Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik

RESEARCH

Silvia Blum-Barkmin

Diskontinuität in der Linearen Algebra und ein Höherer Standpunkt

Qualitative Untersuchungen in verschiedenen berufsbiografischen Abschnitten und Konkretisierung einer Denkfigur

MOREMEDIA

Springer Spektrum

Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik

In der Reihe werden ausgewählte exzellente Forschungsarbeiten publiziert, die das breite Spektrum der mathematikdidaktischen Forschung am Hochschulstandort Essen repräsentieren. Dieses umfasst qualitative und quantitative empirische Studien zum Lehren und Lernen von Mathematik vom Elementarbereich über die verschiedenen Schulstufen bis zur Hochschule sowie zur Lehrerbildung. Die publizierten Arbeiten sind Beiträge zur mathematikdidaktischen Grundlagen- und Entwicklungsforschung und zum Teil interdisziplinär angelegt. In der Reihe erscheinen neben Qualifikationsarbeiten auch Publikationen aus weiteren Essener Forschungsprojekten.

Weitere Bände in der Reihe https://link.springer.com/bookseries/13887

Silvia Blum-Barkmin

Diskontinuität in der Linearen Algebra und ein Höherer Standpunkt

Qualitative Untersuchungen in verschiedenen berufsbiografischen Abschnitten und Konkretisierung einer Denkfigur

Springer Spektrum

Silvia Blum-Barkmin
Düsseldorf, Deutschland

Die vorliegende Dissertation wurde der Fakultät für Mathematik der Universität Duisburg-Essen zur Erlangung des Doktorgrades Dr. rer. nat. (Doktor der Naturwissenschaften) vorgelegt.
Tag der mündlichen Prüfung: 23. August 2021
Gutachter: Prof. Dr. Andreas Büchter und Prof. Dr. Nils Buchholtz

ISSN 2509-3169 ISSN 2509-3177 (electronic)
Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik
ISBN 978-3-658-37109-8 ISBN 978-3-658-37110-4 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-37110-4

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Marija Kojic
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Geleitwort

Die Diskussion über eine tragfähige fachliche und fachdidaktische Bildung von Mathematiklehrkräften wird – vor allem mit Blick auf das gymnasiale Lehramt – im deutschsprachigen Raum seit über 100 Jahren vor dem Hintergrund der Idee und des Ansatzes der „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“ (Felix Klein) geführt. Ein entsprechend ausgebildeter oder eingenommener Höherer Standpunkt, was auch immer dies sein mag, soll zu Abmilderung oder Bewältigung des Problems der „doppelten Diskontinuität“ (Felix Klein) beitragen. Diskontinuität bedeutet dabei, dass es aus Sicht der Betroffenen häufig kaum Verbindendes zwischen Mathematik, wie sie in der Schule inszeniert und betrachtet wird, und ihrer Erscheinungsform im Studium gibt.

Ursachen für Diskontinuitätserfahrungen können u. a. in Fachlehrveranstaltungen (vor allem zu Beginn des Studiums) gesucht werden, in denen nur selten explizit an die mathematische Vorbildung angeknüpft wird. In der Folge greifen (angehende) Lehrkräfte bei der fachlichen Vorbereitung des eigenen Unterrichts zumeist ausschließlich auf Schulbücher, nicht aber bewusst auf Studieninhalte zurück. Ein Höherer Standpunkt als Lösungsansatz für dieses Problem soll ermöglichen, das Gemeinsame der Mathematik in Schule und Hochschule zu sehen, entsprechende Gemeinsamkeiten zu nutzen und produktiv mit (zunächst) wahrgenommener Diskontinuität umzugehen.

Bis heute wird die Diskussion über die Idee des Höheren Standpunkts und ihre Umsetzung nahezu ausschließlich durch universitäre Lehrende geprägt. Dabei existieren mehrere unterschiedliche Auffassungen vom Höheren Standpunkt, die allerdings überwiegend nebulös bleiben; insbesondere lassen sich kaum stoffliche Konkretisierungen finden. Empirische Arbeiten im thematischen Umfeld des Höheren Standpunkts beschränken sich bislang im Wesentlichen auf Professionswissenstests. Mit ihrer bemerkenswerten Dissertation leistet Silvia Blum-Barkmin substanzielle Beiträge zur Schließung entsprechender Forschungslücken, indem sie

- Betrachtungen zur doppelten Diskontinuität und zum Höheren Standpunkt stofflich für die Lineare Algebra konkretisiert,
- die Perspektive der (angehenden) Lehrkräfte durch eine originell gestaltete empirische Untersuchung in die Diskussion einbringt,
- die Idee des Höheren Standpunkts theoretisch und empirisch fundiert, präzise als ausdifferenziertes Kompetenzkonstrukt fasst sowie
- den Einfluss der Praxis- und Berufserfahrung auf die Ausprägung eines entsprechenden Höheren Standpunkts untersucht.

Im Theorieteil werden – ausgehend von gründlichen Betrachtungen zur (einfachen und doppelten) Diskontinuität – die wesentlichen in der Geschichte der Mathematikdidaktik bisher aufgetretenen Interpretationen der Idee des Höheren Standpunkts aus der Literatur herausgearbeitet und kontrastiert. Der wissenschaftliche Diskurs wird bereits hier durch diese systematische Synopse und eine darauf basierende Synthese der Ideen zu einem, wenn zunächst auch noch vagen, Arbeitsbegriff vom Höheren Standpunkt bereichert. Darüber hinaus wirken die stofflichen Konkretisierungen durch entsprechende Analysen zur Linearen Algebra anregend. Bei den hauptsächlich betrachteten Begriffen „Vektor“ und „Skalarprodukt“ zeigt sich eindrucksvoll, dass einerseits zum Teil vergleichbare Sprech- und Schreibweisen in Schule und Hochschule verwendet werden, anderseits sich die Grundlegung der Begriffe und der Umgang mit ihnen aber erheblich unterscheiden.

Für ihre empirische Untersuchung wählt Silvia Blum-Barkmin ein einfallsreiches Design, um die Perspektive von Lehramtsstudierenden, Referendar*innen und berufserfahrenen Lehrkräften in die Diskussion einbeziehen zu können. Dabei werden nicht Einstellungen und Haltungen, z. B. zum erforderlichen Umfang der mathematischen und mathematikdidaktischen Bildung im Studium, erfragt, sondern die tatsächliche Wahrnehmung und Einordnung von Diskontinuität durch die Betroffenen erfasst. Dies gelingt durch eine komplex gestaltete Interviewsituation, in der die Befragten u. a. Auszüge aus einem Schulbuch und einem Lehrbuch zu den Begriffen „Vektor“ und „Skalarprodukt“ aufeinander beziehen sollen. Die Erhebung und Auswertung wird durch eine stoffdidaktisch fundierte Inhaltsanalyse der verwendeten Materialien vorbereitet. Mit den Ergebnissen dieser Materialanalyse als Grundlage und hoher Sensibilität für die individuellen Motive gelingt es, die Vielschichtigkeit des Umgangs mit Diskontinuität in den Blick zu nehmen. Die Auswertung der substanzreichen Interviews liefert tiefe Einblicke in das Phänomen, wobei u. a. die Bedeutung der Wissensgrundlagen deutlich hervortritt. Darüber hinaus zeigt sich, dass die Interviewten selbst das Bedürfnis haben, über die Wahrnehmung und Einordnung von Diskontinuität hinaus auch Wertungen zum Auftreten von Diskontinuität vorzunehmen; dieses Bewerten von Diskontinuität findet ausgehend von den Interviews dann auch Eingang in das vorgeschlagene Modell vom Höheren Standpunkt.

Diese als Kompetenzkonstrukt entwickelte Zielvorstellung vom Höheren Standpunkt stellt das zentrale Ergebnis der Arbeit dar, in das die oben genannten Vorarbeiten münden. Durch die hervorragende theoretische Fundierung und die minuziöse empirische Absicherung wird ein substanzieller Beitrag zur Diskussion über die Bildung von Mathematiklehrkräften geleistet, in den durch die empirische Untersuchung auch die Perspektive von (angehenden) Lehrkräften einfließt. Auch wenn alternative Fassungen denkbar sind, ist die Modellierung als Kompetenzkonstrukt umfassend und gut nachvollziehbar begründet. Die zentrale Rolle spielt dabei die kognitive Komponente mit vielschichtigen Wissensgrundlagen und den Tätigkeitsbereichen „Wahrnehmen“, „Erklären und Einordnen“ und „Konstruktives Bewerten“ (von Diskontinuität). Vor allem auf diese kognitive Komponente, neben die noch eine affektiv-motivationale tritt, kann im Rahmen der Lehrkräftebildung Einfluss genommen werden. Durch die in den Daten verankerten detaillierten Beschreibungen von Teiltätigkeiten lässt sich das vorgeschlagene Konstrukt direkt für anschließende Forschungsprojekte oder die Reflexion der curricularen Gestaltung von Lehramtsstudiengängen Mathematik nutzen.

Neben den inhaltlichen Beiträgen ist die vorliegende Dissertation auch hinsichtlich der Nachvollziehbarkeit des Erkenntnisgewinns vorbildlich; die hohe Darstellungsqualität führt zu einer durchweg lesenswerten Schrift.

Essen Andreas Büchter
im Januar 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 1
1.1 Thematische Einstimmung 1
1.2 Erkenntnisleitendes Interesse der Arbeit 4
1.3 Aufbau der Arbeit 6

Teil I Theoretische Grundlagen

2 Diskontinuität zwischen Schule und Hochschule 11
2.1 Begriffliches 11
2.2 Ansätze zur Beschreibung der Diskontinuität zwischen Schule und Hochschule 13
2.2.1 Modellierungen der Diskontinuität 13
2.2.2 Beschreibung durch Herausforderungen 17
2.2.3 Synthese der Ansätze 21
2.3 Diskontinuität in den Sichtweisen auf Mathematik 22
2.3.1 Hochschulische Sicht auf Mathematik 23
2.3.2 Sichtweisen auf Mathematik in der Schule 28
2.4 Diskontinuität in Begriffsbildungen, Begründungen und mathematischer Sprache 35
2.4.1 Begriffsbildungen in Schule und Hochschule 35
2.4.2 Begründung von Zusammenhängen in Schule und Hochschule 38
2.4.3 Mathematische Sprache 42

2.5 Diskontinuität im Bereich der Linearen Algebra 44
2.5.1 Sichtweisen auf Lineare Algebra in Schule und Hochschule 44
2.5.2 Konkretisierung: Begriffe der Linearen Algebra in der gymnasialen Oberstufe 50
2.6 Zusammenfassung 60

3 Doppelte Diskontinuität und der Höhere Standpunkt 65
3.1 Problematik der doppelten Diskontinuität 66
3.2 Der „Höhere Standpunkt“ 68
3.2.1 Der Höhere Standpunkt bei Klein und die Position von Toeplitz 70
3.2.2 Der Höhere Standpunkt im Projekt „Mathematik Neu Denken“ 74
3.2.3 Der Höhere Standpunkt in Studien zum Professionswissen von Lehrkräften 78
3.2.4 Weitere Interpretationen des Höheren Standpunktes 81
3.2.5 Vergleich der Interpretationen und Zwischenfazit 90
3.3 Wissensgrundlagen für einen Höheren Standpunkt 96
3.3.1 Schulbezogenes Fachwissen 96
3.3.2 Wissensaspekte eines Literacy-Modells für Mathematiklehrkräfte 101
3.4 Zusammenfassung 102

4 Sachanalysen zu den Begriffen Vektor und Skalarprodukt 105
4.1 Sachanalyse zum Begriff „Vektor“ 105
4.1.1 Vektorräume 106
4.1.2 Vektorraum von Pfeilklassen 111
4.1.3 Übliche Einführung von Vektorräumen 114
4.2 Sachanalyse zum Begriff „Skalarprodukt“ 115
4.2.1 Skalarprodukte 116
4.2.2 Das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ aus geometrischer Sicht 120
4.2.3 Übliche Einführung von Skalarprodukten 122

Teil II Fragestellung und Methodik

5 Forschungsfragen 127
5.1 Forschungsumfeld: Der Umgang von (angehenden) Lehrkräften mit Diskontinuität 127
5.2 Entwicklung der Forschungsfragen 133

6 Forschungsmethoden 139
6.1 Analyse der Lehr-Lern-Materialien 139
6.1.1 Ansätze für eine Materialanalyse zur Explikation von Diskontinuität 140
6.1.2 Beschreibung des gewählten Vorgehens 142
6.2 Entwicklung einer Methode zur Erfassung eines Höheren Standpunktes 145
6.2.1 Untersuchungsansatz und grundlegende methodische Entscheidungen 146
6.2.2 Vorgehen bei der Anwendung der Erhebungsmethode 155
6.2.3 Limitationen der Erhebungsmethode 161
6.3 Realisierung der Interviewstudie 163
6.3.1 Materialauswahl 163
6.3.2 Datenerhebung 167
6.4 Auswertung der Interviews 171
6.4.1 Datenaufbereitung und Vorbereitung der Analysen 172
6.4.2 Auswertung der Interviews mit qualitativen Inhaltsanalysen 174
6.4.3 Güte der Analysen 185

Teil III Ergebnisse der Materialanalyse und der Interviewstudie

7 Analysen von Lehr-Lern-Materialien für Schule und Hochschule 191
7.1 Analyse von Lehr-Lern-Materialien zum Vektorbegriff 192
7.1.1 Lehr-Lern-Materialien für die Hochschule zum Vektorbegriff 193
7.1.2 Lehr-Lern-Materialien für die Schule zum Vektorbegriff 196

7.1.3 Charakterisierung der Diskontinuität: Ergebnisse der vergleichenden Inhaltsanalyse ... 203
7.1.4 Ableitung von Kategorien für die Interviewauswertung ... 214
7.2 Analyse von Lehr-Lern-Materialien zum Begriff Skalarprodukt ... 220
7.2.1 Lehr-Lern-Materialien für die Hochschule zum Begriff Skalarprodukt ... 220
7.2.2 Lehr-Lern-Materialien für die Schule zum Begriff Skalarprodukt ... 225
7.2.3 Charakterisierung der Diskontinuität: Ergebnisse der vergleichenden Inhaltsanalyse ... 230
7.2.4 Ableitung von Kategorien für die Interviewauswertung ... 240

8 Ergebnisse der Interviewstudie: Wahrnehmung von Diskontinuität ... 247
8.1 Wahrgenommene Diskontinuität bei der Einführung von Vektoren ... 248
8.1.1 Aufbau des finalen Kategoriensystems ... 248
8.1.2 Beispiele für segmentierte und kodierte Interviews ... 253
8.1.3 Wahrgenommene Unterschiede ... 274
8.1.4 Wahrgenommene Gemeinsamkeiten ... 285
8.1.5 Zusammenfassung zentraler Beobachtungen ... 290
8.2 Wahrgenommene Diskontinuität bei der Einführung des Skalarproduktes ... 290
8.2.1 Aufbau des finalen Kategoriensystems ... 291
8.2.2 Beispiel für ein segmentiertes und kodiertes Interview ... 293
8.2.3 Wahrgenommene Unterschiede ... 302
8.2.4 Wahrgenommene Gemeinsamkeiten ... 311
8.2.5 Zusammenfassung zentraler Beobachtungen ... 314
8.3 Vergleichende Betrachtungen zwischen den Interviews zu Vektor und Skalarprodukt ... 315
8.4 Wahrnehmung von Diskontinuität in verschiedenen berufsbiografischen Abschnitten ... 315
8.4.1 Vergleich der Gruppen unter quantitativen Aspekten ... 316

8.4.2 Qualitative Unterschiede 320
8.4.3 Fazit zur Kontrastierung der Gruppen 326

9 Ergebnisse der Interviewstudie: Auseinandersetzung mit Diskontinuität **329**
9.1 Erwartungen an die Interviews – Darstellung der deduktiven Hauptkategorien 330
9.2 Erklärungen und Einordnung von Diskontinuität im Kontext von Vektoren 333
9.2.1 Überblick über das finale Kategoriensystem 333
9.2.2 Deskriptive Betrachtungen im Gesamtbild 335
9.2.3 Erklärungen mit dem Lernumfeld 337
9.2.4 Erklärungen ausgehend von den Lernenden 344
9.2.5 Erklärungen mit der Bedeutung und Verwendung von Vektoren 349
9.2.6 Erklärungen mit dem Anspruch an den Theorieaufbau 356
9.2.7 Erklärungen mit der Bedeutung von Anschauung 362
9.2.8 Erklärungen mit der Sequenzierung des Lehrgangs 364
9.2.9 Erklärungen mit bildungsadministrativen Vorgaben 366
9.2.10 Andere Erklärungsansätze 367
9.2.11 Zusammenfassung zentraler Beobachtungen 367
9.3 Erklärungen und Einordnung von Diskontinuität im Kontext des Skalarproduktes 369
9.3.1 Überblick über das finale Kategoriensystem 370
9.3.2 Deskriptive statistische Betrachtungen im Gesamtbild 371
9.3.3 Erklärungen mit dem Lernumfeld 373
9.3.4 Erklärungen mit den Lerngruppen im Mathematikunterricht und in der Hochschule 375
9.3.5 Erklärungen mit der Bedeutung und Verwendung des Skalarproduktes 377
9.3.6 Erklärungen mit dem Anspruch an den Theorieaufbau 380
9.3.7 Erklärungen mit der Bedeutung von Anschauung 384
9.3.8 Erklärungen mit dem bisherigen Theorieaufbau und Vorerfahrungen 386

9.3.9 Andere Erklärungsansätze ... 388
9.3.10 Zusammenfassung zentraler Beobachtungen ... 389
9.4 Vergleichende Betrachtungen zwischen den Interviews zu Vektor und Skalarprodukt ... 391
9.5 Bewertung von Diskontinuität ... 394
9.5.1 Positive Bewertungen schulischer Sichtweisen ... 394
9.5.2 Problematisierende Bewertungen schulischer Sichtweisen ... 396
9.5.3 Positive Bewertungen hochschulischer Sichtweisen ... 398
9.5.4 Problematisierende Bewertungen hochschulischer Sichtweisen ... 398
9.5.5 Reflektierte Bewertungen ... 400
9.6 Auseinandersetzung mit Diskontinuität in verschiedenen berufsbiografischen Abschnitten ... 401
9.6.1 Erklärungen und Einordnungen in verschiedenen berufsbiografischen Abschnitten ... 401
9.6.2 Bewertungen von Diskontinuität in verschiedenen berufsbiografischen Abschnitten ... 403
9.6.3 Fazit zur Kontrastierung der Gruppen ... 404

10 Konkretisierung der Zielvorstellung *Höherer Standpunkt* ... 407
10.1 Anforderungen an Lehrkräfte durch Diskontinuität zwischen Schule und Hochschule ... 409
10.2 Der Kompetenzbegriff und die Binnenstruktur des Konstruktes ... 411
10.2.1 Der Kompetenzbegriff ... 411
10.2.2 Das Verhältnis von Kompetenz und Performanz ... 415
10.2.3 Binnenstruktur des Konstruktes ... 417
10.3 Zugrundeliegende Wissensarten ... 419
10.3.1 Fachwissen ... 420
10.3.2 Metamathematisches Wissen ... 423
10.3.3 Wissen über curriculare Strukturen und Vernetzungen ... 426
10.3.4 Institutionenbezogenes Rahmungswissen ... 430
10.3.5 Situatives Wissen ... 433
10.4 Teilkompetenzen in drei Tätigkeitsbereichen ... 436
10.4.1 Wahrnehmen von Diskontinuität ... 436

10.4.2 Erklären und Einordnen von Diskontinuität. 440
10.4.3 Konstruktive Beurteilung von Diskontinuität 444
10.5 Affektiv-motivationale Komponente des Höheren Standpunktes 449
10.6 Ausprägungen einer Kompetenz *Höherer Standpunkt* 453
10.7 Rückschau auf die Konkretisierung und Kurzfassung des Konstruktes 455

Teil IV Fazit

11 Zusammenfassung, Diskussion und Ausblick 461
11.1 Zusammenfassung der Ergebnisse 461
11.2 Reflexion zum methodischen Vorgehen 468
11.3 Diskussion und Ausblick 471

Literatur 477

Abkürzungsverzeichnis

abs. H.	absolute Häufigkeit
Anz. Int.	Anzahl von Interviews
BK	Berufskolleg
BLK	Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung
Bsp.	Beispiel
dHK	deduktive Hauptkategorien
DMV	Deutsche Mathematiker-Vereinigung
F	Forschungsfrage
G1	Gruppe der Lehramtsstudierenden nach der Studieneingangsphase
G2	Gruppe der Studierenden im fortgeschrittenen Masterstudium
G3	Gruppe der Referendar:innen
G4	Gruppe der erfahrenen Lehrkräfte
GDM	Gesellschaft für Didaktik der Mathematik
GyGe	Gymnasien und Gesamtschulen
HK	Hauptkategorie
IPN	Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik
Kap.	Kapitel
KMK	Kultusministerkonferenz
LGS	Lineares Gleichungssystem
MNU	Verband zur Förderung des MINT-Unterrichts
MSB NRW	Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen
MT21	Mathematics Teaching in the 21st Century
MU	Mathematikunterricht

P	Proband:in
QIA	Qualitative Inhaltsanalyse
rel. H.	relative Häufigkeit
Seg.	Segment
SP	Skalarprodukt
V	Vektor
ZInf	Zusatzinformation

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 2.1 Aspekte und Dimensionen von Diskontinuität 22
Abbildung 3.1 Schulbezogenes Fachwissen als Teilfacette professioneller Kompetenz von Mathematiklehrkräften 98
Abbildung 3.2 Inhalte des schulbezogenen Fachwissens 100
Abbildung 4.1 Das Skalarprodukt aus geometrischer Sicht 121
Abbildung 5.1 Zusammenhang der Forschungsfragen und Forschungsziele 137
Abbildung 6.1 Aspekte und Dimensionen von Diskontinuität 144
Abbildung 6.2 Deduktives Kategoriensystem zur Analyse der Lehr-Lern-Materialien 145
Abbildung 6.3 Phasen des Interviews 154
Abbildung 6.4 Phasen der Erhebung 157
Abbildung 6.5 Ablaufschema der Inhaltsanalyse in Anlehnung an Kuckartz 178
Abbildung 7.1 Schematische Darstellung zu den Strukturelementen der betrachteten Lehreinheit zu Vektoren 193
Abbildung 7.2 Schematische Darstellung zu den Strukturelementen der betrachteten Einführungsseiten zu Vektoren 197
Abbildung 7.3 Schematische Darstellung zu den Strukturelementen der betrachteten Lehreinheit zu Vektoren 198

Abbildung 7.4 Schematische Darstellung zu den Strukturelementen des gewählten Ausschnitts der Lehreinheit zu Skalarprodukten 221
Abbildung 7.5 Schematische Darstellung zu den Strukturelementen des gewählten Ausschnitts der Lehreinheit zu Skalarprodukten 226
Abbildung 7.6 Schematische Darstellung zu den Strukturelementen der gewählten Ausschnitte aus der zweiten Lehreinheit 227
Abbildung 8.1 Boxplots zur Verteilung der Anzahlen der Kodierungen und der Anzahl der Subkategorien zur Wahrnehmung von Diskontinuität 277
Abbildung 8.2 Boxplots zur Verteilung der Anzahlen der Kodierungen und der Anzahl der Subkategorien zur Wahrnehmung von Diskontinuität 304
Abbildung 8.3 Anzahl der kodierten Subkategorien zur Wahrnehmung von Diskontinuität nach Gruppen 317
Abbildung 8.4 Anzahl der kodierten Subkategorien zur Wahrnehmung von Diskontinuität nach Gruppen 317
Abbildung 8.5 Aufteilung der Kodierungen zur Wahrnehmung von Diskontinuität auf die Hauptkategorien im Vergleich der Gruppen 319
Abbildung 8.6 Aufteilung der Kodierungen zur Wahrnehmung von Diskontinuität auf die Hauptkategorien im Vergleich der Gruppen 319
Abbildung 9.1 Boxplots zur Verteilung der Anzahl der Kodierungen und der Anzahl der Subkategorien zur Erklärung und Einordnung von Diskontinuität 336
Abbildung 9.2 Vorkommen der Erklärungs- und Deutungsansätze in den Interviews zur Diskontinuität bei Vektoren 369
Abbildung 9.3 Boxplots zur Verteilung der Anzahl der Kodierungen und der Anzahl der Subkategorien zur Erklärung und Einordnung von Diskontinuität 372
Abbildung 9.4 Vorkommen der Erklärungs- und Deutungsansätze in den Interviews zur Diskontinuität beim Skalarprodukt 390
Abbildung 9.5 Perspektiven bei der Auseinandersetzung mit Diskontinuität 403

Abbildung 10.1 Das Gesamtkonstrukt Höherer Standpunkt als Kompetenz 457
Abbildung 11.1 Das Gesamtkonstrukt Höherer Standpunkt als Kompetenz 475

Tabellenverzeichnis

Tabelle 2.1	Schulbuchkapitel zur Analytischen Geometrie/Linearen Algebra	48
Tabelle 2.2	Begriffe der Linearen Algebra in aktuellen Schulbüchern	53
Tabelle 3.1	Ebenen mathematischen Wissens nach Deiser et al	88
Tabelle 3.2	Unterschiedliche Interpretationen der Aspekte eines Höheren Standpunktes	92
Tabelle 6.1	Zusammensetzung der Stichprobe in der durchgeführten Interviewstudie	170
Tabelle 6.2	Ausprägungen der QIA	176
Tabelle 6.3	Merkmale der Qualitativen Inhaltsanalysen zur Ausprägung des Höheren Standpunktes	186
Tabelle 8.1	Übersicht über die Haupt- und Subkategorien zur Wahrnehmung der Diskontinuität bei der Einführung von Vektoren	252
Tabelle 8.2	Wahrnehmung der Unterschiede in den Lehr-Lern-Materialien aus quantitativer Sicht	278
Tabelle 8.3	Auf der Ebene der Einzelinterviews meistkodierte Subkategorien zur Wahrnehmung von Diskontinuität	284
Tabelle 8.4	Übersicht über die Haupt- und Subkategorien zur Wahrnehmung der Diskontinuität bei der Einführung des Skalarproduktes	293
Tabelle 8.5	Wahrnehmung der Unterschiede in den Lehr-Lern-Materialien aus quantitativer Sicht	306
Tabelle 8.6	Auf der Ebene der Einzelinterviews meistkodierte Kategorien zur Wahrnehmung von Diskontinuität	309

Tabelle 8.7 Verlauf der Äußerungen eines Masterstudenten zur Gestaltung des Theorieaufbaus 310
Tabelle 8.8 Ergebnisse aus dem Gruppenvergleich zur Wahrnehmung von Diskontinuität 326
Tabelle 9.1 Übersicht über die Haupt- und Subkategorien zur Erklärung und Einordnung von Diskontinuität 334
Tabelle 9.2 Anzahl aufgerufener Hauptkategorien bei der Erklärung und Einordnung von Diskontinuität 335
Tabelle 9.3 Häufigkeiten und Verteilung der Subkategorien zu den Erklärungen mit dem Lernumfeld 337
Tabelle 9.4 Häufigkeiten und Verteilung der Subkategorien zu den Erklärungen ausgehend von den Lernenden 344
Tabelle 9.5 Häufigkeit und Verteilung der Subkategorien zu den Erklärungen mit der Bedeutung und Verwendung von Vektoren 349
Tabelle 9.6 Häufigkeit und Verteilung der Subkategorien zu den Erklärungen mit dem Anspruch an den Theorieaufbau und Strenge 357
Tabelle 9.7 Häufigkeit und Verteilung der Subkategorien zu den Erklärungen mit der Bedeutung von Anschauung 362
Tabelle 9.8 Häufigkeit und Verteilung der Subkategorie zu den Erklärungen mit der Sequenzierung des Lehrgangs 365
Tabelle 9.9 Häufigkeit und Verteilung der Subkategorie zu den Erklärungen mit bildungsadministrativen Vorgaben 366
Tabelle 9.10 Häufigkeit und Verteilung zur generischen Restkategorie 367
Tabelle 9.11 Übersicht über die Haupt- und Subkategorien zur Erklärung und Einordnung von Diskontinuität 370
Tabelle 9.12 Anzahl aufgerufener Hauptkategorien bei der Erklärung und Einordnung von Diskontinuität 371
Tabelle 9.13 Häufigkeiten und Verteilung der Subkategorien zu den Erklärungen mit dem Lernumfeld 373
Tabelle 9.14 Häufigkeiten und Verteilung der Subkategorie zu den Erklärungen mit den Lerngruppen 376
Tabelle 9.15 Häufigkeit und Verteilung der Subkategorien zu den Erklärungen mit der Bedeutung und Verwendung des Skalarproduktes 377

Tabelle 9.16 Häufigkeit und Verteilung der Subkategorien zu den Erklärungen mit dem Anspruch an den Theorieaufbau und Strenge 381
Tabelle 9.17 Häufigkeit und Verteilung der Subkategorien zu den Erklärungen mit der Bedeutung von Anschauung 384
Tabelle 9.18 Häufigkeit und Verteilung der Subkategorien zum bisherigen Theorieaufbau und den Vorerfahrungen 387
Tabelle 9.19 Häufigkeit und Verteilung zur generischen Restkategorie 388
Tabelle 9.20 Gegenüberstellung von Subkategorien zur Bedeutung und Verwendung von Vektoren und des Skalarproduktes 392
Tabelle 9.21 Ergebnisse aus dem Gruppenvergleich zur Auseinandersetzung mit Diskontinuität 404
Tabelle 11.1 Spezifische Ausprägung von Diskontinuität in der Linearen Algebra auf Grundlage der Materialanalyse 462

Einleitung

1

Die Studieneingangsphase Mathematik hält für Lernende in den Anfängervorlesungen des Fach- und des gymnasialen Lehramtsstudiengangs einige Überraschungen bereit. Mag zunächst die Erwartung bestehen, die Hochschule knüpfe mit den Vorlesungen zur Analysis und zur Linearen Algebra an die Betrachtungen der Schule an und führe diese gewissermaßen weiter, zeigt sich alsbald, dass in den Vorlesungen vielmehr vermeintlich bekannte Inhalte in einem völlig anderen Licht erscheinen. Für einen bestimmten mathematischen Begriff können sich Unterschiede darin äußern, welche Motivation bei der Einführung zugrunde gelegt wird, welche Definition vorliegt, welche weiteren Begriffe vorausgehen bzw. sich anschließen oder welche Verwendung des Begriffs erkennbar wird. In diesem Zusammenhang kann daher von zwei verschiedenen Sichtweisen gesprochen werden: von einer schulischen Sichtweise und von einer hochschulischen Sichtweise auf Mathematik im Allgemeinen und ihre Begriffe im Speziellen.

1.1 Thematische Einstimmung

Die genauere Betrachtung dieser Unterschiede, deren Einordnung und die Frage der Implikationen für die universitäre Ausbildung von Mathematiklehrkräften bilden den Hintergrund, vor dem sich das Forschungsinteresse formiert hat, dem in dieser Arbeit nachgegangen wird.

Unterschiede in den Sichtweisen auf Begriffe aus der Linearen Algebra in Schule und Hochschule
Im Bereich der Linearen Algebra werden die Unterschiede zwischen schulischen und hochschulischen Sichtweisen sehr deutlich z. B. bei den Begriffen *Vektor*

S. Blum-Barkmin, *Diskontinuität in der Linearen Algebra und ein Höherer Standpunkt*, Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-37110-4_1

und *Skalarprodukt* erkennbar. Während in der Schule Vektoren typischerweise als geometrische Vektoren im zwei- und dreidimensionalen Raum kennengelernt werden, ist der Vektorbegriff in der Hochschule in die Vektorraumtheorie eingebettet. In der Schule besteht ein gängiger Zugang darin, den Vektorbegriff zur Beschreibung von Bewegungen im Raum einzuführen, in der Hochschule ist der Vektorraumbegriff (und damit auch der Vektorbegriff) dagegen ein Mittel zur Beschreibung von Strukturen. Während in der Schule das Verschieben und Verbinden von Punkt und Bildpunkt auf der Grundlage einer hohen augenscheinlichen Plausibilität stattfindet, werden in der Hochschule Zusammenhänge mit axiomatisch-deduktiven Mitteln begründet. Das Skalarprodukt wird in der Schule im Zwei- und Dreidimensionalen eingeführt und findet seine Anwendung bei der Analyse von Lagebeziehungen zwischen geometrischen Objekten. Typischerweise erfolgt ein Zugang zum Standardskalarprodukt über den Satz des Pythagoras oder über Projektionen. In der Hochschule werden verschiedene Skalarprodukte dagegen als spezielle Bilinearformen thematisiert, die Vektorräume mit einer zusätzlichen Struktur für die Längen- und Winkelmessung ausstatten.

Auch in der Analysis und in der Stochastik lässt sich Ähnliches feststellen: T. Bauer, Müller-Hill und Weber (2020) zeigen dies anhand des Integral-Begriffs und des Begriffs des Binomialkoeffizienten (S. 131 ff.).

Das Phänomen Diskontinuität zwischen Schule und Hochschule

In den divergenten Sichtweisen auf einzelne Begriffe spiegelt sich das vielschichtige Phänomen der Diskontinuität. Mit dieser Sprechweise wird im mathematikdidaktischen Diskurs in Anlehnung an den Mathematiker Felix Klein auf die umfassende „Kluft zwischen Schulmathematik und universitärer Mathematik“ (T. Bauer & Partheil, 2009, S. 86) Bezug genommen. Zwar gibt es auch in anderen Domänen deutliche Differenzen zwischen Schulfach und Wissenschaft (Beispiele aus den Bereichen Sport, Chemie und Religion sind bei Meister, Hericks und Kreyer (2020) zu finden). In der Mathematik sind die Folgen dieser Kluft aber in besonderem Maße in Befunden zu den Schwierigkeiten von Studienanfänger:innen und in den Daten über Studienabbrüche in der Eingangsphase des Mathematikstudiums erkennbar (vgl. Dieter, 2012; Geisler, 2020).

Der Hintergrund, vor dem Diskontinuität entsteht, ist die andere Ausrichtung des Mathematiktreibens in der gymnasialen Oberstufe und in der Hochschule, die sich aus den verschiedenen gesellschaftlichen Funktionen dieser beiden Institutionen und den damit zusammenhängenden Zielen ergibt. Der schulische Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe soll eine vertiefte Allgemeinbildung, allgemeine Studierfähigkeit sowie wissenschaftspropädeutische Bildung vermitteln (Kultusministerkonferenz [KMK], 2012). Dieser umfassende

Bildungsauftrag soll durch die Ausrichtung des Mathematikunterrichts an den Grunderfahrungen nach Winter (1995) realisiert werden. Dabei ist das Ziel, Mathematik als eigenständige Wissenschaft kennenzulernen, das mit der Grunderfahrung „mathematische Gegenstände und Sachverhalte […] als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen“, angesprochen wird, nur eines von mehreren Zielen. Andersherum spielt das Ziel schulischen Mathematikunterrichts, „Mathematik als Werkzeug, um Erscheinungen der Welt aus Natur, Gesellschaft, Kultur, Beruf und Arbeit in einer spezifischen Weise wahrzunehmen und zu verstehen“ (ebd., S. 11), in den Grundlagenvorlesungen der Fachstudiengänge kaum erkennbar eine Rolle. Im Gegenteil – die Gegenstände mathematischer Betrachtungen in der Hochschule können ganz ohne einen Bezug zu den Erscheinungen der Umwelt entwickelt werden.

Diskontinuität als Herausforderung für die universitäre Lehrerbildung (und ihre Didaktik)

Die Diskontinuität zwischen Schule und Hochschule betrifft zwar zunächst einmal alle Studierenden in stark mathematikhaltigen Studiengängen am Übergang zwischen Schule und Hochschule, jedoch ist die Thematik für Lehramtsstudierende von besonderer Tragweite. Zum einen führt nach Meister (2020) fachübergreifend für Lehrkräfte die immer präsente künftige Berufsperspektive dazu, dass fachwissenschaftliches Wissen häufig in erster Linie hinsichtlich der späteren Verwertbarkeit für den Unterricht bewertet wird (S. 121). Dieser Reflex erschwert bereits das Einlassen auf die (hochschulische) Logik des Fachs, auf die wissenschaftlichen Perspektiven und auf andere Denkmuster und stellt so aus hochschuldidaktischer und professionalisierungstheoretischer Perspektive eine zentrale Verständnishürde dar. Darüber hinaus sehen T. Bauer et al. (2020) die Gefahr, dass die (trotz der Hürden) angeeigneten fachlichen Studieninhalte gänzlich in Vergessenheit geraten oder zu trägem Wissen werden, sodass die fachwissenschaftlichen Inhalte nicht mit den dazu im Bruch stehenden schulischen Fachinhalten verknüpft und zu deren Reflexion, Aufbereitung und Vermittlung im Unterricht genutzt werden (S. 128).

In der fachdidaktischen Forschung und Diskussion zur universitären, gymnasialen Lehramtsausbildung für das Unterrichtsfach Mathematik ist Diskontinuität auf mehreren Ebenen präsent: Auf einer normativen Ebene wird häufig unter Verwendung der Metapher vom *Höheren Standpunkt* über die Idealvorstellung von der Fachlichkeit angehender Mathematiklehrkräfte reflektiert (vgl. T. Bauer, 2017; Hefendehl-Hebeker, 2013; Danckwerts, 2013). Auf der praktischen Ebene wird eine Vielzahl von Maßnahmen entwickelt, um den angehenden Lehrkräften fachliche Bezüge zwischen Schule und Hochschule zugänglich zu machen.

Seit den 2010er-Jahren ist eine Vielzahl von Aktivitäten in dieser Richtung dokumentiert (vgl. Ableitinger, Kramer & Prediger, 2013; Roth, T. Bauer, Koch und Prediger, 2015) und es findet Entwicklungsforschung in diesem Feld statt (drei Beispiele neben vielen weiteren sind die Ansätze von Kempen, 2018; Skutella & Weygandt, 2019 sowie Schadl, Rachel & Ufer, 2020). Ein wichtiges Element vieler Maßnahmen sind besondere Aufgaben, die als Schnittstelle zwischen Schule und Hochschule fungieren sollen (vgl. T. Bauer, 2013; Ableitinger, 2015; Zessin, 2020). Auf Seiten der quantitativen, empirischen Professionsforschung spiegelt sich die Diskontinuität in der Ausdifferenzierung des Fachwissens-Konstruktes (vgl. Heinze et al., 2016). Demnach benötigen Mathematiklehrkräfte neben dem akademischen Fachwissen auch ein spezielles Fachwissen über die fachlichen Zusammenhänge zwischen Schule und Hochschule.

Im Blickfeld fachdidaktischer Forschung ist auch ein weiterer Aspekt professioneller Kompetenz im Zusammenhang mit Diskontinuität: die Überzeugungen und Werthaltungen. Becher und Biehler (2017) untersuchen die Nutzenerwartungen von Lehramtsstudierenden gegenüber den Fachvorlesungen und Isaev und Eichler (2021) betrachten den Einfluss von Schnittstellen-Aufgaben auf Überzeugungen zu den inhaltlichen Verbindungen zwischen Schule und Hochschule und zum Berufsfeldbezug fachlicher Studieninhalte.

1.2 Erkenntnisleitendes Interesse der Arbeit

Sowohl in Aufgaben zu den Schnittstellen-Themen als auch in den Tests der Professionswissensforschung zum relevanten Fachwissen über die fachlichen Bezüge zwischen Schule und Hochschule ist eine bestimmte Perspektive auf Diskontinuität vorgegeben. Wenngleich das Forschungsfeld um Diskontinuität und Lehrerbildung aktuell von einer großen Dynamik geprägt ist, lag bisher die Frage, welche Perspektive auf Diskontinuität angehende Mathematiklehrkräfte selbst angesichts konkreter inhaltlicher Sachverhalte einnehmen, kaum im Fokus der fachdidaktischen Forschung. In diesem Zusammenhang sind insbesondere folgende Teilfragen bisher offengeblieben: *Wo sehen Lehramtsstudierende in konkreten fachlichen Zusammenhängen Diskontinuität zwischen Schule und Hochschule und wie sieht ihre Auseinandersetzung mit der erkannten Diskontinuität aus?* Das heißt*, wie wird Diskontinuität eingeordnet, erklärt oder gedeutet* und *welche Beziehungen werden zwischen den differenten Sichtweisen von Schule und Hochschule hergestellt?* Eine Beantwortung dieser Fragen würde das Bild vom Umgang angehender Mathematiklehrkräfte mit Diskontinuität ergänzen. Erste empirische Untersuchungen in dieser Richtung unternimmt Schlotterer (2020) für den Bereich der Analysis. Im Bereich der Linearen Algebra fehlen bisher noch entsprechende Erkenntnisse.

Da den professionsspezifischen Praxiserfahrungen im Lehramtsstudium ein Einfluss auf die Entwicklung des professionellen Wissens zugesprochen werden kann, erscheint es bei der empirischen Beschäftigung mit den oben aufgeworfenen Fragen lohnend, verschiedene Zeitpunkte im Lehramtsstudium zu berücksichtigen (Kreis & Staub, 2010, S. 210). Darüber hinaus wären aber auch Erkenntnisse zum Umgang angehender Lehrkräfte in der zweiten Ausbildungsphase und von Lehrkräften mit substanzieller Berufserfahrung wünschenswert, um die Perspektive über das Lehramtsstudium hinaus auf die Praxis zu erweitern und den Einfluss der Unterrichtserfahrung stärker in den Blick zu nehmen. Diese Erweiterung der Perspektive trägt einem Verständnis von Professionalität als Dimension, die in Entwicklung begriffen ist, und nicht als Zuschreibung oder Eigenschaft, die einer Lehrperson mit dem Eintritt in das Berufsleben unmittelbar zukommt, Rechnung (Hericks & Meister, 2020, S. 6). Einblicke in den Umgang mit Diskontinuität während verschiedener Abschnitte einer typischen Berufsbiografie von Mathematiklehrkräften könnten neue Impulse für die Diskussionen über eine realisierbare Zielvorstellung im Rahmen der gymnasialen Lehramtsausbildung und für die Gestaltung von Maßnahmen, die auf die Diskontinuität eingehen, geben.[1] Die vorliegende Arbeit verfolgt vor diesem Hintergrund die folgenden Ziele:

Das Hauptziel der Arbeit besteht darin, anhand von Inhalten aus dem Bereich der Linearen Algebra zunächst Erkenntnisse zur Wahrnehmung von Diskontinuität seitens der Lehramtsstudierenden, der Referendar:innen sowie berufserfahrener Lehrkräfte zu gewinnen. Darauf aufbauend geht es insbesondere um den Umgang der (angehenden) Lehrkräfte mit Diskontinuität im Bereich der Linearen Algebra. Dabei soll erforscht werden, wie die wahrgenommene Diskontinuität erklärt und eingeordnet und damit analysiert wird.

Vor dem Hintergrund dieser Erkenntnisse besteht das zweite Ziel dieser Arbeit darin, die Beobachtungen aus der Empirie zu nutzen, um die normative Zielvorstellung von einem Höheren Standpunkt der Lehrkräfte angesichts der Herausforderungen durch Diskontinuität für die universitäre Mathematiklehrerbildung im Bereich der Linearen Algebra praxisnah weiterzuentwickeln. Deshalb wird bei der Beschäftigung mit den oben aufgeworfenen Fragen die Vorstellung vom Höheren Standpunkt dahingehend aufgegriffen, dass er im Rahmen

[1] Unter einer typischen Berufsbiografie wird in diesem Zusammenhang das Absolvieren des Lehramtsstudiengangs Mathematik für die gymnasiale Oberstufe (Sekundarstufe II) und anschließend des Referendariats sowie der Eintritt in den Lehrerberuf und dessen Ausübung verstanden.

dieser Arbeit als eine individuelle Ressource für eine differenzierte Wahrnehmung und einen konstruktiven Umgang mit Diskontinuität interpretiert und zum Gegenstand empirischer Untersuchungen mit (angehenden) Lehrkräften gemacht wird. Die Zielvorstellung wird dann – ausgehend von den empirisch gewonnenen Erkenntnissen über Ausprägungen eines Höheren Standpunktes zu Themen der Linearen Algebra der gymnasialen Oberstufe in verschiedenen Abschnitten der Berufsbiografie von Lehrkräften – konkretisiert.

Eine Voraussetzung für die Umsetzung dieses Vorhabens ist ein empirischer Zugang zum Konstrukt *Höherer Standpunkt*. Daher besteht ein Teilziel dieser Arbeit darin, eine Methode zur Erfassung eines Höheren Standpunktes bei (angehenden) Mathematiklehrkräften zu entwickeln.

1.3 Aufbau der Arbeit

Die Arbeit ist in vier Teile gegliedert: einen Teil zu den theoretischen Grundlagen, einen Teil zur Vertiefung des Erkenntnisinteresses sowie zur Methodik, einen empirischen Teil sowie den letzten Teil, in dem die Zusammenführung der Grundlagen und der empirischen Ergebnisse zur Weiterentwicklung der Zielvorstellung stattfindet und ein Fazit gezogen wird.

In den theoretischen Grundlagen geht es um die Aufarbeitung der Themen Diskontinuität und insbesondere von Diskontinuität im Kontext der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik, um den Höheren Standpunkt und die im Rahmen der Arbeit relevanten fachlichen Gegenstände aus der Linearen Algebra. Im zweiten Kapitel steht die Thematik der Diskontinuität zwischen Schule und Hochschule im Vordergrund. Dabei findet eine stufenweise Annäherung an das Phänomen statt. Zunächst wird das grundlegende Verständnis des Begriffs geklärt und es werden Aspekte von Diskontinuität herausgearbeitet, auf die im Anschluss vertieft eingegangen wird. Beginnend bei den unterschiedlichen Sichtweisen auf Mathematik in Schule und Hochschule geht es danach um Unterschiede zwischen Schule und Hochschule in den Aspekten Begriffsbildung, Begründungen und Sprache. Nach diesen domänenübergreifenden Darstellungen wird entsprechend dem Fokus der Arbeit vertieft auf Diskontinuität im Bereich der Linearen Algebra eingegangen. Im dritten Kapitel geht es um die besondere Problematik der Diskontinuität in der Lehramtsausbildung und um die prominente Zielvorstellung des Höheren Standpunktes in Bezug auf die Fachlichkeit von (angehenden) Mathematiklehrkräften. Dabei wird eine Bandbreite verschiedener Kontexte, in denen der Höhere Standpunkt heute aufgegriffen wird, herangezogen, um Interpretationen der Zielvorstellung herauszuarbeiten. Auch der historische Ursprung findet Berücksichtigung und wird zu den modernen Auffassungen in Beziehung gesetzt. In der vorliegenden Arbeit werden die Diskontinuität zwischen Schule und Hochschule und die Ausprägung eines Höheren Standpunktes in Bezug auf die Lineare Algebra der gymnasialen Oberstufe anhand der Begriffe „Vektor“ und „Skalarprodukt“ erarbeitet. Das vierte Kapitel liefert mit Sachanalysen zu den beiden Begriffen eine stoffliche Grundlage für die inhaltlichen Betrachtungen in den empirischen Untersuchungen.

Im zweiten Teil der Arbeit geht es um die vertiefte Entfaltung der Fragestellung vor dem Hintergrund der Theorie und des Forschungsstands zum Umgang mit Diskontinuität sowie um die Beschreibung der angewendeten Methoden. Im fünften Kapitel wird dazu zunächst ein Überblick über den Stand der Forschung im Umfeld dieser Arbeit gegeben, außerdem werden die Forschungsfragen formuliert. Das sechste Kapitel beginnt mit der Beschreibung des methodischen Vorgehens bei der Erfassung der Diskontinuität anhand konkreter Lehr-Lern-Materialien aus Schule und Hochschule zu Themen der Linearen Algebra. Danach folgt die Entwicklung der Methode, mit der die Ausprägungen des Konstruktes *Höherer Standpunkt* erfasst werden können. Anschließend wird die Implementation der entwickelten Methode im Rahmen einer Studie mit (angehenden) Mathematiklehrkräften dargestellt.

Der dritte, empirische Teil umfasst die Ergebnisse der durchgeführten Untersuchungen und den konstruktiven Vorschlag zum Höheren Standpunkt. Das siebte Kapitel enthält die Ergebnisse der Analyse der Lehr-Lern-Materialien aus Schule und Hochschule zu den Begriffen „Vektor“ und „Skalarprodukt“. Diese werden für die Begriffe getrennt jeweils nach dem folgenden Aufbau aufbereitet: An einen einführenden Überblick über die Lehrgänge schließen sich jeweils zunächst eine fachliche Zusammenfassung und eine Charakterisierung der Materialien an, bevor die Ergebnisse bezüglich einzelner Aspekte von Diskontinuität dargestellt werden. Die Ergebnisse der Studie mit den Lehramtsstudierenden, Referendar:innen und den erfahrenen Lehrkräften sind Gegenstand des achten und neunten Kapitels. Zunächst wird im achten Kapitel die Wahrnehmung der Befragten auf Diskontinuität dargelegt, erst für den Vektorbegriff, anschließend für das Skalarprodukt. Im neunten Kapitel werden die Ergebnisse zur Auseinandersetzung mit Diskontinuität im Rahmen der Interviewstudie präsentiert. Im zehnten Kapitel findet aufbauend auf den Ergebnissen der empirischen Untersuchungen die Formulierung der konkretisierten Zielvorstellung von einem Höheren Standpunkt zur Linearen Algebra der gymnasialen Oberstufe statt.

Der vierte und letzte Teil dieser Arbeit beinhaltet das Fazit. Das zugehörige elfte Kapitel beginnt mit der Zusammenfassung der gewonnenen Ergebnisse und einer Reflexion des methodischen Vorgehens in dieser Arbeit. Anschließend findet eine Diskussion der Ergebnisse statt und es werden offene Fragen festgehalten, die sich im Anschluss an die vorliegende Arbeit stellen.