (auch mit μ bezeichnet)

$$(1) \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

berechnen, der die lineare Beziehung zwischen Schubspannung und Schubverzerrung herstellt. Neben der Linearität enthält die klassische Elastizitätstheorie noch die Voraussetzung unendlich kleiner Deformationen. Bei den meisten Baustoffen ist diese Bedingung annähernd erfüllt.

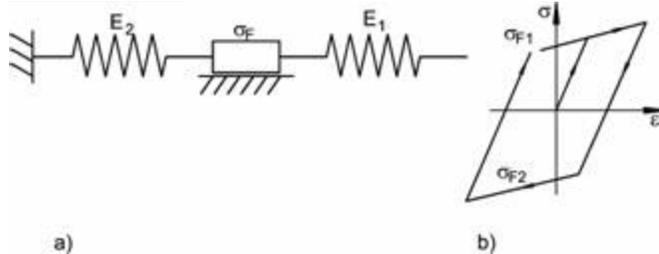
Bei Stählen und anderen weichen Metallen schließt sich an den Bereich des elastischen Verhaltens das *plastische* Verhalten an, das durch unbegrenztes Fließen gekennzeichnet ist. Es kann mit dem St. Venant'schen Reibungselement dargestellt werden, das durch eine Masse auf einer rauhen Oberfläche illustriert wird. Der Reibungswiderstand entspricht der Fließspannung σ_F . Unterhalb dieser Spannung ruht die Masse, d. h. es tritt keine Dehnung auf. Erreicht die Spannung die Fließspannung, bewegt sich der Körper unbegrenzt. Man bezeichnet einen solchen Stoff als starr-plastisch. Dem wirklichen Verhalten von Stahl ist eine Reihenschaltung von Feder und Reibungselement besser angepasst, wie [Bild A.2](#) zeigt.

[Bild A.2](#) Elastisch-plastisches Verhalten, dargestellt mit dem Prandtl-Reuss-Körper



Mit dem Prandtl-Reuss-Körper kann man das plastische Fließen von Stahl beim Überschreiten der Streck- oder Fließgrenze gut beschreiben. Bei größeren Dehnungen tritt eine Verfestigung auf; diese kann in einem Drei-Element-Körper dargestellt werden, wie er in [Bild A.3](#) abgebildet ist.

Bild A.3 Elastisch verfestigender Körper



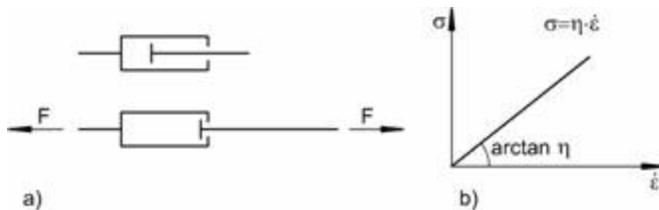
Dabei tritt eine lineare Verfestigung aufgrund der Verformung der Feder E_2 auf. Zur Ermittlung der Gesamtdehnung sind die Einzeldehnungen zu addieren, d. h. die Federn sind in Reihe geschaltet. Charakteristisch für elastisch-plastische Modelle ist, dass die Entlastung genau derselben Steigung wie die Anfangssteigung folgt und dass sich bei vollkommener Entlastung eine bleibende Dehnung einstellt. In [Bild A.3](#) kann auch der sog. Bauschinger-Effekt erkannt werden, der besagt, dass in einem über die Fließgrenze hinaus belasteten Werkstoff bei Umkehrung der Belastungsrichtung (also Zug- in Druckrichtung) eine Erniedrigung der Fließgrenze auftritt, also $\sigma_{F2} < \sigma_{F1}$.

Zeitabhängiges Verhalten wird mit dem Newton'schen Dämpfer nach [Bild A.4](#) dargestellt. Dabei gleitet ein Kolben in einem mit zäher oder viskoser Flüssigkeit gefüllten Zylinder. Die Spannung ist proportional zur Dehngeschwindigkeit $d\epsilon/dt$, η ist die dynamische Viskosität:

$$(2) \sigma = \eta \frac{d\epsilon}{dt}.$$

Viskoses Verhalten kommt z. B. beim Fließen von zähen Kunststoffschmelzen vor. Bei festen Stoffen interessiert das viskoelastische Verhalten, das man aus Kombinationen von Federn und Dämpfern darstellen kann. Zwei Modelle sind dabei besonders wichtig: der Maxwell-Körper und der Voigt-Kelvin-Körper.

Bild A.4 Viskoses Verhalten, dargestellt mit Newton'schem Dämpfer



Beim *Maxwell-Körper* sind eine Feder und ein Dämpfer in Reihe geschaltet. Unter einer Spannung σ_0 tritt eine spontane Dehnung $\varepsilon = \sigma / E$ auf, danach nimmt die Dehnung linear mit der Zeit zu. Den zeitlichen Dehnungszuwachs nennt man Kriechen. Die Gesamtdehnung ist also gegeben durch

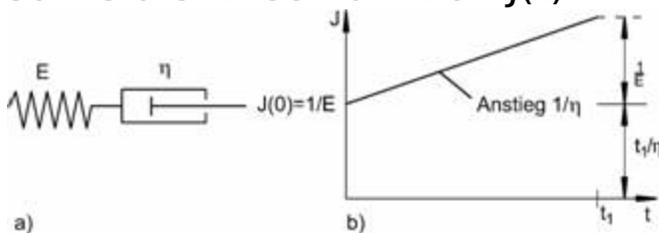
$$(3) \varepsilon(t) = \sigma_0(1/E + t/\eta).$$

Der Ausdruck in der Klammer wird Kriechfunktion $J(t)$ genannt, die also aus einem elastischen und einem viskosen Anteil besteht:

$$(4) J(t) = 1/E + t/\eta.$$

[Bild A.5](#) zeigt die Spannungs- und Dehnungsgeschichte eines Maxwell-Körpers sowie den Verlauf der Kriechfunktion. Dehnung und Kriechfunktion sind beide abhängig von der Zeit. Nach Entlastung bleibt der viskose Anteil als bleibende Dehnung erhalten.

[Bild A.5](#) Viskoelastisches Verhalten eines Maxwell-Körpers sowie die Kriechfunktion $J(t)$



In der Praxis kommt auch der Fall vor, dass eine zeitlich konstante Dehnung auftritt (z. B. Stützensenkung). Differenziert man ([Gl. 3](#)) nach der Zeit, bekommt man

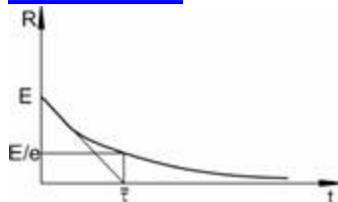
$$(5) \dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E + \sigma/\eta.$$

Mit $\dot{\epsilon} = 0$ und der Anfangsbedingung $\sigma(0) = E \epsilon_0$ hat die Differentialgleichung (5) die Lösung für die Relaxationsfunktion $R(t) = \sigma(t) / \epsilon_0$

$$(6) R(t) = E e^{-Et/\eta}$$

Die Relaxationsfunktion ist in [Bild A. 6](#) grafisch dargestellt. Man erkennt daraus, dass $R(t)$ bei langen Zeiten gegen null geht, d. h. eine zum Zeitpunkt $t = 0$ entstandene Spannung relaxiert vollständig.

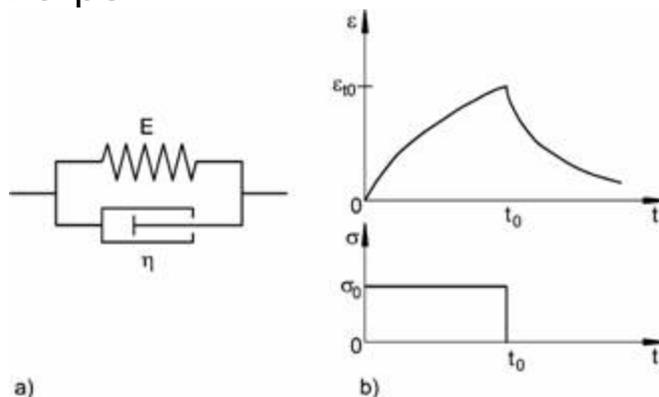
Bild A.6 Relaxationsfunktion des Maxwell-Körpers



Die beiden Grundelemente Feder und Dämpfer können auch parallel geschaltet werden, wie in [Bild A.7](#) dargestellt. Dadurch entsteht der Voigt-Kelvin-Körper, bei dem die äußere Spannung der Summe der Spannungen in den Einzelementen entspricht. Dies bedeutet

$$(7) \sigma = E\epsilon + \eta\dot{\epsilon}$$

Bild A.7 Kriechen und Rückkriechen beim Voigt-Kelvin-Körper



und für den Dehnungsverlauf nach Integration bei einer konstanten Spannung σ_0

$$(8) \quad \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-Et/\eta}) = \sigma_0 J(t).$$

Die Kriechfunktion geht bei langen Zeiten gegen $1/E$, was bedeutet, dass die Dehnung so groß ist, wie sie aufgrund der Feder allein sein muss. Wird ein Voigt-Kelvin-Körper vollständig entlastet, so geht die Dehnung wieder auf null zurück. Der Verlauf wird gegeben durch

$$(9) \quad \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-Et_0/\eta}) e^{-E(t-t_0)/\eta}.$$

In einem Diagramm dargestellt, ergibt sich [Bild A.7](#) für eine konstante Spannung bis zum Zeitpunkt t_0 und anschließender Entlastung.

Sprachlich bedeutet Kriechen die Dehnungszunahme unter Last und Rückkriechen die Dehnungsabnahme bei Entlastung. Da bei vollständiger Entlastung keine bleibende Dehnung auftritt, wird das Verhalten auch verzögert-elastisch genannt. Dies ist der große Unterschied zum Maxwell-Körper, bei dem ja der viskose Anteil als bleibende Dehnung erhalten bleibt. Die Relaxation lässt sich für den Fall einer spontanen und konstanten Dehnung zum Zeitpunkt $t = 0$ nicht darstellen. Tritt jedoch eine Dehnung über eine bestimmte Zeit auf und dauert diese an, so folgt aus ([Gl. 7](#)), dass die dabei auftretende Spannung konstant bleibt, d. h. es findet keine Relaxation statt.

Die Kombination einer Feder mit einem Voigt-Kelvin-Körper führt zum linearen Standardkörper (Poynting-Thomson-Körper). Die Kriechfunktion lautet für diesen [1]

$$(10) \quad J(t) = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} (1 - e^{-t/\tau})$$

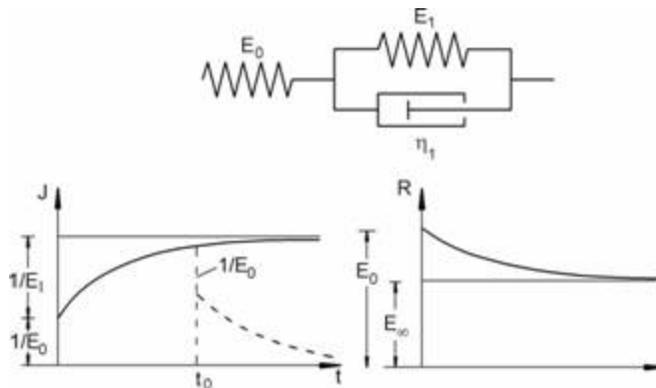
und die Relaxationsfunktion

$$(11) \quad R(t) = E_\infty + E_1 e^{-t/\bar{\tau}}.$$

In [Bild A.8](#) sind die beiden Varianten des Standardkörpers und die Kriech- und Relaxationsfunktion dargestellt. Man erkennt, dass das Kriechen einem Endwert zustrebt, der durch die zwei Federn vorgegeben ist, und dass bei

Entlastung die Dehnung sowohl durch die spontane Rückfederung der Feder und durch Rückkriechen asymptotisch wieder auf null geht. Im Fall der Relaxation bleibt ein Teil der Spannung erhalten.

Bild A.8 Linearer Standardkörper, Kriech- und Relaxationsfunktion



Für die realistische Darstellung von Kriechen und Relaxation von realen Werkstoffen reichen die bisher behandelten Modelle in der Regel nicht aus. Um dennoch mit rheologischen Modellen arbeiten zu können, werden mehrere Voigt-Kelvin-Körper und ein Maxwell-Körper zu einer Gruppe in Reihe geschaltet, um das Kriechen zu beschreiben, oder es werden mehrere Maxwell-Körper mit einer Feder parallel geschaltet, um die Relaxation abzubilden. Es ergeben sich folgende Funktionen für das Kriechen

$$(12) \quad J(t) = \frac{1}{E_0} + \frac{t}{\eta_\infty} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i} (1 - e^{-t/\bar{\tau}_i})$$

und für die Relaxation

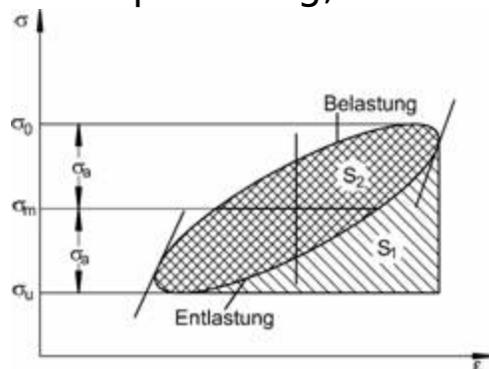
$$(13) \quad R(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^n E_i e^{-t/\bar{\tau}_i}$$

mit den Werten E_i und $\tau_i = \eta_i / E_i$ (Retardationszeiten bzw. Relaxationszeiten) für die einzelnen Komponenten [1]. In den Kapiteln über Kunststoffe und Beton wird von den rheologischen Modellen Gebrauch gemacht.

2.2 Verhalten unter zyklischer Beanspruchung

Das Verhalten unter zyklischen Bedingungen kann vor allem bei Kunststoffen wesentlich sein. Zeichnet man das Spannungs-Dehnungs-Diagramm für einen zugbeanspruchten Stab bei Belastung und Entlastung, so kann man häufig feststellen, dass die beiden Linien nicht zusammenfallen, sondern dass der Entlastungsast tiefer liegt als der Belastungsast. Dies ist ein Zeichen dafür, dass die in die Probe als Formänderungsarbeit hineingesteckte Energie nicht ganz zurückgewonnen werden kann. Ein Teil dieser Energie wird verbraucht und kann äußerlich beobachtet werden in einer Erwärmung der Probe, in einem Abfall der Amplitude bei freien Schwingungen oder durch Dämpfung der Resonanzkurve. Im [Bild A.9](#) ist die Spannungs-Dehnungs-Kurve für einen Stab dargestellt, der von einer um eine Mittelspannung σ_m schwingenden Spannung $\pm \sigma_a$ beansprucht wird.

Bild A.9 Hystereseschleife bei dynamischer Beanspruchung, nach Becker et al. [2]



Der Flächeninhalt der dadurch gebildeten Hystereseschleife ist ein Maß für die verbrauchte Energie. Der Quotient aus verbrauchter und aufgewendeter Energie ergibt die relative Dämpfung:

$$(14) \quad D_{\text{rel}} = \frac{S_2}{S_1}.$$

Anschaulich lässt sich die Dämpfung erklären, wenn man eine sinusförmige Belastung vorgibt und den Verlauf von Belastung und Verformung verfolgt. Die Spannung sei (ω Kreisfrequenz)

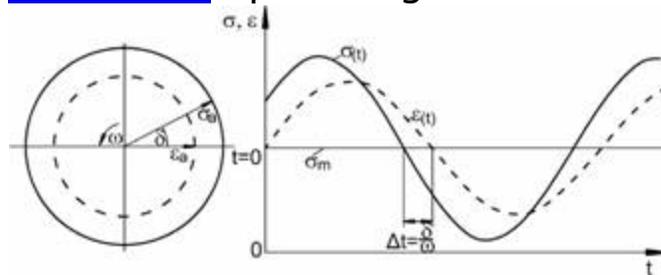
$$(15) \quad \sigma(t) = \sigma_a \sin \omega t$$

und die entstehende Verformung ist entsprechend

$$(16) \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_a \sin(\omega t - \delta),$$

d. h. die Verformung eilt der Spannung um einen konstanten Winkel δ nach ([Bild A.10](#)), dem sog. Phasenwinkel.

Bild A.10 Spannung und Dehnung bei zyklischer Belastung



In komplexer Schreibweise vereinfachen sich die Beziehungen zu

$$(17) \quad \sigma(t) = \sigma_a e^{i\omega t}$$

und

$$(18) \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_a e^{i(\omega t - \delta)}.$$

In der Elastizitätstheorie werden Dehnung und Spannung mit dem Elastizitätsmodul verknüpft, der in diesem Fall zeitabhängig sein muss:

$$(19) \quad \sigma(t) = E(t) \cdot \varepsilon(t).$$

Verwendet man Gln. (17) und (18), so folgt

$$(20) \quad E(t) = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_a} e^{i\delta},$$

d. h. eine komplexe Beziehung zwischen der maximalen Spannung und der maximalen Dehnung in einem Zyklus. Die Spannungs-Dehnungs-Beziehung lautet dann

$$\underline{\sigma} = \underline{E} \cdot \underline{\varepsilon}$$

$$(21) \underline{E} = E' + iE''$$

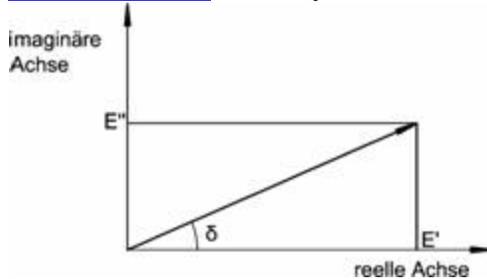
welche formal dem Hooke'schen Gesetz entspricht. Real- und Imaginärteil lauten getrennt

$$E' = |\underline{E}| \cos \delta$$

$$(22) E'' = |\underline{E}| \sin \delta$$

Der Winkel, den der Vektor vom Ursprung zum Punkt E mit der reellen Achse einschließt, ist der Phasenwinkel δ (siehe [Bild A.11](#)). Der Quotient E''/E' ist dann der Tangens von δ (Verlustfaktor d) und somit

Bild A.11 Komplexer Elastizitätsmodul



$$(23) \tan \delta = d = \frac{E''}{E'}$$

und

$$(24) E = E' (1 + id).$$

Der Realteil E' wird als Speichermodul oder dynamischer Modul bezeichnet, da er auf die gespeicherte Arbeit bezogen ist, der Imaginärteil E'' als Verlustmodul, da er einen Anhaltspunkt liefert für die in jedem Zyklus nicht wieder gewinnbare Energie. Als absoluter Modul $|\underline{E}|$ wird die Länge des Vektors $\sqrt{(E'^2 + E''^2)}$ bezeichnet. Für kleine Verlustfaktoren wird

$$(25) |\underline{E}| \rightarrow E' \approx E.$$

Man ersieht daraus, dass das rein elastische Verhalten ein Spezialfall des allgemeinen Formänderungsverhaltens ist (mit $d = 0$). Für rein viskoses Verhalten wird d sehr groß, oder anders ausgedrückt: $\delta \rightarrow \pi / 2$.

Im Falle kleiner Dämpfungen, bei denen $\sin \delta = \tan \delta = d$ gesetzt werden darf, wenn $d < 1$, kann die Hystereseschleife als Ellipse berechnet werden. [Gl. \(14\)](#) wird dann

$$(26) \quad D_{\text{rel}} = \frac{\pi}{2} d.$$

In dieser Form hat sie den Vorteil, dass die relative Dämpfung, die zur Kennzeichnung eines Werkstoffs gut geeignet ist, direkt aus dem Verlustfaktor berechnet werden kann. Dabei ist zu erwähnen, dass der Verlustfaktor verhältnismäßig leicht im Versuch zu bestimmen ist.

Eine ebenfalls gebräuchliche Kenngröße für die Dämpfung ist das logarithmische Dekrement Λ . Es ist definiert als der natürliche Logarithmus des Quotienten aus zwei direkt aufeinanderfolgenden Maximal-Amplituden. Mit den nötigen Umrechnungen folgt für den Zusammenhang zwischen d und Λ [2] (für kleine d)

$$(27) \quad \Lambda = \pi \cdot d.$$

Für das Voigt-Kelvin-Modell, bei dem im Allgemeinen das viskose Verhalten vorherrscht, gilt nach Heckel [3]

$$(28) \quad d = \frac{\Lambda}{\pi} \frac{1}{1 + \left(\frac{\Lambda}{2\pi}\right)^2}.$$

Da Dämpfungsversuche gewöhnlich sehr rasch ablaufen, hat man schon wiederholt versucht, andere mechanische Eigenschaften wie Kriechen, Relaxation, Langzeitfestigkeit und Stoßfestigkeit auf diese Art vorauszusagen, um sich langwierige Versuche zu ersparen. Die Zusammenhänge zwischen den im Versuch ermittelten Größen und den gesuchten Werten sind jedoch sehr verwickelt und oft nur statistischer Art, sodass diese Ansätze nicht zu befriedigendem Erfolg geführt haben.

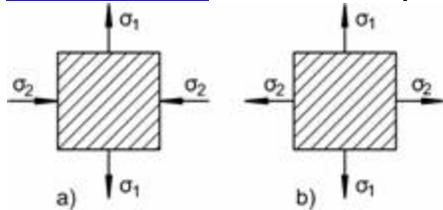
2.3 Bruchverhalten und Festigkeitshypothesen

Unter gleichmäßig zunehmender Beanspruchung verformt sich ein Körper zunächst elastisch oder viskos, wie in Abschnitt 2.1 beschrieben. Mit steigender Last fängt ein zähes Material an zu fließen, verfestigt sich wieder und bricht schließlich. Handelt es sich um sprödes Material oder um solche räumlichen Spannungszustände, die das Entstehen von plastischen Verformungen behindern, dann bricht der Körper schlagartig ohne große bleibende Verformung. Im ersten Fall spricht man von einem Gleit- oder Scherbruch, da die Scherspannung ein Abgleiten von Kristallbändern auf kristallografisch bevorzugten Ebenen bewirkt und eine große plastische Verformung hervorruft. Die zweite Art des Bruches bezeichnet man als Trennbruch, da er das Material rechtwinklig zur größten Zugspannung glatt durchtrennt, ohne sich durch auffallende plastische Verformung anzukündigen. Bei vielen technischen Stoffen stellt sich eine Mischung von Trennung und Gleitung ein, wobei die Bruchfläche weder rechtwinklig zur größten Zugspannung noch in Richtung der größten Schubspannung verläuft. Man spricht in einem solchen Fall von einem Mischbruch.

Im einachsigen Zugversuch ist das Bruchverhalten einfach zu übersehen, da nur eine einzige Kraftkomponente wirksam ist und die Verformung rechtwinklig dazu ungehindert verlaufen kann. Schwieriger wird es bei einem mehrachsigen Spannungszustand, bei dem die Spannungskomponenten die Verformung in allen Richtungen beeinflussen. Nimmt man bei einem ebenen Spannungszustand z. B. die Komponenten σ_1 als Zug und σ_2 als Druck an ([Bild A.12](#) a)), so kann man schon aus der Anschauung heraus vermuten, dass die Verformung in Richtung σ_1 durch die Wirkung von σ_2 begünstigt wird.

Umgekehrt wird die Verformung in Richtung σ_1 behindert, wenn σ_2 auch als Zug wirkt ([Bild A.12 b](#))).

Bild A.12 Ebener Spannungszustand



Da technische Konstruktionen in der Regel mehrachsiger beansprucht werden, ist es sehr wichtig, gerade unter solchen Bedingungen das Bruchverhalten zu kennen. Man muss also eine Spannungsgröße finden, die es ermöglicht, einen mehrachsigen Spannungszustand rechnerisch auf einen einachsigen zu reduzieren und diese rechnerische Spannung mit der Bruchspannung im einfachen Zug- oder Druckversuch zu vergleichen. Dann erst ist es möglich, die Sicherheit einer Konstruktion nachzuweisen.

Um eine solche Vergleichsspannung zu berechnen, wurden verschiedene Festigkeitshypothesen entwickelt: für spröde Werkstoffe die Normalspannungshypothese und die Größtdehnungshypothese, für zähe Werkstoffe die Schubspannungshypothese und die Gestaltsänderungsenergiehypothese.

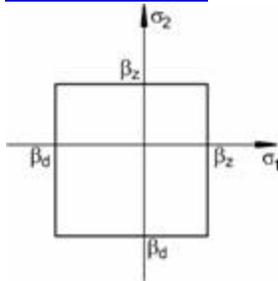
Der Normalspannungshypothese nach Lamé (1852) [285] und Rankine (1858) [289] liegt der Gedanke zugrunde, dass die größte auftretende Normalspannung den Bruch herbeiführt (es gilt immer $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$). Die Vergleichsspannung ist dann

$$(29) \quad \sigma_V = \sigma_1.$$

Entsprechend dieser Theorie verläuft der Bruch normal zu der größten Normalspannung, die praktisch nur eine Zugspannung sein kann. Im Fall dreiachsiger Druckspannungen wurde die Hypothese nicht bestätigt, denn unter beliebig hohen allseitigen Drücken war es nicht

möglich, homogene feste Körper zu zerstören [4]. [Bild A.13](#) zeigt in einem σ_1, σ_2 -Koordinatensystem die Grenzlinie aller ebenen Spannungszustände, die vom Material ertragen werden können. Alle Spannungszustände, die außerhalb des Quadrats liegen, führen zum Bruch, wobei hier angenommen wurde, dass die Druckfestigkeit β_D größer als die Zugfestigkeit β_Z ist. Die Theorie gilt für spröde Stoffe, z. B. Porzellan oder Gusseisen, bei denen keine plastischen Formänderungen auftreten und der Bruch als reiner Trennbruch auftritt.

Bild A.13 Grenzlinie nach der Normalspannungshypothese



Die Größtdehnungshypothese (nach Navier (1826) [389] und Saint-Venant (1844) [390]) trifft die Annahme, dass beim Bruch ein bestimmter Maximalwert der elastischen Dehnung überschritten werden müsse. Nach dem erweiterten Hooke'schen Gesetz gilt für die Dehnung in Richtung σ_1 und σ_3

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu (\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu (\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \quad (30)$$

Für den Bruchzustand gilt dann

$$\varepsilon_1 \text{ bzw. } |\varepsilon_3| < \varepsilon_V = \frac{\sigma_V}{E} \quad (31)$$

Die Vergleichsspannung wird demnach

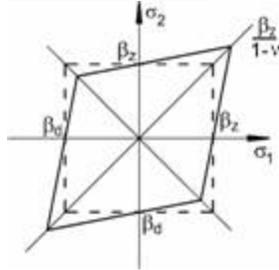
$$\sigma_V = \sigma_1 - \nu (\sigma_2 + \sigma_3) \quad (32)$$

oder, falls der Bruch aufgrund einer Druckspannung erfolgt,

$$\sigma_V = \sigma_3 - \nu (\sigma_1 + \sigma_2). \quad (33)$$

Die Größtdehnungshypothese kann ebenso wie die Normalspannungshypothese nur gültig sein, wenn sich der Baustoff bis zum Bruch elastisch dehnt. In [Bild A.14](#) sind die Grenzlinien für den ebenen Spannungszustand eingezeichnet unter der Voraussetzung von $\nu = 0,20$ (Granit).

Bild A.14 Grenzlinie nach der Größtdehnungshypothese



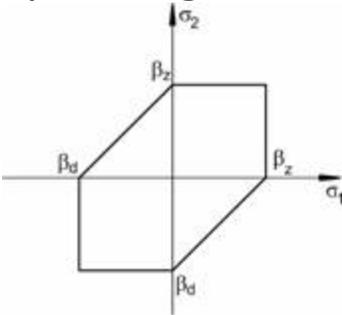
Bei duktilen Stoffen geht dem Bruch eine große plastische Verformung voraus, die mit Abgleitungen von Kristallbändern erklärt wird. Die Ursachen davon sind die Schubspannungen, die entlang solcher Gleitebenen wirken. Entsprechend diesem Materialverhalten wurde eine Schubspannungshypothese (von Tresca [5] und Saint-Venant [6]) aufgestellt, nach der die maximale Schubspannung für das Versagen eines Bauteils maßgebend ist, und zwar unabhängig von der mittleren Hauptspannung σ_2 . Nach der Elastizitätslehre gilt

$$(34) \quad \sigma_V = \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Wenn demnach ein hydrostatischer Spannungszustand herrscht, kann kein Versagen eintreten; eine Aussage, die für allseitigen Druck in Versuchen bestätigt wurde. Für allseitigen Zug kann die Behauptung nicht zutreffen, da in diesem Fall die Voraussetzungen der Theorie - Verformung durch Gleitung - nicht mehr gegeben sind. Im [Bild A.15](#) sind die Grenzlinien für den ebenen Spannungszustand dargestellt. Man ersieht daraus, dass im Falle gleichsinniger Spannungen die Linien mit denen der Normalspannungshypothese übereinstimmen, im Fall

entgegengesetzter Vorzeichen das Versagen jedoch eher eintritt. Zu beachten ist, dass im ebenen Spannungszustand σ_3 null ist, sodass die größte Differenz $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_1$ wird. Für den räumlichen Zustand ergibt sich hier ein Sechskantprisma, dessen Längsachse gleiche Winkel (rd. $71,1^\circ$) mit den Koordinatenachsen einschließt.

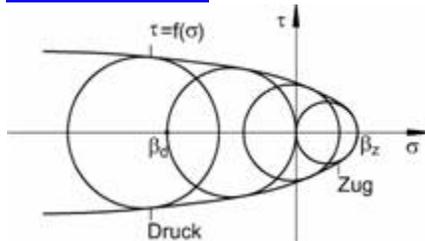
Bild A.15 Grenzlinie nach der Hüllkurve für den ebenen Spannungszustand, nach Tresca [5]



Nach dem bisher Gesagten ist es notwendig, je nach der voraussichtlichen Bruchart - Trennbruch oder Gleitbruch - die richtige Festigkeitshypothese anzuwenden, um die Bruchlast vorauszusagen. Außerdem erfassen beide Theorien den Mischbruch nur ungenau, der in der Praxis jedoch sehr häufig auftritt. Mohr [7] machte daher den Vorschlag, in ein σ, τ -Diagramm sämtliche Bruchzustände in Form der Mohr'schen Spannungskreise einzuzeichnen und damit eine Hüllkurve oder im räumlichen Fall eine Hüllfläche zu konstruieren. Alle Spannungskreise, die diese Hüllkurve berühren oder schneiden, führen zum Bruch. **Bild A.16** zeigt eine Mohr'sche Hüllkurve und die Spannungskreise für zweiseitigen Druck, für einachsigen Zug und Druck und für zweiachsige Zug-Druck-Beanspruchung (z. B. Torsion). Diese sog. erweiterte Schubspannungshypothese wird vor allem bei nichtmetallischen Körpern angewendet, die meist eine geringe Zugfestigkeit bei hoher Druckfestigkeit aufweisen. Diese Stoffe werden in der Regel auf Druck beansprucht, z. B. Beton oder Natursteine, und zeigen vor dem Bruchbeginn eine geringe plastische Verformung; ein Umstand, der die

Anwendung der Normalspannungshypothese fraglich macht. Außerdem ist es kaum möglich, auf Druck einen Trennbruch zu erzeugen, da die Reibung der Bruchflächen aneinander eine völlige plötzliche Trennung verhindert.

Bild A.16 Mohr'sche Schubspannungshypothese



Die Hüllkurve nach Mohr kommt einer Parabel sehr nahe. Daher kann man bei Bestimmung von zwei Punkten, z. B. im einachsigen Zug- und Druckversuch, die Kurve berechnen (siehe auch Abschnitt F 4.4).

Die Funktion $\tau = f(\sigma)$ stellt die allgemeine Form der Hüllkurve dar, die Coulomb [8] in seinem Reibungsgesetz als Gerade angenommen hat. Dieses Gesetz wird hier erwähnt, da es auch heute noch für die Standfestigkeitsberechnung von Schüttgütern und Böden verwendet wird. Bei völlig kohäsionslosen Teilchen wie Kies, Kohle, Getreide ist keine Zugfestigkeit vorhanden, sodass die Kurve $\tau = a \sigma$ nur im Druckbereich liegen kann ([Bild A.17 a](#)). Ist auch ohne Seitendruck bereits eine Schubfestigkeit τ_0 vorhanden oder eine Zugfestigkeit, z. B. bei Ton oder Mörtel, so verschiebt sich die Figur nach rechts. Die Geraden nach dem Coulomb'schen Reibungsgesetz heißen dann

$$(35) \quad \tau = \sigma \cdot \tan \varphi + \tau_0.$$

Bild A.17 Grenzlinie nach dem Coulomb'schen Reibungsgesetz für Körper a) ohne Kohäsion, b) mit