

Albrecht Beutelspacher

**DAS GEHEIMNIS
DER ZWÖLFTEN
MÜNZE**

The image features a 4x4 grid of 16 gold coins. Each coin has a different mathematical symbol or sign on its face. The symbols include: $\approx$, $\int$, $\times$, π , Σ , $\times$, $\approx$, $\approx$, $\int$, $\%$, π , and a blank coin.

Neue mathematische
Knobeleyen

C·H·Beck

Albrecht Beutelspacher

DAS GEHEIMNIS DER ZWÖLFTEN MÜNZE

Neue mathematische Knobelereien

C.H.Beck



Zum Buch

Herzlich willkommen zu Albrecht Beutelspachers kleiner Knobel-Kur. In jeder der 11 mal 11 Knobelaufgaben dieses Buches schlummert eine zündende Idee. Wer sie herausfindet oder den Lösungsweg auch nur nachvollzieht, spürt die Kraft des eigenen Denkens. Und lernt etwas über Mathematik, ohne sich mit mathematischer Sprache herumzuplagen.

Jedes Kapitel beginnt mit einer klassischen und endet mit einer besonders herausfordernden Knobelaufgabe. Häufig haben aufeinanderfolgende Aufgaben etwas miteinander zu tun. Ein Riesenspaß und turbulentes Gedankenfest für alle Knobelanfänger, Knobelprofis und Knobelsüchtigen.

Über den Autor

Albrecht Beutelspacher ist Professor em. für Diskrete Mathematik und Geometrie an der Universität Gießen sowie Gründungsdirektor des Mathematikums. Er ist Träger zahlreicher Auszeichnungen und Preise, darunter des Communicator-Preises des Stifterverbandes für die deutsche Wissenschaft (2000), des Deutschen IQ-Preis (2004), des Hessischen Kulturpreises (2008) sowie der Medaille für naturwissenschaftliche Publizistik der Deutschen Physikalischen Gesellschaft (2014). Bei C.H.Beck sind von ihm u. a. lieferbar: *Albrecht Beutelspachers Kleines Mathematikum. Die 101 wichtigsten Fragen und Antworten zur Mathematik* (⁴2016); *Geheimsprachen. Geschichte und Techniken* (⁶2021); *Zahlen. Geschichte, Gesetze, Geheimnisse* (³2021); *Null, unendlich und die wilde 13. Die wichtigsten Zahlen und ihre Geschichten* (⁴2020).

Inhalt

Vorwort

In Familie und Gesellschaft

Wie die Zeit vergeht

Zahlen über Zahlen

Einer lügt immer

Im Gleichgewicht

In Bewegung

Menschen, Tiere, Kombinationen

Würfel und Münzen

Schachbrett & Co

Geheime Zahlen

Die Magie der Quadrate, Kreise und Sechsecke

Vorwort

Eine Knobelaufgabe erzählt eine *Geschichte*. Dabei wird auf Einleitung, Vorreden, Motivation großzügig verzichtet, vielmehr geht es sofort zur Sache: «Auf einer Party sind 10 Menschen», «An einer Weggabelung sitzen zwei Eulen, von denen eine die Wahrheit sagt, die andere lügt», «Vor Ihnen liegen 12 Goldmünzen», ...

Die Geschichte mündet nach wenigen Zeilen in eine *Frage*, die die eigentliche Knobelaufgabe ist: «Wie oft klingelt es?», «Ist der rechte Weg der richtige?», «Wie findet man die Münze heraus, die schwerer als die anderen ist?», ...

Das ist die Stelle, an der Sie als Leserin oder Leser eine aktive Rolle spielen können und sollen: Sie haben die Gelegenheit, eine Antwort auf die Frage oder, anders gesagt, eine *Lösung* des Problems zu suchen. Das Finden ist zugegebenermaßen manchmal schwierig, daher werden Sie bei jeder Aufgabe auf einen Lösungsweg geführt.

Der *Inhalt* der Geschichten ist nicht relevant, denn sie sind oft weltfern und haben entgegen dem ersten Anschein nichts mit Anwendungen zu tun. Kein Mensch interessiert sich wirklich dafür, wie oft bei einer realen Party Gläser klingen, an keiner Wegkreuzung sitzen zwei Eulen, von denen eine lügt und die andere die Wahrheit sagt, und kaum einer ist jemals vor das Problem gestellt, das korrekte Gewicht von Goldmünzen mit einer Balkenwaage bestimmen zu müssen. Die Geschichten sind abstrus. Und

das ist gut so. Denn je abstruser eine Geschichte ist, desto besser kann man sie sich merken.

Radikal könnte man sagen: Auf die Geschichten kommt es eigentlich nicht an. Und auf die Antworten auch nicht, denn da die Geschichten weltfern sind, sind auch die Antworten auf die Fragen irrelevant für die Probleme unserer Welt.

Was macht denn dann die Faszination der Aufgaben aus? Es ist nicht die Geschichte, es ist nicht die Frage. Und es ist nicht die Antwort oder die Lösung. Sondern es ist der *Weg*, der uns zur Antwort führt!

Der Weg wird sichtbar durch einen Gedankenblitz. Dieser beleuchtet das Problem einen kurzen Augenblick lang so hell, dass einem alles klar vor Augen steht. Es ist großartig, solche Gedankenblitze zu erleben. Ich verspreche Ihnen: Auch wenn Sie eine Aufgabe nur teilweise oder gar nicht lösen konnten oder wollten, werden Sie an den Gedankenblitzen teilhaben können und dabei große Freude erleben. Natürlich wird die Befriedigung noch größer werden, wenn Sie zunächst tatsächlich ein paar Minuten lang versuchen, die Lösung selbst zu finden.

Ich knoble, also bin ich

Dieses Buch leistet – wie alle anderen Knobelbücher auch – keinen Beitrag zu den großen Problemen der Welt: es löst nicht die Umweltkrise, es stoppt nicht das Wettrüsten, es verhindert keinen Rassismus, es liefert keinen Beitrag zur Bewältigung der Corona-Pandemie.

Oder doch?

Diese Sammlung ist entstanden, als ich zu Beginn der Corona-Krise von der lokalen Zeitung angesprochen wurde. Der Nachrichtenfluss war abrupt abgebrochen und reduziert auf Corona-Meldungen. Daher suchte die

Redaktion verzweifelt Beiträge, die (a) nichts mit Corona zu tun haben und die (b), vor allem, positive Gefühle wecken sollten. Die verrückte Idee war, dass eine tägliche Mathe-Knobelaufgabe helfen und als kleiner Sonnenstrahl den Alltag der Leserinnen und Leser erhellen könnte.

Man könnte sagen: Die Knobelaufgaben bilden ein kleines Refugium, einen Rückzugsort, an dem man sicher ist, von keinen schwierigen Problemen des Alltags oder der Welt heimgesucht zu werden.

Aber dahinter steckt meiner Einschätzung nach viel mehr. Wenn Sie eine Knobelfrage beantworten oder einen Lösungsweg nachvollziehen, dann spüren Sie die Power Ihrer Gedanken. Sie erfahren die Kraft Ihres Denkens. Sie nehmen sich selbst wahr. Das dient Ihnen zur Selbstvergewisserung: Völlig egal, wie schwierig die Lebensumstände sind, Ihr Denken funktioniert 100%ig! Und das ist eine gute Nachricht.

Knobeln und Mathe

Die Aufgaben dieses Buches gehören zur Mathematik.

- Aber nicht, weil man rechnen muss. Natürlich werden Sie bei vielen Aufgaben rechnen, aber das geht nebenher, und es ist völlig klar, dass das Rechnen nicht die Hauptsache, sondern ein Hilfsmittel ist. Das Buch enthält keine puren Rechenaufgaben.
- Auch nicht, weil man eine mathematische Theorie anwendet, etwa die Theorie des Gleichungslösens. Natürlich sind Gleichungen ein großartiges Mittel, mit dem man auch viele Aufgaben dieses Buches lösen könnte, aber darum geht es gar nicht.
- Und schon gar nicht, weil man mathematisches Wissen anwendet, etwa Kongruenzsätze oder irrationale

Zahlen. Im Gegenteil: Ihr Denken soll voraussetzungslos stimuliert werden.

Die Aufgaben dieses Buches gehören zentral zur Mathematik. Und zwar aus mindestens drei Gründen.

- Sie regen Ihr Denken an.

Das fängt schon beim ersten Schritt an, der völlig unbewusst erfolgt: Kaum haben Sie einen Satz gelesen wie «Auf einer Party sind 10 Menschen, die miteinander anstoßen», lösen Sie sich schon von ihm. Es ist klar, dass es nicht um 10 Menschen in ihrer Individualität geht, sondern um 10 Objekte, die miteinander interagieren und die man deshalb, ohne ihnen zu nahezutreten, als Punkte oder Zahlen repräsentieren kann. An diesen automatischen Abstraktionsprozess schließt sich dann die eigentliche kreative Phase an, in der Sie argumentieren, probieren und überlegen, bis Ihnen – hoffentlich – die zündende Idee kommt.

In jeder Aufgabe schlummert eine zündende Idee.

- Die Aufgaben bieten Ihnen Orientierung.

Bücher oder Webseiten mit Knobelaufgaben erwecken oft den Eindruck eines bunten Sammelsuriums von Themen, Geschichten und Methoden. In diesem Buch versuche ich, die Aufgaben in einer gewissen Ordnung zu präsentieren. Jedes Kapitel steht unter einem Thema und beginnt mit einer «klassischen» Aufgabe, die fast überall auftaucht und die Vorbild für viele Aufgaben ist. Aufeinanderfolgende Aufgaben haben manchmal etwas miteinander zu tun, das heißt, man kann zuweilen eine Aufgabe leicht lösen, wenn man die vorhergehende bearbeitet hat. So sind 11 Kapitel mit jeweils 11 Aufgaben entstanden; jedes Kapitel beginnt mit einer «klassischen» Aufgabe und endet mit einer besonders herausfordernden Aufgabe.

Bei jeder Aufgabe können Sie etwas lernen.

- Die Aufgaben vermitteln Ihnen Erfolgserlebnisse. Die Lösungen und die Lösungswege sagen Ihnen nicht nur, dass etwas richtig ist, sie zeigen Ihnen auch, warum es stimmt. Und daher sagt Ihnen nicht nur Ihr Verstand, sondern auch Ihr Gefühl: Ja, so ist es. Es passt, es stimmt, das ist die richtige Lösung. Wenn Sie sich in die Problemlage etwas hineingedacht haben, dann werden Sie genau den entscheidenden Punkt identifizieren können. Das ist, banal gesagt, der Gedankensplitter, den man nicht ohne weiteres selbst entdecken würde.

Jede Aufgabe hat das Potential zu einem Erfolgserlebnis!

Die Aufgaben gehören zur Mathematik und die Lösungswege, die Gedankenblitze erst recht. Aber nichts ist in mathematischer Sprache formuliert, sondern so, dass sich Ihre Gedanken ohne äußere Hindernisse mit dem Problem beschäftigen können.

Man kann sogar sagen: Wenn Sie diese Aufgaben und Lösungen mögen, haben Sie – ob Sie das wahrhaben wollen oder nicht – eine Affinität zur Mathematik.

Ich danke Marc Schäfer für den Anstoß zu dieser Aufgabensammlung. Ein besonderer Dank gilt den vielen Zeitungsleserinnen und -lesern, die mit Begeisterung geknobelt und auch kleinste Ungenauigkeiten entdeckt haben. Schließlich danke ich meiner ehemaligen Studentin und jetzigen Kollegin Merle Porta und ihrem Mann sehr herzlich für die gründliche Durchsicht der Aufgaben. Ich habe über viele Stellen noch einmal nachgedacht und versucht, sie besser zu verstehen und klarer zu formulieren.

In Familie und Gesellschaft

Der Klassiker

Ein ganzer Strauß von Aufgaben rankt sich um das «Anstoßen» bei einer Party. Die Grundidee ist, dass je zwei Teilnehmer genau einmal miteinander anstoßen. Manchmal wird auch das Bild des Händeschüttelns benutzt: Je zwei Teilnehmer schütteln sich genau einmal die Hände. Der einfachste Aufgabentyp ist:

Wie oft klingelt es?

Bei einer Party sind 10 Personen anwesend. Jeder stößt mit jedem genau einmal an. Wie oft «klingelt» es?



Lösungsweg: Das kann man sich wie folgt klarmachen: Der erste Gast stößt mit genau 9 Menschen an. Der zweite stößt mit genau 8 weiteren Personen an; denn mit der ersten hat er ja schon angestoßen. Der dritte stößt mit 7 neuen Personen an und so weiter. Es «klingelt» also genau $9 + 8 + 7 + \dots + 2 + 1 = 45$ -mal.

Man kann die Zahl auch auf andere Weise bestimmen: Jeder der 10 Menschen stößt mit genau 9 anderen an; wenn zwei Menschen miteinander anstoßen, klingelt es aber nur einmal. Also klingelt es insgesamt $10 \cdot 9/2$ -mal. Und das ergibt auch 45.

Zusatzinformation: Ganz allgemein gilt: Wenn je zwei von n Personen genau einmal miteinander anstoßen, klingelt es genau $n \cdot (n-1)/2$ -mal.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Wie oft klingelt es?	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91

Man kann die Aufgabenstellung auch umdrehen:

1. Wie viele Gäste?

Auf einer Party ist eine gewisse Anzahl von Menschen. Jeder stößt mit jedem genau einmal an. Insgesamt «klingelt» es genau 55-mal. Wie viele Menschen sind auf der Party?

Lösung:

Auf der Party sind 11 Menschen.

Zusatzinformation: Wenn man schon weiß, dass 11 Menschen miteinander anstoßen, kann man leicht verifizieren, dass es genau 55-mal klingelt. Wie kommt man aber von 55 auf 11? Oder von 465-mal Klingeln auf 31 Gäste?

Dazu beobachten wir, dass die Anzahl der Klingeltöne $n(n-1)/2$ fast $n \cdot n/2$ ist, genauer gesagt ist die Anzahl der Klingeltöne ein kleines bisschen kleiner als $n^2/2$.

Damit kann man wie folgt vorgehen: Man geht von der Anzahl der Klingeltöne aus (etwa $n^2/2$), verdoppelt diese (und erhält etwa n^2) und zieht daraus die Wurzel. Die nächstgrößere ganze Zahl ist dann n , also die Lösung.

Zum Beispiel können wir von 55 Klingeltönen ausgehen, verdoppeln diese Zahl (110); die nächste Quadratzahl ist

121 und die Wurzel daraus ist 11. Ausgehend von 465 Klingeltönen erhalten wir als die doppelte Zahl 930. Die Wurzel daraus ist etwa 30,5. Die darauffolgende ganze Zahl ist 31, und das ist die Zahl der Gäste.

Schließlich kann man die Regel «Jeder stößt mit jedem an» aufweichen:

2. Nicht mit dem Partner

Auf einer Gesellschaft sind nur Paare eingeladen. Jeder stößt mit jedem genau einmal an – aber nicht mit seinem Partner. Es klingelt genau 112-mal.

Wie viele Paare sind anwesend?

Lösung:

Auf der Gesellschaft sind genau 8 Paare.

Erklärung: Jeder der 16 Teilnehmer stößt mit genau 14 anderen an. Also klingelt es bei 16 Gästen genau $16 \cdot 14/2$ -mal, das heißt 112-mal.

Zusatzinformation: Wenn m Paare bei einer Party sind und jeder mit jedem – außer mit seinem Partner – anstößt, dann klingelt es genau $2m \cdot (2m-2)/2 = 2m(m-1)$ -mal.

Schließlich gibt es noch eine interessante Variation der Anstoßaufgaben.

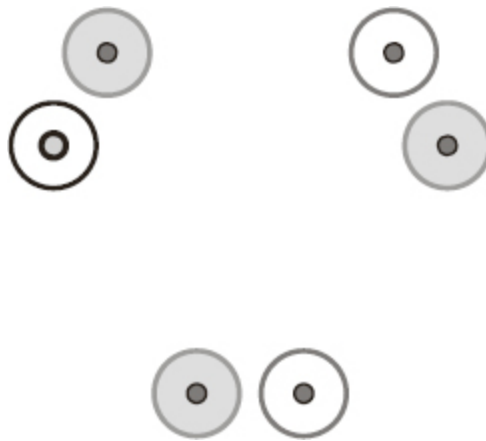
3. Nicht jeder mit jedem

Der Professor und seine Frau haben zwei befreundete Ehepaare eingeladen. Zur Begrüßung trinkt jeder ein Glas Sekt. Manche stoßen miteinander an, manche nicht. Das passiert nicht systematisch, aber so, dass keiner mit seinem Partner anstößt und mit jedem anderen höchstens einmal.

Der Professor hat nicht richtig aufgepasst. Als er seine Frau fragt, sagt diese nur: «Wir anderen haben alle mit einer unterschiedlichen Zahl von Menschen angestoßen.»

Mit wie vielen Menschen hat der Professor angestoßen?

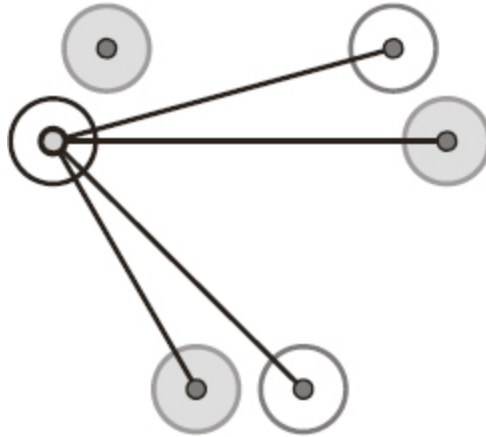
○ **Lösungsweg:** Wir stellen jeden Teilnehmer durch einen kleinen Kreis dar. Der eine Partner eines Paares ist durch einen dunklen, der andere durch einen hellen Kreis gekennzeichnet. Der Professor wird durch den dunklen Kreis unten repräsentiert.



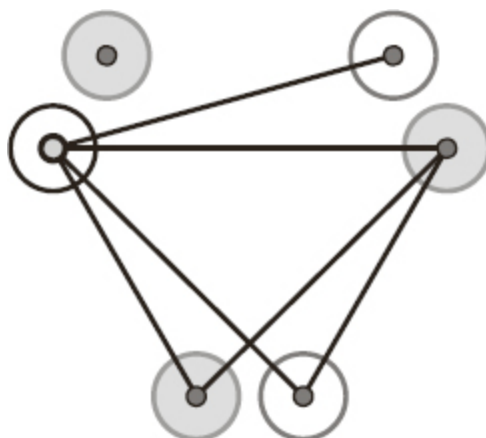
Da die anderen fünf Personen alle mit unterschiedlich vielen Menschen angestoßen haben, müssen sie mit 0, 1, 2, 3, 4 Personen angestoßen haben (denn keiner kann mit mehr als vier Personen anstoßen).

Wenn die Frau des Professors mit vier Personen angestoßen hätte, müssten das die vier Gäste sein. Dann hätte aber jeder Gast mit mindestens einer Person angestoßen und keiner mit null Personen. Das widerspricht

der Aussage der Frau des Professors. Also ist die Person, die mit vier anderen angestoßen hat, einer der Gäste. Sein oder ihr Partner ist dann der, der mit niemanden angestoßen hat. Wir stellen die Situation durch folgendes Bild dar (der Professor und seine Frau sind unten gedacht):



Nun fragen wir: Kann die Frau des Professors mit drei Personen angestoßen haben? Nein, denn dann hätte jeder Gast mit null oder mindestens zwei Personen angestoßen und keiner mit nur einer. Also hat ein Partner des zweiten eingeladenen Paars mit drei Personen angestoßen. Die Situation ist also so, wie auf folgendem Bild zu sehen ist:



Lösung: