

Willkommen in der Matrix

Vektor- und Matrizenrechnung

FÜR
DUMMIES®

Auf einen Blick:

- Die Grundlagen verstehen
- Mit Vektoren und Matrizen rechnen
- Mit Eigenwerten und Eigenvektoren umgehen
- Lineare Gleichungssysteme mit Matrizen darstellen und anschließend lösen

Karsten Kirchgessner
Marco Schreck



Vektor- und Matrizenrechnung für Dummies - Schummelseite

Betrag von $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, Skalarprodukt für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Kreuzprodukt für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ und Epsilon-Symbol

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_{x_1} & \vec{e}_{x_2} & \vec{e}_{x_3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{x} \times \vec{y})_i = \sum_{j,k=1,2,3} \varepsilon_{ijk} x_j y_k \text{ mit } \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{für } (i,j,k) \in \{(1,2,3), (2,3,1), (3,1,2)\} \\ -1 & \text{für } (i,j,k) \in \{(3,2,1), (1,3,2), (2,1,3)\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Regeln des Skalarprodukts für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = |\vec{a}|^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$a^2 \geq 0 \text{ und } a^2 = 0 \text{ nur für } \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$(\alpha \vec{a}) \cdot (\beta \vec{b}) = \alpha \beta (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi(\vec{a}, \vec{b})$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \neq \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Regeln des Vektorprodukts für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$(\alpha \vec{a}) \times (\beta \vec{b}) = \alpha \beta (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d})$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi(\vec{a}, \vec{b})$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$$

Rechenregeln für $(n \times n)$ -Matrizen A, B, C

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C \quad A + B = B + A$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C \quad A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{E}_n \text{ sofern } \det A \neq 0$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A (!)$$

Determinantenformel für $(n \times n)$ -Matrix A nach Leibniz, Determinante einer (2×2) -Matrix

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i, \sigma_i}, \quad \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

Determinante einer (3×3) -Matrix

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{11}A_{23}A_{32} - A_{13}A_{22}A_{31} - A_{12}A_{21}A_{33}$$

Rechenregeln für Determinanten für $s \in \mathbb{R}$ und $(n \times n)$ -Matrizen A, B

$$\det(sA) = s^n \det A \quad \det A \cdot B = \det A \cdot \det B \quad \det A^{-1} = 1 / \det A \quad \det A^T = \det A$$

Inverse einer (2×2) -Matrix $A^{(2 \times 2)}$ und (3×3) -Matrix $A^{(3 \times 3)}$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A^{(2 \times 2)}} \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A^{(3 \times 3)}} \begin{pmatrix} A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32} & A_{13}A_{32} - A_{12}A_{33} & A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22} \\ A_{23}A_{31} - A_{21}A_{33} & A_{11}A_{33} - A_{13}A_{31} & A_{13}A_{21} - A_{11}A_{23} \\ A_{21}A_{32} - A_{22}A_{31} & A_{12}A_{31} - A_{11}A_{32} & A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \end{pmatrix}$$

Rechenregeln für inverse Matrizen

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \quad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \quad [(A \cdot B)^T]^{-1} = (A^{-1})^T \cdot (B^{-1})^T \quad (A^{-1})^{-1} = A$$

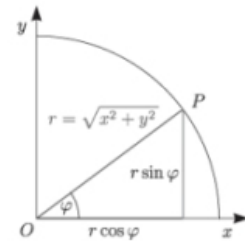
Polarkoordinaten und Zylinderkoordinaten

Wertebereich $r \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $[z \in (-\infty, \infty)]$

Transformation $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $[z]$

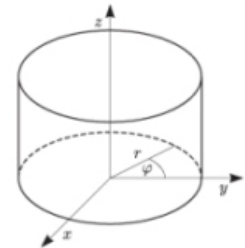
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Umkehr-
transformation

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0, y \geq 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x < 0 \\ 2\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0 \text{ und } y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0 \text{ und } y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{für } x = 0 \text{ und } y < 0 \end{cases}$$


Einheitsvektoren

$$\hat{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \hat{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\hat{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$


Kugelkoordinaten

Wertebereich $r \in [0, \infty)$, $\vartheta \in (0, \pi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Transformation $x = r \sin \vartheta \cos \varphi$, $y = r \sin \vartheta \sin \varphi$

$$z = r \cos \vartheta$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

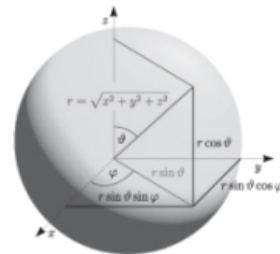
Umkehr-
transformation Winkel φ analog zu Polarkoordinaten

$$\hat{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \hat{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Einheitsvektoren

$$\hat{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\hat{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$



Karsten Kirchgessner und Marco Schreck

Vektor- und Matrizenrechnung für Dummies

Fachkorrektur von Dr. Wilhelm Kulisch



WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

1. Auflage 2013

© 2013 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

All rights reserved including the right of reproduction in whole or in part in any form. This EBook published under license with the original publisher John Wiley and Sons, Inc.

Alle Rechte vorbehalten inklusive des Rechtes auf Reproduktion im Ganzen oder in Teilen und in jeglicher Form. Dieses E-Book wird mit Genehmigung des Original-Verlages John Wiley and Sons, Inc. publiziert.

Wiley, the Wiley logo, Für Dummies, the Dummies Man logo, and related trademarks and trade dress are trademarks or registered trademarks of John Wiley & Sons, Inc. and/or its affiliates, in the United States and other countries. Used by permission.

Wiley, die Bezeichnung »Für Dummies«, das Dummies-Mann-Logo und darauf bezogene Gestaltungen sind Marken oder eingetragene Marken von John Wiley & Sons, Inc., USA, Deutschland und in anderen Ländern.

Das vorliegende Werk wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autoren und Verlag für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie eventuelle Druckfehler keine Haftung.

Coverfoto: Fotolia/Lemonade

Satz: Beltz Bad Langensalza GmbH, Bad Langensalza

Print ISBN: 978-3-527-70742-3
ePub ISBN 978-3-527-66824-3
mobi ISBN 978-3-527-66825-0

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Konventionen in diesem Buch

Törichte Annahmen über den Leser

Was Sie in diesem Buch finden

Was Sie in diesem Buch nicht finden

Wie dieses Buch aufgebaut ist

Teil I: Einführung

Teil II: Vektorrechnung

Teil III: Matrizen

Teil IV: Lineare Gleichungssysteme

Teil V: Der Top-Ten-Teil

Spickzettel

Symbole, die in diesem Buch verwendet werden

Wie es weitergeht

Teil I Einführung

Kapitel 1

Motivation

Gestatten: Die Familie der Vektoren, Matrizen und linearen Gleichungssysteme

Vektoren in Theorie und Praxis

Matrizen in Schule, Studium und Beruf

Wie Matrizen behandelt werden wollen und wie sie einem behilflich sind

Kapitel 2

Vektorrechnung

Was war zuerst da: der Vektor oder der Pfeil?

Voll konkret: explizite Schreibweise und Komponenten eines Vektors

Der Betrag eines Vektors

Beispiele

Einheitsvektoren – Voll normal!

Rechnen mit Vektoren

Addition und Subtraktion von Vektoren

Multiplikation von Vektoren mit Zahlen

Linearkombination von Vektoren als »Pfeile«

Differenzvektoren

Vektoren in der analytischen Geometrie

Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks

Zum Halten von Lasten

Kapitel 3

Matrizen

Definition und Form von Matrizen

Rechnen mit Matrizen – mehr als nur ein Haufen Zahlen!

Addition und Subtraktion von Matrizen

Multiplikation von Matrizen

Invertieren von Matrizen

So sieht sich eine Matrix im Spiegel

Der Stammbaum der Matrizen

Reelle und komplexe Matrizen

Quadratische und nicht-quadratische Matrizen

Reguläre und singuläre Matrizen

Symmetrische und hermitesche Matrizen

Orthogonale und unitäre Matrizen

Dreiecksmatrizen

Noch speziellere Matrizen ...

Matrizen bei der Arbeit

Determinante und Umkehrbarkeit von Transformationen

Eigenwerte, Eigenvektoren und das Diagonalisieren von Matrizen

Kapitel 4

Lösen von linearen Gleichungssystemen

Matrixschreibweise für lineare Gleichungssysteme

Links- und Rechtsmultiplikation sind zweierlei!

Umformen der Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems

Teil II Vektorrechnung

Kapitel 5

Vektor mal Vektor = ???

Skalarprodukt: Vektor mal Vektor gleich Zahl

Definition und Schreibweisen

Wissenswertes zum Skalarprodukt: kurz und knapp

Geometrische Bedeutung – endlich wird es anschaulich!

Wie berechnet man das Skalarprodukt konkret?

Kreuzprodukt: Vektor mal Vektor gleich Vektor

Definition und Schreibweise

Nützliches zum Vektorprodukt: wieder kurz und knapp

Geometrische Bedeutung – endlich wird's wieder anschaulich!

Wie rechnet man das Kreuzprodukt konkret aus?

Das Spatprodukt – und was ist bitte ein Parallelepiped?

Dyadisches Produkt: Vektor mal Vektor gleich Matrix

Definition und Schreibweise

Dyadisches Produkt zweidimensionaler orthogonaler Einheitsvektoren

Dyadisches Produkt von orthogonalen Einheitsvektoren in drei Dimensionen

Kapitel 6

Die Welt der Mathematik besteht aus Vektoren ...

Unser Koordinatensystem ist das Gerüst der Vektor-Welt

Kartesische Koordinatensysteme – hier steht alles senkrecht!

Beispiele für kartesische Koordinatensysteme

Polarkoordinaten – krumme Linien in der Ebene?!

Zylinderkoordinaten – Hut ab für die dritte Dimension!

Kugelkoordinaten – eine runde Sache

Basis und Basistransformationen: Wir wechseln den Blickwinkel!

Unter der Lupe: Was versteht man unter einer Basis?

Beispiele für Basen

Basistransformationen – aus Alt mach Neu

Jetzt geht's rund – wir drehen die Basis!

Kapitel 7

Analytische Geometrie – mehr als nur ein paar Bauklötze!

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren

Der Vektorzug fährt ein ...

Parallele und antiparallele Vektoren

Anwendungsaufgabe zur linearen Abhängigkeit von Vektoren

Darstellung von Geraden und Ebenen

Parameterdarstellung: Jetzt kommen die Vektoren zum Zug!

Normalenform: Der senkrechte Vektor zeigt, wo es lang geht!

Zusammenfassung

Der Klassiker: Schnitte und Abstände von Geraden und Ebenen

Schnitte von Geraden mit Ebenen

[Abstand zwischen Ebene und einer parallelen Gerade](#)

[Schnitt zweier Ebenen in Parameterdarstellung](#)

[Schnitt einer Ebene in Parameterdarstellung und einer Ebene in Normalenform](#)

[Bestimmung des Abstands zweier paralleler Ebenen](#)

[Parallele und windschiefe Geraden](#)

[Wir verlassen das Flachland und bauen Körper aus Ebenen](#)

[Eine Pralinschachtel in der Vektorrechnung](#)

[Analytische Geometrie für Fortgeschrittene Teil 1: Wir bauen uns einen Tetraeder](#)

[Analytische Geometrie für Fortgeschrittene Teil 2: Wie viel Farbe benötigt man, um einen Dodekaeder anzumalen?](#)

[Die Sache kommt ins Rollen: Kugeln in der Vektorrechnung](#)

[Die Kugelgleichung](#)

[Tangentialebenen](#)

[Schnitt von Kugeln mit Ebenen](#)

[Kapitel 8](#)

[Funktionenräume](#)

[Können Funktionen Vektoren sein?](#)

[Ein Skalarprodukt für Funktionen](#)

[Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Funktionen](#)

[Funktionen machen es den Vektoren im Anschauungsraum nach](#)

[Der Funktionenraum der Polynome](#)

[Monome als Bausteine von Polynomen](#)

[Orthogonale Funktionen - was bedeutet das?](#)

[Trigonometrische Funktionen](#)

[Auf der Suche nach einer Basis](#)

[Ran ans Werk: Das Skalarprodukt trigonometrischer Funktionen](#)

Die Fourierreihe - wir bringen Funktionen zum Schwingen

So macht man aus unstetigen Funktionen stetige

Teil III Matrizen

Kapitel 9

Rechenregeln

Assoziativgesetz, Distributivgesetz und Kommutativgesetz für die Addition

Addition, Subtraktion und Multiplikation in Aktion

Division durch Bildung der Inversen

Lineare Abbildungen, Kern und Bild

Basistransformationen von Vektoren mittels Matrizen

Einführung in lineare Abbildungen und deren Basiswechsel

Kapitel 10

Determinanten

Verfahren nach Leibniz

Permutationen - da haben wir den (Zahlen)salat!

Die Determinantenformel

Schachbrettregel und Unterdeterminanten

Entwicklung nach Zeilen oder Spalten

Spezialfall: (2 x 2)-Matrizen

Spezialfall: (3 x 3)-Matrizen und Sarrussche Regel

Rechenregeln für Determinanten

Anwendung: Berechnung des Kreuzprodukts mit der Determinante

Kapitel 11

Invertieren von Matrizen

Regularität und Singularität als Indiz für Invertierbarkeit

Berechnung der Inversen mittels des Gauß-Algorithmus

Bildung der Inversen mittels der Adjunkten

Spezialfall: (2 × 2)- und (3 × 3)-Matrizen

Kapitel 12

Eigenwerte und Eigenvektoren, Diagonalisieren von Matrizen

Berechnung von Eigenwerten, algebraische Vielfachheit

Berechnung der Eigenvektoren, geometrische Vielfachheit

Diagonalisieren von Matrizen

Algebraische Vielfachheit = Geometrische Vielfachheit

Mehrfaches Auftreten von Eigenwerten

Algebraische Vielfachheit ≠ Geometrische Vielfachheit

Besonderheiten von symmetrischen und hermiteschen Matrizen

Was sich nicht ändert beim Diagonalisieren

Anwendung: Noch einmal Drehungen

Anwendung: Quadriken

Die Hauptachsen einer Quadrik

Anwendung des Verfahrens nach Gram und Schmidt

Ein paar Tipps zum Abschluss des Kapitels!

Für Fortgeschrittene: Jordansche Normalform

Bestimmung der Jordan-Normalform und der Transformationsmatrix

Kapitel 13

Besonders einfache Matrizen

Dreiecksmatrizen

Diagonalmatrizen

Blockdiagonale Matrizen

Teil IV Lösen von linearen Gleichungssystemen

Kapitel 14

Gauß-Algorithmus in Matrixschreibweise: Vertiefung

Erweiterte Koeffizientenmatrix und Zeilenstufenform

Rang von Matrizen

Systeme mit einer eindeutigen Lösung

Systeme ohne Lösung

Systeme mit unendlich vielen Lösungen

Kapitel 15

Lösen von linearen Gleichungssystemen mit Hilfe von Parametern

Einführung von Parametern und Bilden der Lösung

Minus-Eins-Ergänzungstrick: Erzeugung der Zeilennormalform und Ablesen der Lösung

Kapitel 16

Homogene und partikuläre Lösung

Bildung der homogenen Lösung

Bildung der partikulären Lösung

Zusammensetzen beider Lösungen

Kapitel 17

Lösungsweg unter Verwendung der Determinante

Aufstellen der zu berechnenden Determinanten und Cramersche Regel

Resultate aus der Cramerschen Regel

Anwendung: Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit zweier Parameter

Anwendung: Die Wronski-Determinante

Die Wronski-Determinante in Aktion

Lineare Unabhängigkeit im Fall der Monome

Lineare Unabhängigkeit im Fall der Sinus- und Kosinusfunktionen

Teil V Der Top-Ten-Teil

Kapitel 18

Zehn häufige Anfängerfehler

Dividieren durch Vektoren – Nein!

Matrizen vertauschen nicht!

Ein Vektor hängt von den Komponenten und der Basis ab!

Verwirrung beim komplexen Skalarprodukt

Leichtsinnfehler

Vektoren in anderen Koordinatensystemen

Einheitskreis – wie bitte?

Wurzelziehen aus Quadraten

Vorsicht mit der imaginären Einheit

Falsche Regeln bei der Berechnung von Determinanten

Kapitel 19

Zehn Tipps für erfolgreiche Prüfungen

Üben, üben, üben!

Nachdenken ist die halbe Miete!

Ergebnisse kritisch begutachten

Üben Sie auch möglichst an verschiedenen Aufgabentypen!

Gleichungen müssen stimmig sein!

Effizienz von Algorithmen

Aussehen von Geraden und Ebenen

Denken Sie sich selber Aufgaben aus!

Nehmen Sie nicht alles bierernst!

Denken Sie an die am häufigsten vorkommenden Fragen!

Stichwortverzeichnis

Einleitung

Kennen Sie das? Sie sitzen zu Hause mit einem unangenehmen Gefühl in der Magengegend, weil in drei Wochen eine wichtige Matheprüfung ansteht. Das Gefühl kommt nicht von ungefähr, denn schließlich ist Ihnen klar, dass Sie alles andere als sattelfest im Prüfungsstoff sind. Deshalb haben Sie sich schnell aus der Bibliothek etliche Wälzer ausgeliehen, die jetzt auf Ihrem Schreibtisch liegen. Sicherlich liegt auch eine Mitschrift aus der Vorlesung, die Sie besucht haben, vor Ihnen. Leider ist Ihnen jedoch klar, dass Sie aus der Vorlesung nicht viel mitgenommen haben und der Tag der Prüfung sitzt Ihnen wie ein Nadelkissen im Nacken.

Ihre Mitschrift ist alles andere als ausführlich, deshalb beginnen Sie, eines der Bücher aufzuschlagen, bleiben jedoch bereits an einer der ersten Seiten hängen. Was also tun – aufgeben? Natürlich müssen Sie das nicht tun, denn Sie haben sich ja glücklicherweise für ein Buch aus der » $\frac{1}{4}$ für Dummies«-Reihe entschieden. Gratulation! Sie halten ein Werk in den Händen, das Ihnen die wichtigsten Bereiche aus den Gebieten der linearen Algebra und analytischen Geometrie näher bringt.

Grundlage der linearen Algebra sind mathematische Objekte – Vektoren und Matrizen – mit denen man wie mit gewöhnlichen Zahlen rechnen kann. Selbstverständlich gibt es einige wesentliche Unterschiede. Mit Vektoren und Matrizen lässt sich viel mehr anstellen als mit einfachen Zahlen. Trifft Roger Federer mit seinem Schläger einen Tennisball, so fliegt dieser mit einer bestimmten Geschwindigkeit und Richtung durch die Luft. Die Geschwindigkeit können Sie mit einer Zahl angeben. An guten Tagen beträgt sie vielleicht 200 Kilometer pro

Stunde. Doch wie sieht es mit der Richtung aus, wie kann man diese mit nur einer Zahl kennzeichnen? Kurzum, das geht nicht ohne Vektoren!

Die analytische Geometrie ist mehr als ein einfaches Teilgebiet der Geometrie. Während man in der Geometrie Probleme zeichnerisch angeht, werden in der analytischen Geometrie zusätzlich rechnerische Methoden zu Hilfe genommen.

Mit diesem Rüstzeug können Sie Problemstellungen unterschiedlichster Art angehen. Dazu gehört die Beschreibung von Geraden im Raum, von Flächen und Körpern. Ohne noch weiter auszuschweifen, packen wir es also an!

Konventionen in diesem Buch

In diesem Buch werden Sie über eine große Menge an neuen Fachbegriffen stolpern. Immer wenn ein solcher Begriff auftaucht, der im Bereich des behandelten Themas eine Rolle spielt, wird dieser fett gedruckt. Ein Wort, das kein Fachbegriff ist, wird dann kursiv gedruckt, wenn damit etwas betont werden soll.

Mathematische Funktionen wie die Sinus-, Kosinus- und die Exponentialfunktion werden mit den typischen aufrecht gedruckten Bezeichnungen »sin«, »cos« und »exp« versehen. Ein Differential in Ableitungen oder in einem Integral wird mit einem aufrechten »d« bezeichnet; ebenso soll für die imaginäre Einheit ein aufrechtes »i« gebraucht werden: $i^2 = -1$.

Die Schreibweise für sonstige mathematische Objekte und Formeln wird an gegebener Stelle erklärt.

Törichte Annahmen über den Leser

Da Sie sich für dieses Buch entschieden haben, erlauben wir uns eine Einschätzung Ihrer Person. Wie oben beschrieben kann es sein, dass Sie einem technischen oder naturwissenschaftlichen Studiengang angehören und demnächst eine Prüfung ansteht. Natürlich ist es auch möglich, dass Sie Grundkenntnisse der linearen Algebra aus beruflichen Gründen benötigen. Vielleicht sind Sie aber einfach »nur« ein bisschen an höherer Mathematik interessiert, Mathematik ist also Ihr Hobby?

Was auch immer genau der Fall ist – eines gilt mit Sicherheit: Sie haben keine Zeit oder Lust, sich durch dicke Wälzer zu quälen, die sich nur mit der grauen Theorie, aber ansonsten nicht mit Anwendungen befassen.

Wir vermuten, Sie kennen sich gut mit den Grundrechenarten aus und bringen einige (wenige) Grundlagen aus der Analysis mit. Sie wissen also vielleicht ein bisschen etwas über grundlegende Funktionen und können einfache Ableitungen und Integrale ausrechnen. Sollte letzteres nicht der Fall sein, lassen Sie sich jedoch bitte nicht abschrecken! Derartiges Wissen ist nur an einzelnen Stellen nötig und wird gegebenenfalls erklärt.

Was Sie in diesem Buch finden

Das vorliegende Buch bietet eine anschauliche und leicht verdauliche Hinführung zu den wichtigsten Themen der linearen Algebra und der analytischen Geometrie. Die Thematik wird anhand konkreter Anwendungen eingeführt und behandelt. Eine grundlegende Philosophie stellt die Präsentation aussagekräftiger Beispiele dar. Eine Politik der Trivialbeispiele, wie sie oft in mathematischer Literatur betrieben wird, verfolgen wir nicht. Darüber hinaus können Sie sich auf hilfreiche Tipps und Tricks zur Lösung bestimmter Problemstellungen und Aufgaben freuen.

Was Sie in diesem Buch nicht finden

Das Buch ist nicht dafür gedacht, eine exakte und penible Behandlung der mathematischen Themen anhand des sonst üblichen Schemas »Definition« - »Satz« - »Beweis« zu liefern. Ebenso haben wir uns dazu entschlossen, zugunsten der Verständlichkeit und Anschaulichkeit auf manche für die Praxis unwichtige Sonderfälle keine Rücksicht zu nehmen. Sie machen einem das Leben zwar schwerer, aber der Nutzgewinn bleibt aus, wenn man sich eher für Anwendungen interessiert als für die Theorie.

Wie dieses Buch aufgebaut ist

Das Buch besteht aus fünf Teilen sowie dem Spickzettel. Jedem Thema ist ein einzelner Teil gewidmet bzw. in der Einführung ein einzelnes Kapitel.

Teil I: Einführung

Der einführende Teil nimmt zu allen folgenden Themen im Buch Stellung. Dazu gehören die Vektorrechnung, Matrizen und lineare Gleichungssysteme. Jedes dieser Themen wird anschaulich motiviert, und die grundlegendsten Begriffe werden erklärt. Weiterhin sollen hier bereits einfache Beispiele geliefert werden, da anhand konkreter Anwendungen der Einstieg sehr viel leichter fällt.

Sowohl Vektoren als auch Matrizen werden bereits hier eingeführt und die einfachen Rechenoperationen erklärt.

Teil II: Vektorrechnung

Nach der Einführung steigen Sie direkt in eine Weiterführung der Vektorrechnung ein. Da Sie dann bereits wissen werden, was ein Vektor überhaupt ist, geht es damit weiter, was sich mit Vektoren in der Anwendung alles machen lässt. Sie werden sehen, wie man geometrische Figuren wie beispielsweise Geraden und Ebenen in der Vektorrechnung darstellt und wie Sie elementargeometrische Probleme mit Methoden aus der Vektorrechnung lösen können.

Teil III: Matrizen

Weiter geht es mit den Matrizen. Hier lernen Sie, dass Vektoren nichts anderes sind als spezielle Matrizen. Also ist der Matrixbegriff im Prinzip eine Erweiterung des Vektorbegriffs. Es gibt viele verschiedene Arten von Matrizen. Jeder dieser Typen lässt sich für unterschiedliche Aufgaben verwenden und unterscheidet sich in den Eigenschaften von den anderen Typen. Es geht also zunächst darum, dass Sie eine Matrix sofort in eine dieser Gruppen einordnen können und ihre Eigenschaften erkennen, sofern Sie sie sehen. Danach werden wir Ihnen zeigen, wozu Sie Matrizen in der Anwendung verwenden können.

Teil IV: Lineare Gleichungssysteme

Eine wichtige Anwendung von Matrizen stellt die Lösung linearer Gleichungssysteme dar. Deshalb ist diesen ein kompletter, wenn auch kurzer Teil, gewidmet. Hier werden Sie lernen, wie Sie ein solches Gleichungssystem mittels Matrizen darstellen können und wie Sie die Anzahl der Lösungen bzw. die genaue Gestalt der Lösung ermitteln.

Teil V: Der Top-Ten-Teil

Mit der Behandlung linearer Gleichungssysteme sind alle Themen des Buchs abgehandelt. Was hier kommt, ist eine Zusammenstellung nützlicher Tipps im Rahmen des behandelten Materials.

Spickzettel

Auf dem Spickzettel sind die wichtigsten Formeln und Zusammenhänge für Vektoren und Matrizen zusammengefasst. Erinnern Sie sich nicht mehr an eine bestimmte Definition, an eine Formel oder an Rechenregeln, dann ist der Spickzettel Ihr Freund.

Symbole, die in diesem Buch verwendet werden



Das Erinnerungssymbol wird immer dann verwendet, wenn eine Aussage gemacht oder eine Formel eingeführt wird, die Sie sich merken sollten. Hier stehen ausschließlich wichtige Dinge, die Sie im Bereich Vektor- und Matrizenrechnung immer wieder benötigen könnten.



Dabei handelt es sich um einen Tipp, welcher an dieser Stelle hilfreich ist. Es ist sinnvoll, sich diese Tipps zu merken und bei Bedarf wieder in Erinnerung zu rufen.



Vorsicht ist geboten, wenn Sie dieses Symbol sehen! Damit möchten wir Sie auf mögliche Stolperfallen und etwaige Fehlerquellen aufmerksam machen.

Wie es weitergeht

Es ist alles gesagt. Sie können nun sofort anfangen, in dem Buch zu blättern und zu lesen! Besitzen Sie einiges an Vorkenntnissen oder möchten Ihre Erinnerung auffrischen, können Sie im Prinzip auf das einleitende Kapitel verzichten. Ist das nicht der Fall, legen wir Ihnen nahe, die Einführung durchzulesen. Hier nehmen wir einige Dinge bereits vorweg, die in den späteren Kapiteln manchmal zwar noch kurz wiederholt, aber ansonsten direkt verwendet werden.

Es ist immer sinnvoll, ein Buch über mathematische Themen nicht einfach »nur« zu lesen, sondern die einzelnen Beispiele und Berechnungen parallel dazu selbst durchzuarbeiten. Wenn Ihnen das möglich ist, dann haben Sie die Gewissheit, dass Sie es auch wirklich verstanden haben, und das ist ein tolles Gefühl.

Teil I

Einführung

In diesem Teil ...

Die Geometrie hat ihren Ursprung in der Zeit der frühen Hochkulturen. Bei den alten Ägyptern entwickelte sie sich als Werkzeug zur Landvermessung, die nach jeder Nilüberschwemmung von neuem durchgeführt werden musste. Das Wort **Geometrie** kommt aus dem Griechischen und bedeutet so viel wie »Vermessung der Erde«. Im Altertum befasste sie sich vor allem mit der Durchführung zeichnerischer Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, Winkeln und Ähnlichkeitsbeziehungen von Dreiecken. Mit diesen Themen beschäftigt man sich heutzutage vor allem in der Schule.

Andererseits lassen sich geometrische Probleme auch rechnerisch angehen, ohne auf die Anschauung zurückzugreifen. Dieses Vorgehen läuft unter der Bezeichnung **analytische Geometrie**. Letztere ist im Prinzip ein Unterbegriff der **linearen Algebra**, die sich mit Vektoren und linearen Abbildungen zwischen Vektoren beschäftigt.

In der Einführung lernen Sie die grundlegenden Begriffe und Vorgehensweisen in der Vektorrechnung kennen, also was Vektoren überhaupt sind und wozu man sie gebrauchen kann. Anfangs wird eine Einteilung der entsprechenden Gebiete vorgestellt, die Themen dieses Buchs sind. Dazu gehören das Rechnen mit Vektoren an sich sowie weiterführende Kniffe, die Ihnen die Anwendung von Vektoren auch dann erlauben, wenn das zuvor nicht unbedingt ersichtlich war.

Danach möchten wir Ihnen mit kleinen anschaulichen Häppchen diese Gebiete schmackhaft machen. Dabei können Sie sich bereits auf das Hauptmenü ab dem zweiten Teil des Buchs freuen, wo Sie Ihr Wissen anhand vieler Anwendungen vertiefen werden.

1

Motivation

In diesem Kapitel ...

- ▶ Motivation und Vorstellung der Themenbereiche in der Vektorrechnung
 - ▶ Verzahnung und Zusammenwirken der einzelnen Bereiche
-

Eine Matheklausur ist wie eine Schachtel Pralinen – man weiß nie, was drankommt. Deshalb möchte dieses Buch einen umfangreichen Überblick über die stark miteinander verknüpften Themengebiete der Vektorrechnung, Matrizen und linearen Gleichungssysteme liefern. Das Ziel ist, dass sich der Leser ein tiefgründiges Verständnis aneignen kann und dadurch nicht nur für die nächste Klausur bestens gewappnet ist, sondern auch über eine solide Basis in Sachen linearer Algebra und analytischer Geometrie verfügt.

Dabei verzichten wir auf eine trockene Darstellungsweise in Form von Definitionen, Sätzen und anschließenden Beweisen, sondern möchten der Mathematik Leben einhauchen, indem wir den Schwerpunkt auf die anwendungsorientierte Seite legen. Das bedeutet nicht, dass wir komplizierte Fragestellungen geschickt umschiffen. Stattdessen werden alle Themen in einer handfesten und anschaulichen Form präsentiert, die das Erlernen erleichtert.

Gestatten: Die Familie der Vektoren, Matrizen und linearen Gleichungssysteme

Die Vektorrechnung beschäftigt sich, wie der Name bereits verrät, mit **Vektoren** genannten mathematischen Objekten, die sich von gewöhnlichen Zahlen drastisch unterscheiden, sowohl was ihre Eigenschaften angeht als auch was den Umgang mit ihnen betrifft.

Der nächste große Teil des Buchs beschäftigt sich mit Matrizen. Im Prinzip handelt es sich bei einer **Matrix** um eine Weiterführung des Vektorbegriffs. Eine Matrix ist nichts anderes als ein rechteckiges Zahlenschema. Wenn Sie schon einmal Sudoku gespielt haben, haben Sie sich zumindest unbewusst bereits mit Matrizen beschäftigt. Mit Matrizen kann man rechnen, und sie lassen sich vielfältig auch in der Vektorrechnung einsetzen.

Danach sollen **Gleichungssysteme** behandelt werden. Dabei handelt es sich um eine Menge von Gleichungen mit mindestens zwei Unbekannten. Wir wollen Ihnen ausschließlich den Umgang mit **linearen Gleichungen** demonstrieren, in denen Unbekannte einzig und allein in der ersten Potenz vorkommen. Wie man ein solches System lösen kann, ist bereits Schulstoff. Doch das Ziel ist es, mittels Vektorrechnung und Matrizen diese Methoden zu verallgemeinern und zu verfeinern.

Die Vernetzung zwischen den Bereichen untereinander, wie sie in diesem Buch eine Rolle spielt, ist in [Abbildung](#)

[1.1](#) veranschaulicht. Die eingezeichneten Pfeile stellen mögliche Verbindungen dar. Wir haben uns dazu entschieden, die Gebiete in der zuvor genannten Reihenfolge zu behandeln, da man die Vektorrechnung erlernen kann, ohne etwas über die anderen Themen zu wissen. Zwar können sowohl Matrizen als auch lineare Gleichungssysteme in der Vektorrechnung ihre Anwendung finden, sie sind jedoch nicht zwingend notwendig.

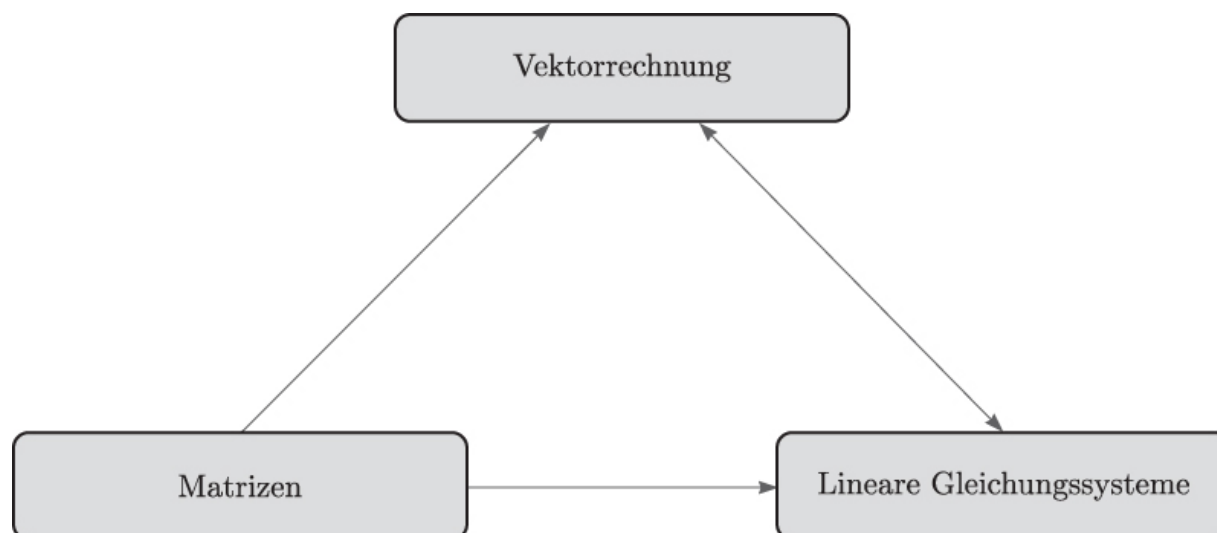


Abbildung 1.1: Die behandelten Gebiete und wie sie zusammenhängen

Die Vektor- und Matrixrechnung halten Einzug in lineare Gleichungssysteme. Wie gesagt, kann man letztere auch ohne solche Kenntnisse lösen, jedoch lassen sie sich mit derartigen Methoden systematisch angehen, was besonders für Gleichungssysteme mit mehr als drei Unbekannten vorteilhaft ist.

Lineare Gleichungssysteme und Matrizen selbst können ihrerseits in Problemstellungen der anderen Disziplinen

einfließen.

Vektoren in Theorie und Praxis

In der gymnasialen Oberstufe kommt man zum ersten Mal mit der analytischen Geometrie in Berührung. Hier führt man den Vektorbegriff sehr anschaulich ein als ein mathematisches Objekt, das man als Pfeil im Koordinatensystem darstellen kann. Ein solcher Pfeil zeigt in eine bestimmte Richtung und besitzt darüber hinaus eine Länge. Somit können Vektoren als Größen verstanden werden, die sowohl eine Richtung angeben als auch eine Länge haben. Vektoren sind also etwas komplett anderes als gewöhnliche Zahlen. Doch mit dem Vektorbegriff allein kann man noch nicht allzu viel anfangen. Man muss ja mit Vektoren auch rechnen können. Beispielsweise entspricht die Addition von Vektoren dem Aneinanderlegen von Pfeilen im Koordinatensystem.

Dieses Vorgehen, das von der Schule her bekannt ist, sucht in einer Mathematikvorlesung an der Universität seinesgleichen. Denn hier wird der Vektorbegriff viel allgemeiner behandelt, was jedoch auf Kosten der Anschaulichkeit geht. Es geht dann nicht mehr darum, dass man Pfeile in Koordinatensysteme zeichnet, sondern dass Vektoren als abstrakte Größen behandelt werden, für die bestimmte Grundregeln, sogenannte Axiome, gelten. Es ist jedoch so, dass in der Praxis oft die anschauliche Vorstellung von Vektoren ausreichend ist, wie man sie in der Schule kennengelernt hat.

In den Ingenieurwissenschaften lassen sich beispielsweise mit Hilfe von Vektoren Kräfte beschreiben, die innerhalb einer gegebenen Anordnung wirken, wie zum Beispiel einem Flaschenzug. Kräfte besitzen einen Angriffspunkt, zeigen in eine bestimmte Richtung und haben außerdem eine bestimmte Größe. Nicht umsonst stellt man sie in Skizzen als Pfeile dar. Das Ganze schreit förmlich nach dem Vektorbegriff.

Soll die Bahn eines elektrisch geladenen Teilchens in der Nähe eines Magneten beschrieben werden, so kann auch dies mit Vektoren erfolgen. Die Flugbahn ergibt sich aus der Kraft, die der Magnet auf das Teilchen ausübt. Man kann sowohl die Flugbahn als auch die Kraft mittels Vektoren beschreiben. Zum einen bewegt sich das Teilchen auf seiner Bahn in eine bestimmte Richtung, und legt eine Wegstrecke zurück. Zum anderen zeigen die Kraftlinien in eine Richtung, und die Kraft selbst besitzt zudem eine gewisse Stärke. Das sind Problemstellungen, die wie geschaffen sind für eine Anwendung der Vektorrechnung.

Matrizen in Schule, Studium und Beruf

Stellvertretend für ein rechtwinkliges Zahlenschema hat der Begriff der »Matrix« schon lange Einzug in die Mathematik gehalten. Leuten, die Sudoku spielen oder sich mit magischen Quadraten beschäftigen, sind solche Schemata durchaus bekannt. In der Mathematik umfasst man die Zahlen darüber hinaus mit einem Paar runder Klammern, wie beispielsweise: