Öffnen Sie die Büchse der Algebra

# Lineare Algebra *kompakt*

## FÜR DUMMIES®

**Auf einen Blick:**

- Lineare Gleichungssysteme systematisch lösen
- Das Skalarprodukt, Vektoren, und Vektorräume verstehen
- Gleichungen als Matrizen darstellen und damit rechnen
- Lineare Unabhängigkeit und Basisvektoren begreifen

E.-G. Haffner

### Körpergesetze (gelten in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$)

Assoziativgesetz: $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

Kommutativgesetz: $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$

Neutralelemente (Null, Eins): $x + 0 = 0 + x = x$, $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

Inverse Elemente: $x + (-x) = 0$, $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ für $x \neq 0$

Distributivgesetz: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

## *Vektoroperationen (am Beispiel $\mathbb{R}^3$)*

Vektoraddition: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$

Skalare Multiplikation: $k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x \\ k \cdot y \\ k \cdot z \end{pmatrix}$

Skalarprodukt: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

Kreuzprodukt: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$

Spatprodukt: $[\vec{u}\vec{v}\vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

Norm/Betrag: $\left\| \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2}$

Winkel zwischen Vektoren: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$ oder $\sin\alpha = \dfrac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$

## Matrix-Bezeichnungen

| Name | Symbol | Bedeutung |
|---|---|---|
| *Transponierte* | $M^T$ | Vertauschen von Zeilen und Spalten |
| *Adjungierte* | $M^*$ | Transposition und komplexe Konjugation $M^* = \bar{M}^T = \overline{M^T}$ |
| *Inverse* | $M^{-1}$ | Eindeutige Matrix mit $M^{-1} \cdot M = I$ |
| *Komplementäre Matrix, Adjunkte* | $\tilde{M}$ | Transponierte der Kofaktormatrix: $\tilde{M} = \det(M) \cdot M^{-1}$ |
| *Charakteristische Gleichung von M* | $\det(\lambda \cdot I - M) = 0$ | Die λs sind die *Eigenwerte* von M |

## Matrixeigenschaften I

| Eigenschaft | Bezeichnung |
|---|---|
| $\det(M) \neq 0$ | M ist *regulär* und *invertierbar* |
| $M^n = M$ | M ist *idempotent* |
| $M^n = Nullmatrix$ | M ist *nilpotent* |

## Matrixeigenschaften II

| Eigenschaft | Einträge rein reell | Einträge komplex |
|---|---|---|
| $M = M^*$ | *symmetrisch* | *hermitesch* |
| $M = -M^*$ | *schiefsymmetrisch* | *schiefhermitesch* |
| $M^{-1} = M^*$ | *orthogonal* | *unitär* |

## Dimensionssatz für lineare Abbildung f

$\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f))$

## Produktsatz für Determinanten

$\det(M \cdot N) = \det(M) \cdot \det(N)$

Ernst Georg Haffner

# Lineare Algebra kompakt für Dummies

Fachkorrektur von Dr. Patrick Kühnel

WILEY

WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA

**Ernst Georg Haffner**

Lineare Algebra kompakt für Dummies

Fachkorrektur von Dr. Patrick Kühnel

WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA

**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

1. Auflage 2014



E-Book: Beltz Bad Langensalza GmbH, Bad Langensalza

ePub ISBN: 978-3-527-68789-3

mobi ISBN: 978-3-527-68790-9

Print: ISBN: 978-3-527-71108-6

# Inhaltsverzeichnis

# Stichwortverzeichnis

# Einführung

Wollen Sie richtig Eindruck bei Ihren Freunden und Verwandten schinden, so verwenden Sie doch einfach bei passender Gelegenheit mathematische Fachausdrücke wie beispielsweise *Algebra*, *Matrix* oder *Vektor*. Wenn Sie diese Nomen dann noch mit spezifischen Adjektiven wie *linear*, *affin* oder *skalar* kombinieren, bleibt die offene oder unausgesprochene Bewunderung gewiss nicht aus.

Voraussetzung dafür ist selbstverständlich, dass Sie genau wissen, worum es sich dabei handelt. Die Basis dafür haben Sie bereits erfolgreich gelegt, indem Sie dieses Buch in Händen halten.

## Zu diesem Buch

In diesem Buch werden Sie rasch und ohne Schnörkel alles Wichtige über die lineare Algebra erfahren.

»Lineare Algebra kompakt für Dummies« beinhaltet überwiegend die Grundlagen der linearen Algebra, die bereits für Schüler von Interesse sein könnten. Es handelt sich dabei um eine verkürzte Version der Ausgabe »Lineare Algebra für Dummies«, die auch tiefgründige und weiterführende Erkenntnisse für Studierende beinhaltet.

Mathematische Abhandlungen und selbst die meisten Lehrbücher neigen dazu, möglichst knapp und kompakt ihre Inhalte zu vermitteln. »Jedes Wort zuviel verwässert die reine Lehre«, das ist die Devise. Warum aufwändig einen Sachverhalt erklären, wenn man genauso gut eine kryptische Formel angeben kann, die – allerdings nur für Eingeweihte – alles Wesentliche bereits enthält? Viele Leser werden durch diese Art von Mathematik abgeschreckt, wenn nicht gar verängstigt.

Ich verspreche Ihnen, dass dieses Buch anders ist. Es wird Sie sanft in eine der zweifellos wichtigsten Teilgebiete der Mathematik entführen. Sie werden sich wundern, wie viel Spaß und Unterhaltung sogar die kompliziertesten Sachverhalte bereiten können! Dieses Buch wird Sie auf eine Weise ansprechen, die Sie bisher nicht kannten, aber an die Sie sich schnell gewöhnen werden. Es behandelt überraschende, spannende aber auch alltägliche Themen.

Dabei können Sie das Buch in beliebiger Reihenfolge durcharbeiten. Es zwingt Sie niemand dazu, das Buch von vorne bis hinten Seite für Seite zu lesen. Wie andere *Dummies*-Bücher ist auch dieses Buch so aufgebaut, dass Sie so viel wie möglich darin herumblättern können – schließlich ist es Ihr Buch. Die lineare Algebra bietet so viele interessante Aspekte, dass Sie immer wieder davon fasziniert sein werden!

# Konventionen in diesem Buch

Zahlreiche Bücher verwenden etliche Konventionen, die Sie kennen sollten, bevor Sie die Lektüre starten können. Das ist hier nicht der Fall. Es gibt nur einige wenige Konventionen, die Ihnen helfen werden, sich schnell zurechtzufinden:

- *Kursivschrift* kennzeichnet wichtige Fachbegriffe und hebt bedeutsame Worte hervor.
- **Fettschrift** wird für Schlüsselworte in Aufzählungen und in Aktionen bei nummerierten Schritten verwendet. Ebenso sind wichtige Begriffe fett markiert, die jedoch keine Fachbegriffe der linearen Algebra darstellen.

- KAPITÄLCHEN bleibt Verweisen auf Webadressen vorbehalten.

# Was Sie nicht lesen müssen

Es gibt im gesamten Buch immer wieder interessante und nützliche Aspekte bei der Behandlung der Themen, die Sie jedoch nicht unbedingt lesen müssen, um die weiteren Abschnitte zu verstehen. Diese Informationen habe ich Ihnen in die grau unterlegten Kästen gepackt.

Wenn ein Satz mit dem Symbol »Achtung Technik« (das ulkige Gesicht und der erhobene Zeigefinger) gekennzeichnet ist, verweist er auf weiterführende oder tiefer gehende Facetten für Insider. Wenn Sie zurzeit noch kein Insider sind, ist das nicht schlimm. Vielleicht werden Sie später einmal wieder das Buch in die Hand nehmen wollen und dann sind die »Achtung Technik« Einschübe ihre Lieblingslektüre!

# Törichte Annahmen über den Leser

Wenn Sie jetzt nicht zufällig in einer Buchhandlung stehen und versehentlich dieses *Dummies*-Buch mit einem Kochbuch für südfranzösische Desserts verwechselt haben, wird Ihnen die lineare Algebra heute womöglich bereits einiges Kopfzerbrechen bereiten.

Auf jeden Fall sind Sie motiviert, sich mit Mathematik zu befassen und werden sich noch wundern, was alles auf Sie zukommt. In einem Punkt muss ich Sie jedoch enttäuschen. Die Delikatessen der südfranzösischen Küche werden wir nicht behandeln, ganz ehrlich nicht. Allerdings können wir dafür bereits im ersten Kapitel über Diätpläne sinnieren …

## Wie dieses Buch aufgebaut ist

Vermutlich haben Sie schon im Inhaltsverzeichnis geblättert und die Gliederungsebenen entdeckt. Dieses Buch besteht aus vier Teilen mit insgesamt zehn Kapiteln. Jedes Kapitel wiederum ist in Abschnitte unterteilt, manchmal sind selbst diese Abschnitte in Unterabschnitte aufgegliedert.

Die Kapitel sind die wichtigste bedeutungstragende Einheit. Hier werden die wesentlichen Aspekte der linearen Algebra ausführlich diskutiert. In den Teilen werden Kapitel zusammengefasst, die thematisch eng verwandt sind. Um Ihnen die Lektüre dieser Kapitel zu erleichtern, werden die Abschnitte sich jeweils mit Teilaspekten befassen, die logisch zusammenhängen.

Allerdings ist es unvermeidlich, dass ich bei der Darstellung der einzelnen Themen auch auf andere Kapitel zur Erklärung verweise. Das ist kein Fehler, sondern liegt in der Natur der Sache, nämlich der linearen Algebra. Das macht sie sogar besonders reizvoll und wichtig. Alles hängt mit einander zusammen und voneinander ab wie ein wild zerzauster Wollknäuel. Daher ist es auch keine schlechte Strategie, wenn Sie sich ein bereits gelesenes Kapitel zu einem späteren Zeitpunkt erneut vorknöpfen. Denn dann könnten Ihnen neue Aspekte der behandelten Themen auffallen und ziemlich viele tiefsinnige Zusammenhänge besser einleuchten. Die lineare Algebra ist wie ein Labyrinth, durch das Sie dieses Buch hindurchführen möchte!

## Teil I: Grundlagen der linearen Algebra

Dieser Teil befasst sich mit den Basiselementen der linearen Algebra. Sie finden dort zunächst einen Streifzug durch die faszinierende Welt eines der wichtigsten und erfolgreichsten Teilgebiete der Mathematik. Sie werden anhand praktischer und anschaulicher Beispiele Sinn und Nutzen der gesamten linearen Algebra erforschen und nebenbei lernen, wie man sich gesund ernährt.

In einem eigenen Kapitel finden Sie Körper, wie sie nur die Mathematik kennt. Diese wichtigen Strukturen sind ein integraler Bestandteil der linearen Algebra und es ist immer gut, wenn man nachschlagen kann, was es damit auf sich hat.

Der Teil schließt mit der Vektorrechnung, die sich durch den gesamten Rest des Buches zieht und immer wieder benötigt wird.

## Teil II: Landschaftserkundung zur linearen Algebra

In diesem Teil untersuchen wir gemeinsam die zentrale Struktur der linearen Algebra, nämlich die Vektorräume. Alle zulässigen und möglichen Operationen können Sie selbst ausprobieren. Natürlich werden auch zahlreiche Beispiele für Vektorräume nicht fehlen.

Und dann geht es schnurstracks um lineare Gleichungssysteme, die immer wieder und an unerwarteter Stelle auftauchen. Aber keine Panik. Sie werden dort auch sehen, wie man die Lösungsmengen dieser mächtigen Konstrukte bestimmt.

Eine Abstraktion von linearen Gleichungssystemen führt uns unmittelbar zu den Matrizen, die am Anfang unhandlich erscheinen, die sich aber sehr bald schon als höchst effektiv und nützlich erweisen, ganz ehrlich!

### Teil III: Lineare Algebra for Runaway Dummies

Im dritten Teil geht es ans »Eingemachte« der linearen Algebra. Dabei widmet sich ein eigenes Kapitel der Frage nach der linearen Unabhängigkeit, einer grundlegenden Eigenschaft von Vektoren, die sich überraschend erfolgreich auf lineare Gleichungssysteme anwenden lässt.

Anschließend zeige ich Ihnen, wie Sie mit Basisvektoren ganze Unterräume aufspannen. Im letzten Kapitel dieses Teils erfahren Sie alles Nötige über Determinanten, die sich im engeren Sinne auf Matrizen beziehen, letztlich aber auch eine große Rolle für lineare Abbildungen spielen.

### Teil IV: Top Ten Teil

Falls es Ihnen noch nicht aufgefallen sein sollte, prüfen Sie es gerne nach: der letzte Teil eines jeden *Dummies*-Buch handelt von Auflistungen im Zehnerblock. Da bildet dieses Werk keine Ausnahme.

Sie können sich hier die 10 wichtigsten Aspekte der linearen Algebra hübsch und kompakt angeordnet anschauen.

## Symbole in diesem Buch

In diesem Buch erscheinen immer wieder fünf unterschiedliche Typen von Symbolen. Hier erfahren Sie, was diese bedeuten:

Alles, was Sie sich unbedingt einprägen sollten, wird mit diesem Symbol markiert. Die dargestellten Zusammenhänge sind für die gesamte lineare Algebra sehr wichtig.

Mit dieser Zielscheibe werden Sie auf einen Tipp hingewiesen. Es kann sich um eine Abkürzung zur Lösung eines Problems handeln oder einfach um einen freundlichen Hinweis, der Ihnen helfen sollte, das Verständnis der linearen Algebra zu erleichtern.

Auch wenn Sie dieses Männlein darauf hinweist, dass der nebenstehende Text recht technisch, häufig schwierig und nur für Insider gedacht ist, trösten Sie sich. Entweder Sie haben Spaß daran und sind schon auf die nächste Warnung gespannt oder Sie ignorieren den Hinweis. In beiden Fällen kommen Sie gut mit der Lektüre der restlichen Abschnitte klar.

Wie Sie sehen, brennt die Lunte. Das ist ein Zeichen, dass nun ihre höchste Konzentration und Aufmerksamkeit gefordert ist. Gefährliche Fallstricke oder typische Fehlerquellen werden dann angezeigt. Aber keine Angst, das Symbol taucht nur sehr selten auf in diesem Buch.

Das Hinweisschild zeigt Ihnen die Wege durch das Labyrinth! Wenn die nachfolgenden Abschnitte bestimmte Begriffe oder Kenntnisse voraussetzen, verdeutlicht Ihnen der Wegweiser, wo Sie diese nötigenfalls erwerben können.

# Wie es weitergeht

Ich möchte Ihnen keinesfalls vorschreiben, was Sie als nächstes mit diesem Buch tun sollen. Ich habe es ja nur geschrieben, aber jetzt ist es Ihr Buch. Niemand hindert Sie daran, es von der ersten bis zur letzten Seite zu lesen. Sie können aber auch mitten drin starten. Das bleibt Ihnen überlassen.

Oder Sie wollen ganz systematisch von Anfang an beginnen, ja dann ist der erste Teil mit den Grundlagen genau das Richtige für Sie.

Möglicherweise haben Sie auch von dem Gerücht gehört, dass sich mathematische Zusammenhänge allein mittels Osmose übertragen und dass es eventuell genügt, dieses Buch einfach unter das Kopfkissen zu legen und es überhaupt nicht mehr aufzuschlagen. Ich kann Ihnen das wirklich nicht empfehlen, aber da es Ihr Buch ist, können Sie damit machen, was Sie wollen und alle Gerüchte ausprobieren, die Sie über die Mathematik gehört haben.

Sie sehen, ich kann Ihnen die Entscheidung nicht abnehmen, sondern nur hoffen, dass Ihnen dieses Buch gefallen wird und dass Sie jede Menge Spaß an der linearen Algebra haben werden. Das würde mich schon sehr freuen!

# Teil I
# Grundlagen der Algebra

# *In diesem Teil …*

Erfahren Sie in diesem Teil das Wichtigste zu den Grundlagen der linearen Algebra. Was man mit linearer Algebra überhaupt anfangen kann und was die wesentlichen Bausteine der linearen Algebra sind. Dazu müssen wir uns mit Körpern befassen, mit mathematischen, versteht sich, ohne die in der linearen Algebra nichts zu machen ist. Am Ende dieses Teils findet sich ein Kapitel über Vektoren, deren Bedeutung für technische und allgemein naturwissenschaftliche Problemlösungen nicht überschätzt werden kann und die der eigentliche Grund für den enormen Erfolg der linearen Algebra sind.

# Kapitel 1

# Die bunte Welt der linearen Algebra

### *In diesem Kapitel*

- Sinn und Zweck der linearen Algebra kennenlernen
- Erfahrungen mit den notwendigen Bestandteilen der linearen Algebra sammeln
- Sich vom Potenzial der Matrizen und Determinanten überzeugen
- Verstehen, wie alles zusammen hängt

In diesem Kapitel gebe ich Ihnen eine Schnelleinführung in die lineare Algebra. Wenn Sie auf einem Gebiet unsicher sind oder gerne ausführlichere Erklärungen hätten, dann lesen einfach in den Kapiteln nach, die ich Ihnen an den entsprechenden Stellen empfehle.

Leider löst allein das Wort *Algebra* bei den meisten Menschen und selbst bei Studierenden, die sich mehr oder weniger zwingend mit Mathematik befassen müssen, Kopfschmerzen oder Magenkrämpfe aus. Es scheint sich um eine geheimnisvolle, nicht verständliche Gedankenwelt zu handeln, die Uneingeweihte nie und nimmer erschließen können und die einzig zu dem Zweck konzipiert worden ist, Ängste und böse Erinnerungen an die Schulzeit auszulösen.

Wenn dann noch ein kryptisches Adjektiv wie *linear* hinzukommt, schaltet der Verstand automatisch in den Verteidigungsmodus und blockt alles ab, was danach an Erklärungen folgt.

### Algebra

Das Wort » *Algebra* « müsste aufgrund seiner Herkunft eine geradezu heilsame Wirkung verbreiten. Denn das arabische *al-ǧabr* steht für »Einrenken gebrochener Knochen« und wurde vom medizinischen Fachbegriff vor über tausend Jahren geradewegs auf die Mathematik übertragen. Die Algebra meint seither gewissermaßen das Einrenken von mathematischen Termen, etwa in Gleichungen, um eine Lösung für die dort vorhandenen Unbekannten zu ermitteln. Die Anwendung algebraischer Methoden bedeutet also nichts weniger als die Suche nach Lösungen für gegebene Probleme, und das ist in allen Facetten erstrebenswert. Zumal die mathematischen Probleme fast immer aus technischen und naturwissenschaftlichen Anwendungsgebieten hervorgegangen sind.

### Linear

Der Begriff » *linear* « lässt sich auf das griechische *linea* zurückführen und bedeutet eine gerade Linie, was sich auch im deutschen Wort »Lineal« widerspiegelt. Es ist also ein Hilfsmittel, um eine direkte, schnörkellose Verbindung vom Anfangspunkt bis zum Endpunkt herzustellen. Dasselbe sollen Sie erreichen auf dem Weg durch das Labyrinth der linearen Algebra, von den einfachsten Grundvoraussetzungen bis zu den kompliziertesten Folgerungen!

Wenn Sie nun endlich in die Welt der linearen Algebra eintauchen, möchte ich Sie einladen, die heilsame und geradlinige Wirkung der Erkenntnisse zu spüren und ihre spannenden Entdeckungen auf sich einwirken zu lassen.

## Dafür braucht man lineare Algebra

Um auszurechnen, wie weit ein Zug entfernt ist, der sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von 120 km/h bewegt und in genau 27 Minuten ankommen soll, genügt einfache Schulalgebra, wie sie im Allgemeinen in der Mittelstufe den Schülern vermittelt wird. Ausgehend von der Formel

$$v = \frac{s}{t} \text{ und damit } s = v \cdot t$$

für konstante Geschwindigkeiten können Sie die Unbekannte »s«, die die zurückgelegte Wegstrecke beschreibt, durch die Multiplikation der Geschwindigkeit »v« mit der Zeit »t« erhalten. Beachten Sie dabei, dass die Zeit von 27 Minuten durch Division von 60 in 0,45 Stunden umzurechnen ist, weil ja auch die Geschwindigkeit in Kilometer pro Stunde angegeben wurde. Sie erhalten:

$$s = v \cdot t = 120\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0{,}45\,\text{h} = 54\ \text{km}$$

Der Zug ist also exakt 54 km entfernt, vorausgesetzt, er kommt pünktlich an, und wann tut er das schon? Aber das ist ein anderes Thema …

Die Aufgabe war aus zwei Gründen relativ einfach. Zum einen traten in der Ausgangsformel weder Quadrate, noch Wurzeln, noch trigonometrische oder andere mathematische Funktionen auf. Vielmehr verhielten sich die gesuchte Wegstrecke und die gegebene Zeit zueinander *proportional*, was die Mathematiker *linear* nennen.

Das Adjektiv *linear* im Zusammenhang mit mathematischen Problemstellungen verweist immer auf einfache Beziehungen ohne komplizierte Funktionen, also auf solche Beziehungen, bei denen eine Größe in einem konstanten Verhältnis zu einer anderen steht. Sie können es meistens als Synonym für *einfach* verwenden.

Zum anderen war das Problem *eindimensional*, weil sich der Zug nur auf Schienen bewegen kann und weil nur von einem einzigen Zug die Rede war.

Spannende lineare Algebra kommt immer dann ins Spiel, wenn Sie *viele Unbekannte* oder ein *mehrdimensionales* Umfeld benötigen, das Zusammenspiel der einzelnen Variablen jedoch im Prinzip so einfach, also linear ist, wie Sie das im obigen Beispiel gesehen haben.

# *Systeme von Gleichungen lösen*

Wenn zwei Billard-Kugeln mit unterschiedlichen aber konstanten Geschwindigkeiten kollidieren, werden beide vom Aufprall abgelenkt. Dabei verändern sich sowohl Tempo als auch die jeweilige Bewegungsrichtung. Dieses Problem ist wie das Eingangsbeispiel linear, weil man idealisierend von Reibungsgrößen absieht. Aber jetzt haben Sie es offenbar mit zwei Dimensionen zu tun. Zur Beschreibung der Geschwindigkeit benötigen Sie daher einen *Vektor*, der zwei Komponenten besitzt, jeweils eine für jede Raumdimension auf dem Billardtisch. Das dahinter liegende physikalische Erhaltungsgesetz bezieht sich auf den *Impuls* , der das Produkt von Masse und Geschwindigkeit angibt. Wenn Sie die Massen der beiden Kugeln mit $m_1$ und $m_2$ ansetzen und die jeweiligen Geschwindigkeiten mit $v_1$ und $v_2$, erhalten Sie die lineare Gleichung:

$$m_1 \cdot \left(\vec{v_1} - \overrightarrow{v_1{}'}\right) = m_2 \cdot \left(\vec{v_2} - \overrightarrow{v_2{}'}\right)$$

Dabei deutet der Pfeil auf den Variablen an, dass es sich um Vektoren handelt und der Strich meint die jeweilig neuen Geschwindigkeiten der Billardkugeln nach dem Aufprall.

Tatsächlich stecken in dieser einfachen, linearen Vektorgleichung zwei lineare Gleichungen, weil sich die Billardkugeln auf einer zweidimensionalen Ebene bewegen. Diese beiden Gleichungen hängen aber zusammen; sie werden daher als ein *Gleichungssystem* bezeichnet.

Ein *Gleichungssystem* besteht aus zwei oder mehr Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Jede Lösung des Gleichungssystems muss zugleich Lösung einer jeden einzelnen Gleichung sein.

Lineare Algebra versetzt Sie in die Lage, mit ausgefeilten technischen Verfahren dieses und viele andere Probleme auf elegante Weise zu lösen. Und das ist nur der Anfang. Die Anzahl der Dimensionen spielt nämlich überhaupt keine