

Jürgen Ulm

Mathematische Methoden der Elektrotechnik



utb 5777



Eine Arbeitsgemeinschaft der Verlage

Brill | Schöningh – Fink · Paderborn

Brill | Vandenhoeck & Ruprecht · Göttingen – Böhlau Verlag · Wien · Köln

Verlag Barbara Budrich · Opladen · Toronto

facultas · Wien

Haupt Verlag · Bern

Verlag Julius Klinkhardt · Bad Heilbrunn

Mohr Siebeck · Tübingen

Narr Francke Attempto Verlag – expert verlag · Tübingen

Ernst Reinhardt Verlag · München

transcript Verlag · Bielefeld

Verlag Eugen Ulmer · Stuttgart

UVK Verlag · München

Waxmann · Münster · New York

wbv Publikation · Bielefeld

Wochenschau Verlag · Frankfurt am Main

Prof. Dr. Jürgen Ulm lehrt Elektrotechnik und leitet das Institut für Digitalisierung und elektrische Antriebe (IDA) am Campus Künzelsau der Hochschule Heilbronn.

Jürgen Ulm

Mathematische Methoden der Elektrotechnik

expert verlag · Tübingen

Umschlagabbildung: © Jürgen Ulm

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im
Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

© 2021 · expert verlag GmbH
Dischingerweg 5 · D-72070 Tübingen

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Alle Informationen in diesem Buch wurden mit großer Sorgfalt erstellt. Fehler können dennoch nicht völlig ausgeschlossen werden. Weder Verlag noch Autoren oder Herausgeber übernehmen deshalb eine Gewährleistung für die Korrektheit des Inhaltes und haften nicht für fehlerhafte Angaben und deren Folgen.

Internet: www.expertverlag.de
eMail: info@verlag.expert

Einbandgestaltung: Atelier Reichert, Stuttgart
CPI books GmbH, Leck

utb-Nr.: 5777
ISBN 978-3-8252-5777-4 (Print)
ISBN 978-3-8385-5777-9 (ePDF)
ISBN 978-3-8463-5777-4 (ePub)

Vorwort

Die Mathematik ist für den Naturwissenschaftler das universelle Werkzeug,

„...denn die Mathematik ist die Grundlage alles exakten naturwissenschaftlichen Erkennens“

(David Hilbert, dt. Mathematiker, 1862-1943).

Dem Erlernen der Anwendung des Werkzeugs gilt daher eine besondere Aufmerksamkeit. Wie so oft steht die Erkenntnis der Notwendigkeit gepaart mit der Motivation des Anwenders im Vordergrund. Ist das erklärte Ziel, physikalische Zusammenhänge mittels der Mathematik zu beschreiben, so ist hierzu nicht notwendigerweise eine mathematische Strenge vonnöten.

Wohl dürfte die Anwendung einer mathematischen Strenge diesem Anliegen kontraproduktiv gegenüberstehen. Des Weiteren gilt zudem der Gödel'sche Unvollständigkeitssatz der Mathematik, welcher sogar der Mathematik selbst ihre Schranken zeigt.

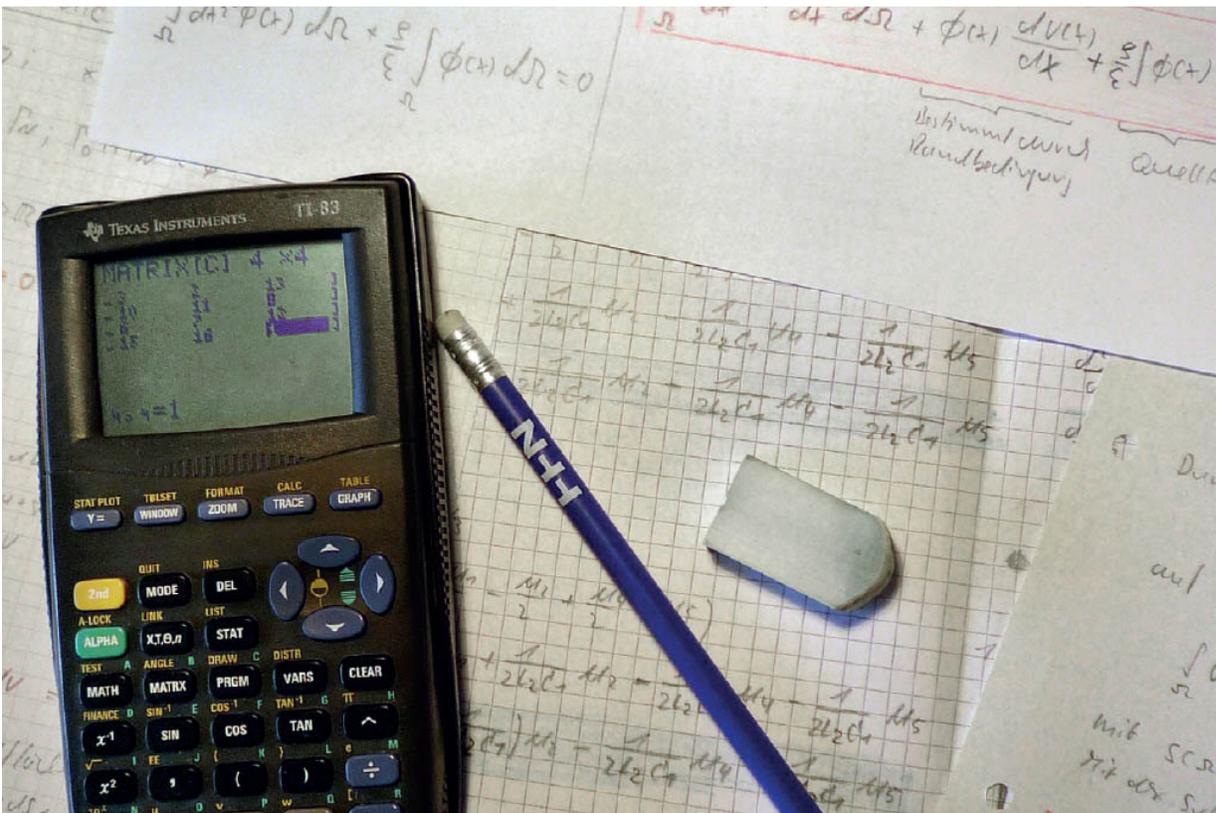
Erfahrungsgemäß ist ein Bestreben der Anwender zur mathematischen Strenge dann zu beobachten, wenn diese von der Mathematik und deren Möglichkeiten überzeugt und begeistert sind. Aus diesem Grund sollte der mathematischen Strenge zu Beginn nicht die höchste Priorität eingeräumt werden. Mathematik lebt aus der Freude ihrer Anwender und Anwendungen!

„Es ist unmöglich, die Schönheiten der Naturgesetze angemessen zu vermitteln, wenn jemand die Mathematik nicht versteht. Ich bedaure das, aber es ist wohl so“

(Richard Feynman, Physiker und Nobelpreisträger, 1918-1988),
denn

„Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben“

(Galileo Galilei, 1564-1642).



Taschenrechner, Papier, Bleistift und Radiergummi in Kombination mit Kaffee bilden eine gute Basis.

Das universelle Werkzeug der Elektrotechnik ist die Mathematik. Mit ausgewählten mathematischen Methoden

werden ebenso ausgewählte Themengebiete der Elektrotechnik bearbeitet. Die Bearbeitung erfolgt durch Vorstellen der Grundlagen, Aufgabenbeschreibung und ausführliche Aufgabenlösung. Aus dem Vorgehen resultiert auch die Zielgruppe der Leser. Diese sind aus Sicht des Autors:

- Studierende der Ingenieurwissenschaften, welche naturwissenschaftliche Themenstellungen mittels mathematischer Methoden bearbeiten möchten.
- Softwareingenieure, welche Differenzialgleichungen in Matrizenform in Mikroprozessoren implementieren möchten.
- Simulationsingenieure, die gerne mal „was zu Fuß“ nachrechnen möchten.
- Messtechnikingenieure, welche einen Messwert von einem Ort benötigen, an welchem kein Sensor adaptiert werden und für diese Stelle nur gerechnet werden kann.
- Mathematikerschrockene, bleich im Gesicht, überlebt und es nun nochmals mit Mathe probieren möchten.

Da unsere Wissenschaft spiegelbildlich aufgebaut ist, lohnt sich beispielsweise das vertiefte Einarbeiten in eine wissenschaftliche Disziplin. Hier sei vorzugsweise die Elektrotechnik empfohlen. Durch Auswechseln der Koeffizienten einer Differenzialgleichung erobert sich der begeisterte Leser dieses Buches eine weitere wissenschaftliche Disziplin (daher die Verwendung des Begriffs „spiegelbildlich“). Wer beispielsweise elektrische Netzwerke (Maschen) lösen kann, kann demzufolge auch thermische, magnetische, mechanische und hydraulische Netzwerke lösen. Die mathematischen Grundlagen

umfassen Rechenregeln, Definitionen, Matrizen, gewöhnliche und partielle Differenzialgleichungen sowie Koordinatensysteme. Sie bieten den Zugang zum Verständnis der gewählten mathematischen Methoden und Anwendungen in der Elektrotechnik. Eine elementare Anwendung in der Elektrotechnik bildet der LCR-Schwingkreis, welcher mit Differenzialgleichungen beschrieben wird und dessen Eigenschaften vorgestellt werden. Die Bildung des inneren Produkts zur Lösung von Differenzialgleichungen haben die Integraltransformation, die Momentenmethode und die Green'sche Methode gemeinsam. In die beiden zuletzt genannten Methoden wird ausführlich mit Hilfe von Beispielen eingeführt. Mit der Momentenmethode erfolgt die Überleitung zur Finite-Element-Methode (FEM) und Finite-Differenzen-Methode (FDM) anhand von Anwendungsbeispielen. Anhand der Momentenmethode wird zudem in die Eigenwertproblematik eingeführt. Die Entwicklung von unendlichen Reihen durch wechselweise Anwendung des Durchflutungs- und des Induktionsgesetzes führt auf Besselfunktionen sowie auf das Phänomen der Feldverdrängung mit Wirkung der Stromverdrängung im Leiter. Ausgewählte Normen sollen dem Leser Hinweise zur Erstellung von wissenschaftlichen Dokumentationen liefern. Es sei noch ein Hinweis zur erweiterten Nutzung des Buches gestattet: Neue Übungsaufgaben lassen sich durch einfaches Abändern der gestellten und bereits gelösten Originalaufgabe generieren. Die Abänderung der Originalaufgabe soll in der Weise vorgenommen werden, dass deren Lösung bereits im Voraus bekannt ist. Damit besteht die Möglichkeit, die Ergebnisse zu vergleichen und die Einarbeitung weiter zu vertiefen. Denn immer gilt

„Unsicher sind die Berechnungen der Sterblichen“

(Weisheitsliteratur).

Mit freundlichen Grüßen
der Autor
im Herbst 2021



HHN

HOCHSCHULE HEILBRONN
Reinhold-Würth-Hochschule
Campus Künzelsau

Campus Künzelsau Reinhold-Würth-Hochschule

Studieren in der Region der Weltmarktführer

Technik

- Automatisierungstechnik und Elektro-Maschinenbau*
- Elektrotechnik*
- Wirtschaftsingenieurwesen-Energiemanagement*
- Wirtschaftsingenieurwesen*

* Studienmodell studierbar

Studienmodelle der HHN

Kooperatives Studienmodell

- Ausbildung und im Anschluss gleich ins Studium

Studium mit vertiefter Praxis

- Studieren, aber mit Unternehmensanbindung



www.hs-heilbronn.de/campus-kuenzelsau

www.hs-heilbronn.de/campuskuh

Weitere Infos über die Institute siehe auch [Anhang B](#).

Inhaltsverzeichnis

1 Erforderliche mathematische Grundlagen

1.1 Matrizen

- 1.1.1 Rechenoperationen mit Matrizen
- 1.1.2 Addition und Subtraktion zweier Matrizen
- 1.1.3 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar
- 1.1.4 Quadratische Matrix
- 1.1.5 Einheitsmatrix
- 1.1.6 Determinante
- 1.1.7 Unterdeterminante oder Minor
- 1.1.8 Adjunkte oder algebraisches Komplement
- 1.1.9 Inverse Matrix
- 1.1.10 Transponierte einer Matrix
- 1.1.11 Komplex konjugierte Matrix
- 1.1.12 Hermitesche konjugierte Matrix
- 1.1.13 Hermitesche Matrix - selbstadjungierte Matrix
- 1.1.14 Orthogonalmatrix
- 1.1.15 Unitäre Matrix
- 1.1.16 Normalmatrix - Normale Matrix
- 1.1.17 Norm einer Matrix
- 1.1.18 Konditionierte Matrixengleichung und Konditionszahl
- 1.1.19 Eigenwert, Eigenvektor
- 1.1.20 Quadratische Matrizen - eine Zusammenfassung

- 1.2 Integral-, Differenzialgleichungen
 - 1.2.1 Definitionen
 - 1.2.2 Differenzierung skalarer Funktionen
 - 1.2.3 Gewöhnliche Differenzialgleichungen
höherer Ordnung
 - 1.2.4 Partielle Differenzialgleichungen
 - 1.2.5 Partielle Integration
 - 1.2.6 Klassifikation von Differenzialgleichungen
 - 1.2.7 Anfangswertaufgabe
 - 1.2.8 Randwertaufgabe
 - 1.2.9 Lineare Operatoren
 - 1.2.10 Inneres Produkt
 - 1.2.11 Starke Form/Formulierung einer
Differenzialgleichung
 - 1.2.12 Schwache Form/Formulierung einer
Differenzialgleichung
- 1.3 Vektor-Klassifikation
- 1.4 Differenziationsregeln für Vektoren
- 1.5 Vektoroperatoren
 - 1.5.1 Nabla- und Laplace-Operator
 - 1.5.2 Vektoroperator Gradient
 - 1.5.3 Vektoroperator Divergenz
 - 1.5.4 Vektoroperator Rotation
 - 1.5.5 Gegenüberstellung der Vektoroperatoren
 - 1.5.6 Rechenregeln für den Nabla-Operator
 - 1.5.7 Gegenüberstellung Skalar- und
Vektorprodukt
- 1.6 Maxwell'sche Gleichungen
 - 1.6.1 Beziehung zwischen Kreis- und
Flächenintegral

- 1.6.2 Beziehung zwischen Flächen- und Volumenintegral
- 1.6.3 Maxwell'sche Gleichungen - Differenzialform
- 1.6.4 Maxwell'sche Gleichungen - Integralform
- 1.6.5 Richtungszuordnung beteiligter Vektorfelder
- 1.7 Dirac'sche Deltafunktion

2 Koordinatensysteme

- 2.1 Kartesisches Koordinatensystem
- 2.2 Zylinderkoordinatensystem
- 2.3 Kugelkoordinatensystem

3 LCR-Parallel- und Reihenschwingkreis

- 3.1 Schwingkreise, Impedanzen und Resonanzen
- 3.2 Eigenfrequenz - Fehlerrechnung
- 3.3 Spannungsverläufe LCR-Reihenschwingkreis bei Frequenzvariation
 - 3.3.1 Spannungsverlauf über der Induktivität
 - 3.3.2 Spannungsverlauf über Induktivität und Widerstand
 - 3.3.3 Spannungsverlauf über dem Widerstand
 - 3.3.4 Spannungsverlauf über der Kapazität
- 3.4 Gedämpfter, erzwungener LCR-Reihenschwingkreis
- 3.5 Gedämpfter, freier LCR-Reihenschwingkreis
- 3.6 Ungedämpfter, freier LC-Schwingkreis
- 3.7 Gedämpfter, erzwungener LCR-Parallelschwingkreis
- 3.8 Gedämpfter, freier LCR-Parallelschwingkreis
- 3.9 Ungedämpfter, freier LC-Schwingkreis

4 Stromverdrängung im Leiter

- 4.1 Stromverdrängung im Leiter - Modellbildung
- 4.2 Stromverdrängung im Leiter -
Berechnungsergebnis
- 4.3 Stromverdrängung im Leiter -
Simulationsergebnis
- 4.4 Stromverdrängung im Leiter - Zusammenfassung

5 Besselgleichung und Besselfunktion

- 5.1 Zur Person Wilhelm Friedrich Bessel
- 5.2 Besselgleichung des LCR-Parallelschwingkreises
- 5.3 Besselgleichung der Felddiffusionsgleichung
- 5.4 Besselfunktion zur Berechnung der Feldverteilung
in einem Kondensator
 - 5.4.1 Modellanordnung
 - 5.4.2 Herleitung der Besselfunktion
- 5.5 Besselfunktion zur Berechnung der
Flussdichteverteilung in einer Spule
 - 5.5.1 Modellanordnung
 - 5.5.2 Herleitung der Besselfunktion
- 5.6 Besselfunktion aus allgemeiner Form der
Besselgleichung

6 Lösung von Differenzialgleichungen mittels Green'scher Funktionen

- 6.1 Zur Person George Green
- 6.2 Green'sche Integralsätze
- 6.3 PDE - Auf-, Integrationspunktanordnungen
- 6.4 PDE - Vorbereitung zur Lösung nach Green -
Differenzialform
- 6.5 PDE - Vorbereitung zur Lösung nach Green -
Integralform
 - 6.5.1 Umstellen der PDE nach der zu lösenden
Variable

- 6.5.2 Homogene Randbedingungen
- 6.5.3 Inhomogene Randbedingungen
- 6.5.4 Dirichlet-Randbedingungen
- 6.5.5 Neumann-Randbedingungen
- 6.6 PDE – Lösung der Poisson’schen DGL
 - 6.6.1 Aufgabenbeschreibung
 - 6.6.2 Lösungsweg
- 6.7 PDE – Lösung der Laplace’schen DGL
 - 6.7.1 Aufgabenbeschreibung
 - 6.7.2 Lösungsweg
- 6.8 ODE – Vorbereitung zur Lösung mit der Green’schen Funktion
 - 6.8.1 Homogene Randbedingungen
 - 6.8.2 Inhomogene Randbedingungen
 - 6.8.3 Kontinuitäts- und Diskontinuitätsbedingungen
- 6.9 ODE – Lösung von $d^2u/dx^2 = -1$ (I)
 - 6.9.1 Aufgabenbeschreibung
 - 6.9.2 Lösungsweg I
 - 6.9.3 Lösungsweg II
- 6.10 ODE – Lösung von $d^2y/dx^2 + y = \operatorname{cosec} x$
 - 6.10.1 Aufgabenbeschreibung
 - 6.10.2 Lösungsweg
- 6.11 ODE – Lösung von $d^2y/dx^2 + y = f(x)$
 - 6.11.1 Aufgabenbeschreibung
 - 6.11.2 Lösungsweg
- 6.12 ODE – Lösung von $d^2u/dx^2 = -1$ (II)
 - 6.12.1 Aufgabenbeschreibung
 - 6.12.2 Lösungsweg
- 6.13 ODE – Lösung von $d^2u/dx^2 = x$

6.13.1 Aufgabenbeschreibung

6.13.2 Lösungsweg

7 Differenzialgleichungen und Finite Elemente

7.1 Beispiele aus der Physik für
Differenzialgleichungen 1'ter Ordnung

7.2 Beispiele aus der Physik für
Differenzialgleichungen 2'ter Ordnung

7.3 Finite Elemente

8 Von der Momentenmethode zur Galerkin-Methode

8.1 Grundprinzip der Momentenmethode (MOM)

8.2 Anmerkungen zur Momentenmethode

8.2.1 Matrix (I_{jk})

8.2.2 Wahl der Basis- und Wichtungsfunktionen ϕ_n
und w_k

8.3 Zur Person Boris Galerkin

8.4 Galerkins Idee

9 Traditionelle Galerkin-Methode

10 Galerkin-Methode - Lösung von $du/dx = u$

10.1 Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion

10.2 Formulierung der schwachen Form mit Basis- und
Wichtungsfunktion

10.3 Überführung des Gleichungssystems in eine
Matrizengleichung

10.4 Lösung des linearen Gleichungssystems

11 Galerkin-Methode - Lösung von $-d^2u/dx^2 = 4x^2 + 1$

11.1 Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion

11.2 Formulierung der schwachen Form mit Basis- und
Wichtungsfunktion

11.3 Überführung des Gleichungssystems in eine
Matrizengleichung

11.4 Lösung des linearen Gleichungssystems

12 Galerkin-Methode - Lösung von $d^2u/dx^2 = -1$ (I)

12.1 Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion

12.2 Schwache Formulierung der Differentialgleichung

12.3 Überführung des Gleichungssystems in eine
Matrizengleichung

12.4 Lösung des linearen Gleichungssystems

13 Galerkin-Methode - Lösung von $d^2u/dx^2 = -1$ (II)

13.1 Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion

13.2 Formulierung der schwachen Form mit Basis- und
Wichtungsfunktion

13.3 Überführung des Gleichungssystems in eine
Matrizengleichung

13.4 Lösung des linearen Gleichungssystems

14 Galerkin-Methode - Durchflutungsgesetz

14.1 Galerkin-Methode - Durchflutungsgesetz
Innenbereich des Leiters

14.1.1 Schwache Formulierung der
Differentialgleichung

14.1.2 Überführung des Gleichungssystems in eine
Matrizengleichung

14.1.3 Lösung des linearen Gleichungssystems

14.2 Galerkin-Methode - Durchflutungsgesetz
Außenbereich des Leiters

14.2.1 Schwache Formulierung der
Differentialgleichung

14.2.2 Überführung des Gleichungssystems in eine
Matrizengleichung

- 14.2.3 Lösung des linearen Gleichungssystems
- 14.3 Gegenüberstellung von FEM- mit Galerkin-Ergebnis

15 Galerkin-FEM

- 15.1 Galerkin-FEM - Was wird gelöst?
- 15.2 Galerkin-FEM - Vorgehen zur Lösung

16 Galerkin-FEM - Lösung von $d^2u/dx^2 = -1$ (I)

- 16.1 Schwache Formulierung der Differentialgleichung
- 16.2 Diskretisierung des zu lösenden Gebiets Ω
- 16.3 Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion
- 16.4 Formulierung der schwachen Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$
- 16.5 Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixgleichung
- 16.6 Lösung des linearen Gleichungssystems

17 Galerkin-FEM - Lösung von $d^2u/dx^2 = -1$ (II)

- 17.1 Schwache Formulierung der Differentialgleichung
- 17.2 Diskretisierung des zu lösenden Gebiets Ω
- 17.3 Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion
- 17.4 Formulierung der schwachen Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$
- 17.5 Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixgleichung
- 17.6 Lösung des linearen Gleichungssystems

18 Galerkin-FEM - Elektrostatische Feldberechnung

- 18.1 Schwache Formulierung der Differentialgleichung
- 18.2 Diskretisierung des zu lösenden Gebiets Ω
- 18.3 Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion

- 18.4 Formulierung der schwachen Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$
- 18.5 Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixgleichung
- 18.6 Lösung des linearen Gleichungssystems

19 Galerkin-FEM - Ortsabhängige Temperaturberechnung

- 19.1 Schwache Formulierung der Differentialgleichung
- 19.2 Diskretisierung des zu lösenden Gebiets Ω
- 19.3 Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion
- 19.4 Formulierung der schwachen Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$
- 19.5 Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixgleichung
- 19.6 Lösung des linearen Gleichungssystems
- 19.7 Diffusionsvorgang vollendet

20 Galerkin-FEM - Ortsabhängige Magnetfeldberechnung

- 20.1 Schwache Formulierung der Differentialgleichung
- 20.2 Diskretisierung des zu lösenden Gebiets Ω
- 20.3 Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion
- 20.4 Formulierung der schwachen Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$
- 20.5 Überführung des Gleichungssystems in eine Matrixgleichung
- 20.6 Lösung des linearen Gleichungssystems

21 Einführung in die Finite-Differenzen-Methode

- 21.1 Numerische Notation der linearen Felddiffusionsgleichung
- 21.2 Zu den Personen Crank und Nicolson

- 21.3 Lösung mit impliziter Methode nach Crank-Nicolson
 - 21.3.1 Überführung der Diffusionsgleichung in eine Matrixengleichung
 - 21.3.2 Lösung der Matrixengleichung
 - 21.3.3 Anwendungsbeispiel
- 21.4 Lösung mit expliziter Methode
 - 21.4.1 Überführung der Diffusionsgleichung in eine Matrixengleichung
 - 21.4.2 Lösung der Matrixengleichung
 - 21.4.3 Anwendungsbeispiel

22 Anwendungen der FEM zur Produktentwicklung

- 22.1 Analyse eines Proportionalmagnets
 - 22.1.1 Preprocessing
 - 22.1.2 Processing
 - 22.1.3 Postprocessing
- 22.2 Synthese eines planaren Asynchron-Scheibenläufermotors
 - 22.2.1 Preprocessing
 - 22.2.2 Processing
 - 22.2.3 Postprocessing
 - 22.2.4 Musterbau des planaren Asynchronmotors

23 Virtuelle Produktentwicklung

- 23.1 Kopplung zwischen FEM- und Optimierungstool
- 23.2 Mehrzieloptimierung - Pareto-Optimierung
- 23.3 Optimierungsbeispiel Elektromagnet
 - 23.3.1 Monte Carlo-Methode
 - 23.3.2 Partikelschwarm-Methode
 - 23.3.3 Evolutionäre Methode
 - 23.3.4 Diskussion der Ergebnisse

24 Eigenwertprobleme

24.1 Eigenwertproblem - Einführung

24.2 Eigenwertproblem - Momentenmethode

24.3 Eigenwertproblem - kanonische Form

25 Eigenwertproblem-MOM - Lösung von $-d^2u/dx^2 = \lambda u$

25.1 Aufgabenbeschreibung

25.2 Lösungsweg und Lösung

25.3 Lösung für 1'ter Ordnung

25.4 Lösung für 2'ter Ordnung

26 Gemeinsamkeiten von Methoden zur Lösung von DGLs

26.1 Momentenmethode (MOM)

26.2 Integraltransformation

26.3 Green'sche Methode

27 Wissenswertes zur Modellbildung

27.1 Kategorien der Modellbildung

27.2 Analytik contra Numerik

28 Nützliche Normen

Literaturverzeichnis

A Anhang

A.1 MATLAB-Code - Wärmediffusionsskript

A.2 MATLAB-Code - Magnetfelddiffusionsskript

A.3 Toolvergleich - MATLAB vs. COMSOL

B Campus Künzelsau - Inside

Index

Symbole und Abkürzungen

Symbol	Bedeutung	Einheit
A	Koeffizient, Matrix	
A	Fläche	m^2
B	Koeffizient, Matrix	
B, \vec{B}	magnet. Flussdichte, Vektor der magnet. Flussdichte	$V s/m^2$
B_h	Interpolations-, Ansatzfunktion	
C	Koeffizient, Matrix	
C	Kapazität	As/V
C	Wärmekapazität	J/K
D	Koeffizient, Matrix	
D	Ladungsdichte	As/m^2
D	Diskrimminante	
E	Koeffizient, Matrix	
E, \vec{E}	elektr. Feldstärke, Vektor der elektr. Feldstärke	V/m
ε	Längenbezogene elektrische Feldstärke	V/m^2
F	Koeffizient, Funktion	
F	Kraft	$N, kgm/s^2$
G	Green'sche Funktion	

G	Koeffizient	
H, \vec{H}	magnet. Feldstärke, Vektor des magnet. Feldes	A/m
H_Φ	Interpolations-, Ansatzfunktion	
I	Strom	A
J, \vec{J}	elektr. Stromdichte, Vektor der elektr. Stromdichte	A/m^2
K	Konstante	
L	Induktivität	$V s/A$
M	Matrix	
N	Anzahl Knoten, Laufvariable, Windungszahl	
P	Leistung	W
P	Polynomfunktion	
Q	Ladung	As
R	Residuum	
R	Radius	m
R	Widerstand	Ω
S	Matrix	
S_P	Scheitelpunkt	
U	Spannung	V
V	Volumen	m^3
W	Wronski-Determinante	
X	Blindwiderstand, Reaktanz	Ω
$Z, \underline{Z} $	Scheinwiderstand, Betrag der Impedanz	Ω
\underline{Z}	Impedanz (komplexe Impedanz)	Ω

a	Koeffizient	
a_0	Beschleunigung	m/s^2
b	Dämpfungskonstante	kg/s
c	Konstante	
c	Federkonstante	N/m
c	Lichtgeschwindigkeit	m/s
c	spezifische Wärmekapazität	$J/(kgK)$
d	Durchmesser	m
e	e-Funktion	
\vec{e}	Einheitsvektor	
f	Hilfsvariable, Funktion, Matrix, Spaltenvektor	
g	Hilfsvariable, Funktion, Matrix	
h	Elementlänge	m
i	Laufvariable	
i	Strom	A
j	Laufvariable	
j	imaginäre Einheit	$\sqrt{-1}$
k, \underline{k}	Konstante, komplexe Konstante	
l	Länge	m
l	Matrix	
m	Laufvariable	
m	Masse	kg
n	Normale, Anzahl Teilintervalle	
p	Impuls	$kg\ m/s$
p	Variable, Funktion	
r	Radius	m
s	Konstante	

t	Zeit	s
u	Funktion, Interpolations-, Ansatzfunktion	
u	Spannung	V
\hat{u}_0	Spannungsamplitude	V
v	Funktion, Interpolations-, Ansatzfunktion	
v	Geschwindigkeit	m/s
w	Gewichts-, Wichtungs-, Test-, Formfunktion	
x	Koordinate, Weg	m
y	Koordinate, Weg	m
y	Funktion	
z	Koordinate	m
Γ	Rand des FEM-Gebietes	
Δ	Delta, differenziell	
Θ	Durchflutung	A
Φ	magnetischer Fluss	$V s$
Ψ	verketteter magnetischer Fluss	$V s$
Ω	Gebiet, Teilgebiet, Element	
α	Koeffizient	
β	Koeffizient	
γ	Koeffizient, Randwert	
δ	Abklingkoeffizient	
ε	Permittivität	$As/(V m)$
ε_0	Permittivität des Vakuums [8, 8542 $10^{-12} As/(V m)$]	$As/(V m)$

v	Temperatur	$^{\circ}\text{C}$
κ	spezifische elektrische Leitfähigkeit	$\text{m}/(\Omega\text{mm}^2)$
λ	Wärmeleitfähigkeit	$\text{W}/(\text{mK})$
λ	Eigenwert	
μ	Permeabilität	$\text{Vs}/(\text{Am})$
μ_0	Permeabilität des Vakuums [$4\pi 10^{-7} \text{Vs}/(\text{Am})$]	$\text{Vs}/(\text{Am})$
ρ	Dichte	kg/m^3
ρ	Raumladungsdichte	As/m^3
τ	Zeitkonstante	s
v_h	Ansatz-, Testfunktion	
φ	Potenzial	V
φ	Interpolations-, Ansatzfunktion	
ϕ	Entwicklungs-, Basis-, Dreiecksfunktion	
ω	Winkelgeschwindigkeit, Kreisfrequenz	$1/\text{s}$
\mathcal{L}	Linearer Operator	
\mathcal{M}	Linearer Operator	
\mathcal{O}	Null-Operator	
\mathcal{I}	Identitätsoperator	
∇	Nabla-Operator	
Δ	Delta-Operator	

Kapitel 1

Erforderliche mathematische Grundlagen

Die zur numerischen Lösung von Differenzialgleichungen erforderlichen Grundlagen sind in diesem Kapitel zusammengestellt worden. Diese beinhalten im Wesentlichen Matrizen, Definitionen und Klassifikationen von Differenzialgleichungen sowie Anfangs- und Randwertaufgaben und Vektoroperatoren. Hierzu besonders zu empfehlende Literatur sind [\[3\]](#), [\[51\]](#) sowie [\[57\]](#).

1.1 Matrizen

Die Matrixschreibweise fasst die Berechnungen mit Funktionen zusammen und erhöht damit die Übersicht. Hierzu vergleichbar fasst ein Vektoroperator Ableitungen zusammen, welche mit einem einfachen Symbol (Nabla-, Laplace-Operator) gekennzeichnet werden. Die Matrixschreibweise (Matrixgleichungen) ermöglicht mittels den in der Literatur bekannten Lösungsverfahren die numerische Lösung von linearen Gleichungssystemen. Daher erhalten Matrix und Matrizen eine besondere Aufmerksamkeit. Hier werden ausgewählte Matrizenoperationen vorgestellt. Diese beinhalten die

erforderlichen Matrizen-Rechenregeln, die Invertierung, Multiplikation einer Matrix, Matrixtypen sowie Determinantenberechnungsregeln u. a. m. Als empfehlenswerte Literatur sei hier auf [51], S. 268 ff. und [27], S. 12 ff. (Zufallsmatrizen - Neue universelle Gesetze) verwiesen.

1.1.1 Rechenoperationen mit Matrizen

In Tab. 1.1 werden die wichtigsten algebraischen Axiome zusammengefasst.

Tabelle 1.1: Zusammenfassung der wichtigsten Rechenregeln

Assoziativgesetz	$\mathbf{A} (\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB}) \mathbf{C}$
Distributivgesetz	$\mathbf{A} (\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ $(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$
Transponieren	$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$

Man beachte, dass die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist, was

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

bedeutet.

1.1.2 Addition und Subtraktion zweier Matrizen

Zwei Matrizen gleichen Typs werden addiert oder subtrahiert, indem man ihre entsprechenden Elemente addiert oder subtrahiert:

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (a_{ik} \pm b_{ik}) = \mathbf{C},$$

mit $i = 1, 2, 3, \dots, m$ und $k = 1, 2, 3, \dots, n$ und \mathbf{C} die Summen- oder Differenzmatrix. Addition und Subtraktion sind nur für Matrizen gleichen Typs (m,n) definiert.

1.1.3 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

Die Multiplikation einer Matrix mit dem Skalar λ erfolgt durch Multiplikation eines jeden einzelnen Matricelementes mit dem Skalar

$$\lambda \mathbf{A} = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Bei der skalaren Multiplikation findet das Assoziativgesetz und Distributivgesetz Anwendung, da $\lambda = \alpha \cdot \beta$ oder $\lambda = \alpha \pm \beta$ gleichermaßen sein kann.

1.1.4 Quadratische Matrix

Quadratische Matrizen besitzen die gleiche Anzahl von Zeilen und Spalten, d. h. $m = n$ mit

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{n,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$