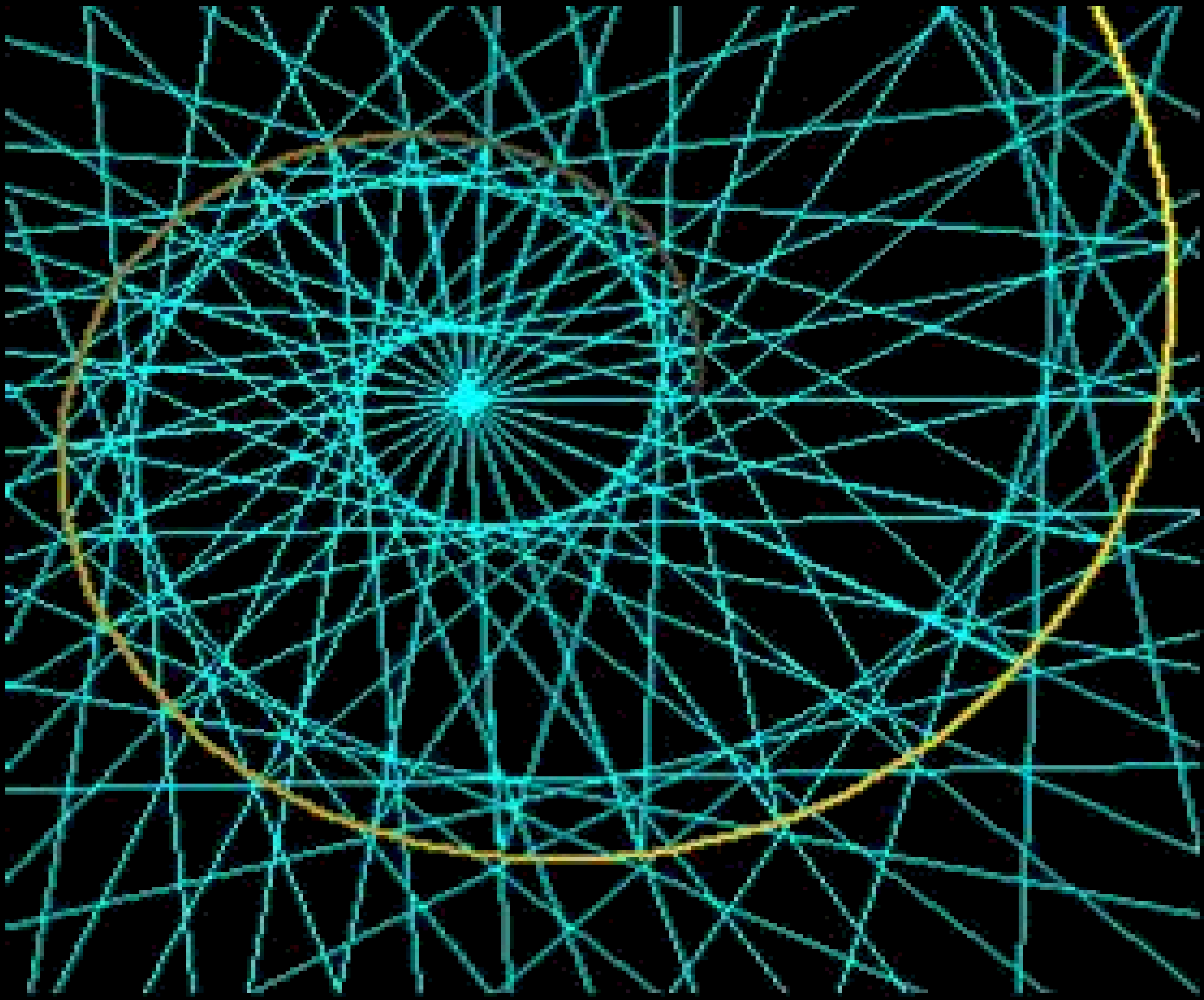
Fundamentos Matemáticos

para

Ingeniería y Ciencias



Alfaomega

Fundamentos Matemáticos

Para Ingeniería y Ciencias

Eduardo Ariza Velázquez • Nelva Betzabel Espinoza Hernández
Pedro García Juárez • Rosa García Tamayo
Diego Herrera Cobián • Carlos Palomino Jiménez
Héctor David Ramírez Hernández • Carlos Zamora Lima

Gerente editorial
Marcelo Grillo Giannetto
mgrillo@alfaomega.com.mx

Editor
Francisco Javier Rodríguez Cruz
jrodriguez@alfaomega.com.mx

Datos catalográficos
Ariza Velázquez, Eduardo; et. al.
Fundamentos Matemáticos
para Ingeniería y Ciencias

Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V., México

ISBN 978-607-707-864-7

Fundamentos Matemáticos para Ingeniería y Ciencias
Eduardo Ariza Velázquez; Nelva Betzabel Espinoza Hernández; Pedro García Juárez; Rosa García Tamayo; Diego Herrera Cobián; Carlos Palomino Jiménez; Héctor David Ramírez Hernández; Carlos Zamora Lima

Alfaomega Grupo Editor, México, agosto de 2013

Pitágoras 1139, Col. Del Valle, 03100, México D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro No. 2317

Pág. Web: **http://www.alfaomega.com.mx**
E-mail: **atencionalcliente@alfaomega.com.mx**

ISBN: 978-607-707-864-7

Empresas del grupo:
México: Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V. Pitágoras 1139, Col. Del Valle, México, D.F. C.P. 03100.
Tel.: (52-55) 5575-5022 - Fax: (52-55) 5575-2420 / 2490. Sin costo: 01-800-020-4396
E-mail: atencionalcliente@alfaomega.com.mx

Colombia: Alfaomega Colombia S.A. - Carrera 15 No. 64 A 29, Bogotá, Colombia.
Tel.: (52-1) 2100122 - Fax: (57-1) 6068648. E-mail: cliente@alfaomgea.com.co

Chile: Alfaomega Grupo Editor, S.A. - Dr. La Sierra 1437, Providencia, Santiago, Chile
Tel.: (56-2) 235-4248 - Fax: (56-2) 235-5786. E-mail: agechile@alfaomgea.cl

Argentina: Alfaomega Grupo Editor Argentino, S.A. - Paraguay 1307 P.B. Of. 11, C.P. 1087, Buenos Aires, Argentina.
Tel./Fax: (54-11) 4811-8352, 4811 7183 y 4811 0887. E-mail: ventas@alfaomegaeditor.com.ar.

Introducción

Entre las ramas de la matemática más empleadas en la ciencia están el análisis matemático, el cálculo numérico y la estadística, aunque en la actualidad prácticamente toda rama de la matemática tiene aplicaciones en la ciencia y toda área del conocimiento requiere de una buena base matemática. Esta es la razón por la que requerimos de establecer los fundamentos matemáticos necesarios para poder hacer uso de las herramientas matemáticas.

Por otro lado, en los últimos años la lógica ha adquirido relevancia en las ciencias de la computación, debido a sus múltiples aplicaciones. Además, la lógica y la matemática son esenciales para todas las ciencias por la capacidad de poder inferir con seguridad unas verdades a partir de otras establecidas; es lo que las hace recibir la denominación de "Ciencias exactas". Estas son las razones por las que incluimos el capítulo 1 sobre el lenguaje y deducción matemática.

Los capítulos 2, 3 y 4 están dedicados para hablar, en buena medida, de los conceptos considerados como fundamentales en la matemática: conjunto, número real y función, que aparecen en cualquier rama de la matemática. Abordaremos los temas de manera más formal de lo que usualmente se hace (comparado con estudios preuniversitarios), con báses lógicas.

Aunque el objetivo inicial es cubrir los temas correspondientes a la materia "Matemáticas elementales" de la Facultad de Ciencias de la Computación en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, la presente obra es también apropiada para todos aquellos estudiantes de Ingeniería y Ciencias en general que necesiten aprender las herramientas matemáticas de nivel superior.

Finalmente la autoría específica de los capítulos es la siguiente:

- **Capítulo 1**. Eduardo Ariza Velázquez, Pedro García Juárez, Rosa García Tamayo, Diego Herrera Cobián.
- **Capítulo 2**. Eduardo Ariza Velázquez, Nelva Betzabel Espinoza Hernández , Pedro García Juárez, Rosa García Tamayo, Diego Herrera Cobián.
- **Capítulo 3**. Eduardo Ariza Velázquez, Nelva Betzabel Espinoza Hernández, Carlos Palomino Jiménez, Héctor David Ramírez Hernández, Carlos Zamora Lima.
- **Capítulo 4**. Eduardo Ariza Velázquez, Carlos Palomino Jiménez, Héctor David Ramírez Hernández, Carlos Zamora Lima.

Índice general

Capítulo 1

Lenguaje y deducción matemática

El objetivo de este capítulo es asimilar el razonamiento matemático y sus métodos. Para ello requerimos de un lenguaje con precisión y claridad, que no se preste a distintas interpretaciones.

1.1. Proposiciones lógicas

Una proposición es la expresión de un juicio, esto es, de una relación entre dos (o más) términos, sujeto-predicado, que afirma o niega, incluye o excluye el primero respecto del segundo.

Definición 1.1.1 *Una proposición lógica es un enunciado de tipo declarativo que únicamente acepta un valor de verdad, de dos posibles: Falso, o bien, Verdadero.*

Ejemplos 1

1. **En la ciudad de Puebla hay mar**. *Esta es una proposición lógica (falsa).*

2. **En el laboratorio de cómputo no hay nadie**. *No es una proposición lógica, pues en el sentido estricto del lenguaje matemático se presta a dos interpretaciones (con valores de verdad distintos).*

3. **2+2** *No es una proposición lógica, debido a que no es posible asignarle un valor de verdad.*

4. **2+2 = 4** *Esta frase sí es una proposición lógica (es verdadera).*

Nos ocuparemos únicamente de las proposiciones lógicas, a las que haremos referencia simplemente como proposiciones, sin peligro de confusión.

Usaremos los símbolos P, p, Q, q, R, $r \ldots$, para representar proposiciones pues, sin importar su mensaje, contenido o extensión, inicialmente nos interesa saber que sólo tienen un valor de verdad. Reservamos las letras mayúsculas “V” y “F” para hacer referencia a los valores Verdadero y Falso respectivamente.

1.2. Conectivos lógicos

Reconocemos dos tipos de proposiciones lógicas: el primero corresponde a las proposiciones básicas llamadas simples (o atómicas) y el segundo corresponde a las proposiciones compuestas (o moleculares).

Definición 1.2.1

1. *Una proposición simple o atómica es aquella en la cual no es posible distinguir partes que, a su vez, sean proposiciones.*

2. *Las proposiciones compuestas, o moleculares, se construyen a partir de proposiciones simples. En una proposición compuesta sí es posible distinguir partes que a su vez son proposiciones, además de otros objetos que las relacionan.*

Sin que sea una ley, usaremos los símbolos p, q, $r\ldots$ para hacer referencia a proposiciones simples, así como los símbolos P, Q, $R\ldots$ para las compuestas.

El procedimiento para obtener proposiciones compuestas es mediante los conectivos lógicos $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, negación, disyunción, conjunción, implicación y bicondicional, respectivamente. Los conectivos permiten construir nuevas proposiciones lógicas a partir de una o más proposiciones simples (o compuestas). Los conectivos surgen de nuestro lenguaje cotidiano, salvo que en la Matemática (y las ciencias en general) se requiere de una interpretación estricta.

1.2.1. Negación

La proposición $\neg P$ es la negación de la proposición P y se lee como *"no: P"*. Ésta se obtiene al anteponer el conectivo "$\neg$" a la proposición P. Otras formas para simbolizar la negación de la proposición P son: $-P$, $\sim P$, $\tilde{P}$ que, por razones posteriores, evitaremos. Nos limitaremos en identificar la negación de P con $\neg P$.

Verbalmente la negación de una proposición no se sujeta a una regla sino a la capacidad expresiva de quien lo hace.

Ejemplo 1 *Sea p la proposición "Mañana estará soleado" (Asumiendo un lugar específico). Algunas formas para expresar verbalmente $\neg p$ pueden ser:*

No es cierto que: el día de mañana estará soleado.

El día de mañana no estará soleado.

Es falso que: el día de mañana estará soleado.

No se da que: el día de mañana estará soleado.

El día de mañana estará nublado.

Para símbolos propios de la Matemática, puede evitarse la expresión verbal.

Ejemplos 2

1. *Si $q : 3a + b = 5$, podemos escribir $\neg q$ como:*

   $3a + b$ *no es igual a* 5 *ó*
   $3a + b$ *es diferente de* 5 *ó*
   $3a + b \neq 5$.

2. *Si r es la proposición $2d + 3a > 7$, la proposición $\neg r$ puede escribirse como:*

   $2d + 3a$ *no es mayor que* 7 *ó*
   $2d + 3a \not> 7$ *ó*
   $2d + 3a$ *es menor o igual que* 7 *ó*
   $2d + 3a \leq 7$.

El valor de verdad de la negación

La proposición P y su negación $\neg P$ tienen distinto valor de verdad. Así, cuando la proposición P es V, tenemos que $\neg P$ es F y viceversa. Esto lo resumimos en la siguiente tabla de verdad.

p	$\neg p$
V	F
F	V

Tabla de verdad para la negación

1.2.2. Disyunción

El enlace gramatical "o" tiene dos interpretaciones que en general se dan según el contexto: inclusivo y exclusivo. En matemática, a menos que se especifique otra cosa, el enlace "o" se utiliza en sentido inclusivo, es decir: "A o B" significa que se afirma A, o que se afirma B, o bien que se afirman ambas.

Definición 1.2.2 *La proposición* $A \vee B$ *se llama disyunción de* A *con* B*, y la leemos como* A *o* B*.*

Ejemplo 2 *P: 13 es número impar o cuadrado perfecto.*

La proposición P *está formada por las proposiciones simples*

p: 13 *es impar* *y* *q:* 13 *es cuadrado perfecto.*

Simbólicamente escribimos $p \vee q$ *.*

La proposición $P : p \vee q$ *afirma verbalmante que: el número* 13 *es impar, o que el número* 13 *es cuadrado perfecto, o bien que: el número* 13 *es a la vez impar y cuadrado perfecto.*

El valor de verdad de la disyunción

El valor de verdad se obtiene de acuerdo a los diyuntandos, junto con la interpretación inclusiva. Por lo tanto:

El único caso en que $p \vee q$ es F ocurre cuando p es F y q es F.

Por lo tanto afirmamos que es V la proposición $p \vee q$ cuando es V al menos una de las proposiciones que la forman.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla de verdad para la disyunción

Ejemplo 3 *Considérese la proposición* $Q : (3 + 2 = 4) \vee (3 + 2 = 5)$*.*

En este caso, $p : 2+2 = 5$ *es F, mientras que* $q : 2+3 = 5$ *es V. Como al menos una de las proposiciones es verdadera, concluimos que* Q *es V.*

1.2.3. Conjunción

Definición 1.2.3 *La conjunción de* P *con* Q *es la proposición* $P \wedge Q$ *y se lee como "*P *y* Q*".*

El valor de verdad de la conjunción

El significado de la conjunción coincide con la interpretación que usualmente se tiene para el enlace "y".

> La conjunción $P \wedge Q$ es V únicamente en caso de que ambas proposiciones sean verdaderas, y es F en cualquier otro caso.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla de verdad para la conjunción

Ejemplo 4 *Sea* P : *"12 es divisible por 3 y 4". Esta proposición consta de las proposiciones simples*

p : *12 es divisible por 3* $\qquad$ q : *12 es divisible por 4.*

que son V. Por lo que la proposición $p \wedge q$ *es V.*

1.2.4. Propiedades conmutativa y asociativa

Tanto la conjunción como la disyunción tienen las propiedades conmutativa y asociativa. A reserva de abordar el tema formalmente, veremos dichas propiedades pues éstas se observan inmediatamente del significado del conectivo correspondiente.

Conmutatividad

Puesto que no importa el orden para determinar el valor de verdad, a la proposición $p \vee q$ la consideramos igual que la proposición $q \vee p$ (tienen el mismo mensaje), ya que tienen los mismos valores de verdad, sin importar el orden: cualquiera de ellas es F en el único caso en que p es F y q es F.

Con argumentos similares, afirmamos que la proposición $p \wedge q$ es igual a $q \wedge p$ (tienen el mismo mensaje), debido a que, sin importar el orden, cualquiera de ellas es verdadera en el único cas en que p es V y q es V.

Asociatividad

Tanto la conjunción como la disyunción son operaciones binarias, esto es que para obtener una proposición a través de cualesquiera de los conectivos $\vee$, $\wedge$ se requieren dos proposiciones componentes (disyuntandos, conjuntandos, respectivamente); dichas proposiciones, a su vez, pueden ser simples o compuestas. Dos casos específicos pueden ser tratados inmediatamente:

1. Disyunción. El que una disyunción a su vez esté formada por una o más diyunciones tiene distintas formas pero una misma interpretación. Empezamos con la proposición $P \vee (Q \vee R)$, que se considera con igual significado que $(P \vee Q) \vee R$ por tener el mismo mensaje. Recuérdese que la disyunción $P \vee (Q \vee R)$ es F en el único caso de que ambas proposiciones P y $(Q \vee R)$ sean F. A su vez, $Q \vee R$ es F en el único caso de que Q y R sean F. Entonces, la proposición $P \vee (Q \vee R)$ es F en el único caso de que las proposiciones P, Q y R son F. La misma conclusión puede obtenerse de la proposición $(P \vee Q) \vee R$.

   Si además consideramos la propiedad conmutativa (cambiar el orden de los disyuntandos), tenemos que la proposición $P \vee (Q \vee R)$ tiene el mismo significado que cualquiera de las proposiciones: