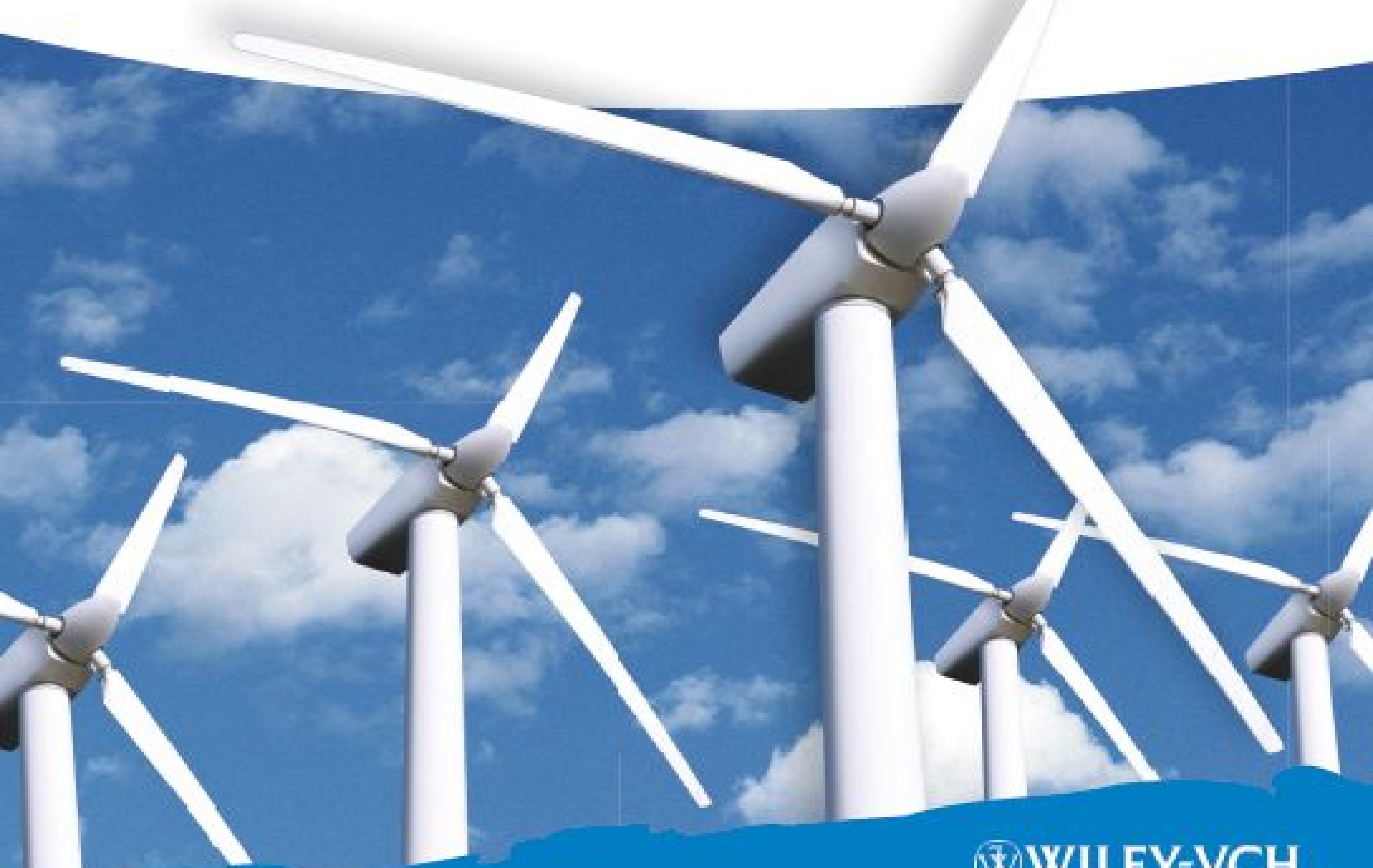
Verdammt clever!

Friedhelm Kuypers

Physik für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Band 1: Mechanik und Thermodynamik

3., überarbeitete und erweiterte Auflage



WILEY-VCH

Inhalt

Register

Beachten Sie bitte auch weitere interessante Titel zu diesem Thema

Thomsen, C.
Physik für Ingenieure für Dummies
2011
ISBN: 978-3-527-70622-8

Räsch, T.
Mathematik der Physik für Dummies
2011
ISBN: 978-3-527-70576-4

Christman, J. R., Derringh, E.
Halliday Physik
880 Losungen
2008
ISBN: 978-3-527-40901-3

Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.
Halliday Physik
Bachelor-Edition
2007
ISBN: 978-3-527-40746-0

Friedhelm Kuypers

Physik für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Band 1: Mechanik und Thermodynamik

3., überarbeitete und erweiterte Auflage

WILEY-VCH

WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA

WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA

Autor

Prof. Dr. Friedhelm Kuypers

Hochschule Regensburg

Prüfeninger Straße 58

93049 Regensburg

friedhelm.kuypers@hs-regensburg.de

3., überarbeitete und erweiterte Auflage 2012

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

eingetragene Warenzeichen oder sonstige gesetzlich geschützte

Kennzeichen handeln, wenn sie nicht eigens als solche markiert sind.

Print ISBN: 978-3-527-41135-1

ePDF ISBN: 978-3-527-69957-8

ePub ISBN: 978-3-527-66956-1

Mobi ISBN: 978-3-527-66955-4

Vorwort

Dieses Buch ist der erste Band eines zweibändigen Werkes der Physik und beschäftigt sich mit Mechanik und Thermodynamik. Der zweite Band enthält die Elektrizität, Optik und Wellenlehre. Für das Verständnis werden nur elementare Grundkenntnisse der Differential- und Integralrechnung vorausgesetzt.

Das Buch unterscheidet sich in den inhaltlichen Schwerpunkten und vor allem im didaktischen Konzept von anderen Büchern. Im Folgenden werden die Besonderheiten aufgezählt:

- *Stoffbeschränkung:* Oft wird in Vorlesungen Stoff unterrichtet, der so schwierig ist, dass dazu keine sinnvollen, d. h. von Studenten lösbaren Klausuraufgaben existieren. Ich meide allzu schwierige Inhalte ganz bewusst und behandele nur den Stoff, den die Studierenden in den ersten beiden Semestern *verstehen* und daher auch in Klausuren bearbeiten können.

Die Themen werden *behutsam erarbeitet* sowie durch viele Beispiele und vollständig gelöste Aufgaben verdeutlicht. Angesichts der nachdrücklichen Stoffbeschränkung mag die gesamte Seitenzahl der beiden Bände (knapp 900) hoch erscheinen; aber nach meiner Einschätzung kann ein wirkliches Verständnis der Physik wohl kaum auf 500 Seiten vermittelt werden.

- *Beispiele und 187 Aufgaben* werden sorgfältig in den Lehrstoff eingearbeitet. Die Beispiele werden durch einen grauen Balken markiert. Bei jeder Aufgabe wird der subjektiv geschätzte Schwierigkeitsgrad – leicht, mittel, schwer – angegeben.
- *157 Aufgaben enthalten ausführliche Lösungen am Ende des Buches. Zu* den 30 übrigen Aufgaben, neben deren

Überschriften das rechts dargestellte *Maus-Icon* steht, werden am Ende des Buches nur die Endergebnisse genannt; ihre ausführlichen Lösungen finden Sie frei zugänglich auf der **Webseite zum Buch unter www.wiley-vch.de.**

Bei der Auswahl der Beispiele und Aufgaben waren drei Kriterien maßgebend:

1: *Die Beispiele und Aufgaben sollen die Theorie verdeutlichen und veranschaulichen, Rechenmethoden und physikalisches Denken einüben* sowie ein Gefühl für Größenordnungen in Physik und Technik geben.

2: Am liebsten lösen Studenten *Aufgaben aus dem Alltagsleben und aus der industriellen Praxis.* Kann man auf dem Mond wirklich sechsmal so hoch springen wie auf der Erde? Welche Bewegungen machen Kinder auf der Schaukel und warum? Was ist eine Resonanzkatastrophe? Wie regelt der Körper die Blutzufuhr? Warum bildet sich beim Öffnen einer Bierflasche Nebel über der Flüssigkeit? Wie groß sind die maximalen Wirkungsgrade von Windrädern, Verbrennungsmotoren und Wärmepumpen?

3: Die meisten Beispiele und Aufgaben sind ehemalige Klausuraufgaben.

- *Kontrolle und Veranschaulichung:* Oft wird beklagt, dass viele Studenten Rechnungen und Ergebnisse völlig ungeprüft und kritiklos übernehmen. Jeder Student sollte sich angewöhnen, Rechnungen immer zu überprüfen. In diesem Buch werden Resultate regelmäßig getestet und zugleich veranschaulicht, indem sie auf bereits bekannte *Spezialfälle* angewendet, *Abhängigkeiten von Parametern und Anfangsbedingungen* untersucht, Zahlen eingesetzt und Einheiten kontrolliert werden.
- *Hinweise auf typische Fehler:* Fehler, die in Übungen und Klausuren immer wieder gemacht werden, Fallen und häufige Missverständnisse werden ausdrücklich genannt.

So kann der Leser nicht nur aus den eigenen Fehlern, sondern auch *aus den „klassischen" Fehlern anderer Studenten lernen.*

- *Zusammenfassung:* Am Ende jedes Kapitels werden die wichtigsten Gleichungen, Sätze und Aussagen nochmals in Kürze zusammengefasst. Zusammenfassungen bieten eine Übersicht des behandelten Stoffes und können daher auch *vor* dem Studium eines Kapitels gelesen werden.

Unterkapitel, deren Überschrift mit einem Stern * markiert sind, können beim ersten Lesen übergangen werden.

Die dritte Auflage wurde vollständig überarbeitet und gestrafft. Einige Kapitel, die für Studierende im ersten und zweiten Semester nur schwer zu verstehen sind, wurden gestrichen. Neu hinzu gekommen ist das Unterkapitel **„4.4 Erneuerbare Energien".** Hier werden auf 10 Seiten wichtige Daten, der momentane Stand der erneuerbaren Energieproduktion und die zukünftigen Erwartungen an Solarzellen, Wasserkraftwerke, Windkraftanlagen, Solarthermische Kraftwerke und Flachkollektoren dargestellt. In den Unterkapiteln 8.8 und 15.6 werden Windkraftanlagen und Wärmepumpen ausführlich besprochen und ihre maximalen Wirkungsgrade berechnet.

Abschließend möchte ich allen danken, die zur Entstehung dieses Buches beigetragen haben. Prof. Dr. K. Heift hat eine gründliche Fehlersuche in Teil „A Mechanik" durchgeführt. Prof. Dr. P. Dato hat den größten Teil der Thermodynamik kritisch gelesen und zahlreiche Verbesserungsvorschläge gemacht. Besonders danken möchte ich Prof. Dr. A. Deutz, mit dem ich seit vielen Jahren unzählige physikalische und didaktische Probleme besprochen habe. Sein Interesse und seine ständige Bereitschaft, mit mir über Fragen und „Rätsel" der Physik zu diskutieren, haben mir sehr beim Schreiben dieses Buches geholfen.

Allen Lesern, die durch Anregungen, Bemerkungen oder auch durch Fragen zur Verbesserung des Buches beitragen, bin ich auch weiterhin sehr dankbar. Meine E-Mail-Adresse lautet:

friedhelm.kuypers@hs-regensburg.de

Regensburg, im Juni 2012

Friedhelm Kuypers

A

Mechanik

1

Einführung

1.1 Einleitung

Die Physik beschäftigt sich mit der Natur und versucht ihre Gesetze zu enträtseln. Sie hat die Aufgabe, Eigenschaften und Aufbau der Materie und die Wechselwirkungen der Grundbausteine zu verstehen und daraus alle natürlichen Phänomene und Beobachtungen der unbelebten (und teilweise auch belebten) Natur abzuleiten. Die Physik ist daher die grundlegendste aller Naturwissenschaften. Sie hat starke Verbindungen zu den anderen Naturwissenschaften und den Ingenieurwissenschaften.

Die Physik stellt den anderen Wissenschaften aber nicht nur grundlegende theoretische Erkenntnisse zur Verfügung; sie entwickelt auch Methoden und Arbeitsgeräte, die auf fast allen Gebieten der angewandten und reinen Forschung benutzt werden. Erinnert sei hier nur an die Geräte in der Medizin (vom Röntgengerät bis zum Computertomographen) oder an die Archäologie (Luftbildaufnahmen im nicht-sichtbaren Bereich und Altersbestimmungen mit der Radio-Carbon-Methode).

Der physikalische Fortschritt vollzieht sich durch eine *wechselseitige Befruchtung von Theorie und Experiment.* Am Anfang stehen in der Regel Beobachtungen und Messungen der Experimentalphysiker. Der theoretische Physiker schlägt daraufhin ein *Modell* vor, *das auf Axiomen* (*Postulaten*) *beruht, die nicht bewiesen, also nicht mathematisch aus anderen Gesetzen abgeleitet werden* *können, sondern nur von der Erfahrung ausgehen* (*Induktive Methode*). Wenn das Modell die bereits bekannten experimentellen Befunde richtig beschreibt, werden weitere, evtl. noch nicht bekannte Vorhersagen mathematisch aus dem Modell hergeleitet und experimentell überprüft (*Deduktive Methode*). Unter Umständen muss man das Modell dann modifizieren oder erweitern oder bestimmte Gültigkeitsgrenzen stecken; evtl. ist das Modell auch völlig zu verwerfen.

Die gegenseitige Verknüpfung von Theorie und Experiment ist für den ungeheuren Fortschritt der modernen Wissenschaft verantwortlich. Die erst zu Beginn der Neuzeit von Galileo Galilei eingeführte ‘Experimentelle Naturwissenschaft’ verlangt die Überprüfung jeder neuen Theorie an der Wirklichkeit, am Experiment. Neben der Forderung nach der inneren Widerspruchsfreiheit und dem Wunsch, dass die Modelle und Gesetze möglichst einfach und ‘schön’ aussehen sollen, ist die Übereinstimmung mit der Realität das entscheidende Kriterium, das über Annahme oder Ablehnung eines Modells entscheidet. Diese Arbeitsweise war den alten Griechen, die sich intensiv mit den Naturgesetzen beschäftigt und viele bedeutende Gelehrte hervorgebracht haben, völlig fremd. Für sie war die Erforschung der Natur keine Wissenschaft in unserem Sinn, sondern Philosophie; ihre Gedanken und Modelle waren reine *Spekulationen,* die zwar auch widerspruchsfrei und möglichst einfach sein sollten, aber nicht an der Wirklichkeit überprüft wurden. Dies ist der Hauptgrund dafür, dass die Naturwissenschaften in der Antike und im Mittelalter nur relativ wenige Erfolge aufzuweisen hatten.

Mehr als jeder andere Wissenschaftler arbeitet der Physiker quantitativ, also mit Zahlen und Gleichungen. Man kann durchaus sagen, dass der Physiker eine Beobachtung oder eine Information erst dann richtig verstanden hat, wenn er sie in eine Gleichung gefasst hat. *Die Mathematik* *ist die Sprache der Physik*; ohne sie sind physikalische Theorien nur sehr unvollständig zu beschreiben.

1.2 Messung und Maßeinheit

Physikalische Erkenntnisse und Zusammenhänge werden durch *physikalische Größen* dargestellt. Darunter versteht man messbare Eigenschaften physikalischer Objekte, Zustände oder Vorgänge wie z. B.

Die Länge eines Stabes	⇔ Objekt
Die Stärke eines elektrischen Feldes	⇔ Zustand
Die Dauer einer Schwingung	⇔ Vorgang

In der Mechanik gibt es drei unabhängige Grundgrößen: MASSE, LÄNGE, ZEIT. Alle anderen Größen der Mechanik werden aus diesen drei fundamentalen Größen abgeleitet. Z. B.

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}$$

$$\text{Beschleunigung} = \frac{\text{Geschwindigkeit}}{\text{Zeit}}$$

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}$$

Neben den drei Grundgrößen der Mechanik gibt es vier weitere unabhängige Grundgrößen:

- *In der Elektrizitätslehre wird eine weitere unabhängige Grundgröße benötigt: Die Stromstärke mit der Einheit‘Ampere’.*
- *In der Thermodynamik sind die Temperatur mit der Einheit ‘Kelvin’ oder ‘Grad Celsius’ und die Stoffmenge mit der Einheit ‘mol’ zwei weitere Grundgrößen.*

- In der Optik kommt schließlich die Lichtstärke mit der Einheit ‘Candela’ hinzu.

Die Messung einer physikalischen Größe erfolgt durch den Vergleich mit einer Einheit. Einheiten sind international festgelegte, reproduzierbare Größen, die durch einen Prototyp (wie früher beim Kilogramm) oder durch eine Mess- oder Zählvorschrift definiert werden. Einheiten brauchen nur für die Grundgrößen festgelegt werden. Die Einheiten der abgeleiteten Größen erhält man dann mit den Definitionsgleichungen dieser (abgeleiteten) Größen.

Die drei Einheiten der Mechanik sind wie folgt definiert:

- Das KILOGRAMM ist die Einheit der Masse.

  Das Kilogramm ist die Masse eines Prototypes, der in der Nähe von Paris aufbewahrt wird und eine Legierung mit 90% Platin und 10% Iridium ist. Neuerdings definiert man ein Kilogramm als die Masse von 5,0188 10^{25} Atomen des Kohlenstoff-Isotops $^{12}_{6}C$ mit sechs Protonen und 12 Nukleonen.

- Das METER ist die Einheit der Länge.

  Das Meter ist die Länge der Strecke, die das Licht im Vakuum während der Dauer von 1/299.792.458 Sekunden zurücklegt.[1]

- Die SEKUNDE ist die Einheit der Zeit.

  Die Sekunde ist der 1/ 31.556.925,975 – Teil der Dauer des tropischen Jahres 1900. Heute definiert man die Sekunde lieber durch atomare Eigenschaften. Danach ist eine Sekunde das 9.192.631.770-fache der Periodendauer der Strahlung, die beim Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes des Isotops $^{133}_{55}Cs$ auftritt.

Die Einheit, in der eine physikalische Größe ausgedrückt wird, muss oft gewechselt werden. Dabei *multiplizieren wir die ursprüngliche Größe mit einem Umrechnungsfaktor*

(Quotienten aus zwei Maßeinheiten), der gleich eins ist. Wir nennen zwei Beispiele:

$$5{,}5\ \text{min} = 5{,}5\ \text{min} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \text{min}} = 330\ \text{s}$$

$$1{,}2\ \text{PS} = 1{,}2\ \text{PS} \cdot \frac{735\ \text{W}}{1\ \text{PS}} = 882\ \text{W}$$

[1] Hiermit erhält die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum einen festen Wert zugeordnet, nämlich 299.792.458 m/s.

2

Kinematik der Massenpunkte

Die Kinematik ist die Lehre von den Bewegungen der Körper (Griechisch: Kinema = Bewegung). Dabei werden die Ursachen der Bewegungen, d.h. die beteiligten Kräfte, und die Wirkungen der Bewegungen auf andere Körper nicht untersucht. Die Kinematik ist eine rein mathematische Disziplin und berechnet Bahnkurven, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Ruhe und Bewegung sind relative Begriffe. Für einen im Zug reisenden Beobachter ist eine neben ihm sitzende Person in Ruhe, für einen draußen am Bahnsteig stehenden Beobachter hingegen ist diese Person in Bewegung. Deshalb haben die Begriffe ‘Ruhe’ und ‘Bewegung’ nur dann einen eindeutigen Sinn, wenn das Bezugssystem angegeben wird, auf das sie sich beziehen. *Wenn nichts anderes vereinbart wird, ist in der Physik und in der Technik stets ein mit der Erde fest verbundenes Bezugssystem zugrunde gelegt.*

2.1 Idealisierungen

Bei der Berechnung von Bewegungen ist es oft zulässig und sinnvoll, von der Ausdehnung des Körpers abzusehen und den Körper als *Punktmasse* – auch *Massenpunkt genannt* – zu idealisieren. Dies hat den Vorteil, dass

- der Körper sich nicht drehen kann
- alle auf den Körper einwirkenden Kräfte in einem Punkt angreifen.

Obwohl es in Wirklichkeit keine Massenpunkte gibt, ist die Näherung verschwindender Ausdehnung in der Theorie oft zweckmäßig und erlaubt, wenn die Bahnabmessung wesentlich größer ist als die Ausdehnung des Körpers (siehe z. B. die Bewegungen der Planeten im Sonnensystem). Darüber hinaus werden wir in Unterkapitel 6.1 sehen, dass sich *Punktmassen wie die Schwerpunkte ausgedehnter Körper bewegen.* Danach stimmen die für Massenpunkte berechneten Bewegungen mit den Schwerpunktbewegungen ausgedehnter Körper überein, falls die Massen und die Summe aller Kräfte in beiden Fällen gleich groß sind.

Ganz allgemein werden Idealisierungen, die die Wirklichkeit nicht exakt beschreiben, sondern bestimmte Eigenschaften und Sachverhalte bewusst und gezielt außer acht lassen, sehr häufig in der Physik mit großem Erfolg vorgenommen. Die Vernachlässigung unerwünschter Nebeneffekte und die Konzentration auf das Wesentliche sind so typisch für die Arbeitsweise des Physikers, dass wir kurz über Zulässigkeit und Nutzen von Idealisierungen bzw. Vernachlässigungen sprechen müssen.

- *Die Zulässigkeit von Idealisierungen hängt von dem untersuchten Objekt und der Aufgabenstellung ab*. Dazu drei Beispiele:

  1) Bei einer fallenden Stahlkugel kann die Luftreibung vernachlässigt werden, bei einer fallenden Feder nicht.

  2) Bei der Berechnung der Planetenbahnen können die Planeten als punktförmig angesehen werden, in der Wetterkunde nicht.

  3) Im Maschinenbau dürfen die Corioliskräfte der Erdrotation vernachlässigt werden, in der Wetterkunde aber spielen sie eine ganz entscheidende Rolle.

  In jedem einzelnen Fall ist zu entscheiden, ob die vorgesehenen Idealisierungen zu tolerierbaren Ungenauigkeiten führen oder nicht.

- Die *exakte* Beschreibung der Vorgänge in Natur und Technik ist in nahezu allen Fällen unmöglich. Deshalb müssen Randeffekte außer acht gelassen und dafür kleine – evtl. sogar vernachlässigbare – Ungenauigkeiten in Kauf genommen werden. Viele Vernachlässigungen sind sehr gebräuchlich und weit verbreitet. Kein Maschinenbauer käme auf die Idee, relativistische Massenänderungen oder Corioliskräfte der Erdrotation zu berücksichtigen. Auch Reibungskräfte werden oft nicht in Betracht gezogen.

Zulässige Idealisierungen sind sinnvoll, wenn man dadurch den Rechen- oder Arbeitsaufwand gering halten oder den Blick auf das Wesentliche richten kann.

Es kommt nicht darauf an, ob Idealisierungen auch in der Wirklichkeit realisiert werden können. Seit Galileo Galilei arbeitet die Wissenschaft oft mit *fiktiven Modellen*, die wenig Bezug zur Wirklichkeit haben, aber *leicht überschaubar sind und sich auf das Wesentliche, auf die zu untersuchende Frage konzentrieren.*

Wir nehmen im Folgenden an, dass die betrachteten Körper punktförmig sind. Punktmassen können sich nicht drehen und ihre zeitabhängige Position wird durch den sog. „Ortsvektor" $\mathbf{r}(t)$ beschrieben, der vom Ursprung des Koordinatensystems zum Ort der Punktmasse reicht.

2.2 Geschwindigkeit

Wir definieren die Geschwindigkeit und betrachten zuerst den einfachsten Fall, die *gleichförmige Bewegung.* Darunter versteht man eine geradlinige Bewegung, bei der der Quotient aus zürückgelegter Strecke Δx und benötigter Zeit Δt für alle Zeiten Δt gleich groß ist. Der konstante Quotient $\Delta x/\Delta t$ wird „Geschwindigkeit" v der gleichförmigen Bewegung genannt:

$$v := \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{für gleichförmige Bewegungen} \tag{2.2–1}$$

Die Einheit der Geschwindigkeit ist nach dieser Gl. m/s. Häufig wird auch die Einheit km/h verwendet. Zwischen diesen beiden Einheiten gibt es folgende Umrechnung

(2.2–2) $$3{,}6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Wenn eine gleichförmige Bewegung zur Zeit t = 0 im Punkt $x(0) =: x_0$ beginnt, so gilt

(2.2–3)
$$v = \frac{x(t) - x(0)}{t - 0} = \frac{x(t) - x_0}{t}$$

$$\Rightarrow \qquad x(t) = x_0 + v\,t \qquad \text{nur für gleichförmige Bewegungen mit } v = \text{const}$$

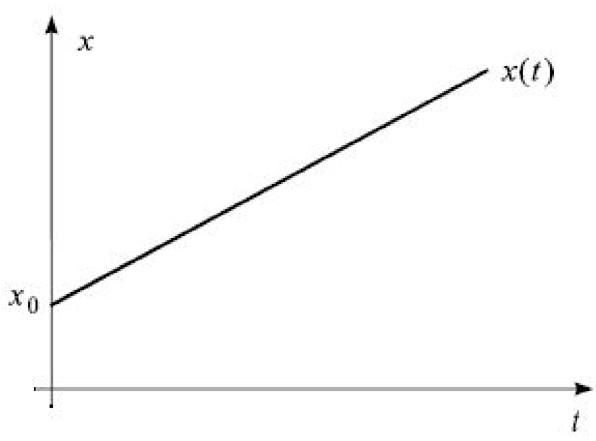
Das sog. „Orts-Zeit-Diagramm" einer gleichförmigen Bewegung ist eine Gerade (siehe Abb. 2.2–1) mit der Steigung v.

Als nächstes betrachten wir *ungleichförmige Bewegungen* auf einer Geraden. Jetzt werden in gleich großen Zeitintervallen nicht mehr gleich große Strecken zurückgelegt, so dass das Orts-Zeit-Diagramm in Abb. 2.2–2 eine gekrümmte Kurve ist.

Man nennt den Quotienten

(2.2–4) $$v_{\mathrm{m}} := \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Abb. 2.2–1 Orts-Zeit-Diagramm einer gleichförmigen Bewegung



„mittlere Geschwindigkeit" oder „Durchschnittsgeschwindigkeit" in dem Intervall [t_1 , t_2] .

In Physik und Technik und beim Autofahren interessiert man sich aber gewöhnlich nicht für die mittlere, sondern für die momentane Geschwindigkeit $v(t)$. Vor der Einführung der Radartechnik wurden momentane Geschwindigkeiten im Verkehr mit zwei Lichtschranken ermittelt. Lichtschranken messen – genaugenommen – die mittlere Geschwindigkeit v_m. Wenn aber der Abstand der Lichtschranken so klein ist, dass ein Fahrzeug seine Geschwindigkeit auf der kurzen Messstrecke kaum ändern kann, dann sagt man: Die gemessene Geschwindigkeit ist – in genügend guter Näherung – die momentane Geschwindigkeit.

Diese Aussage ist umso genauer, je kleiner der Abstand der beiden Lichtschranken ist. Daraus ergibt sich die Definition der momentanen Geschwindigkeit wie folgt:

Die momentane Geschwindigkeit

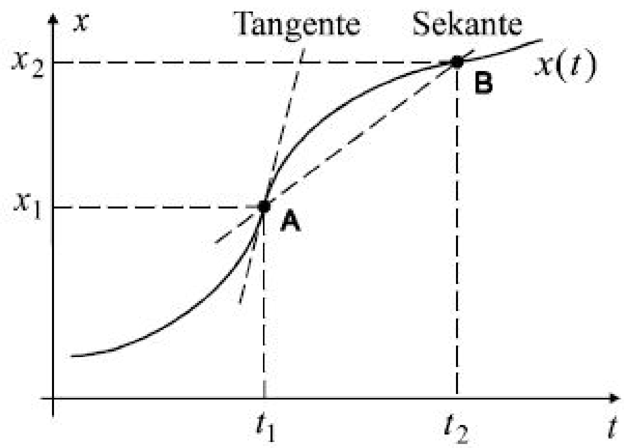
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2.2–5}$$

oder genauer – wenn wir die Zeit deutlich in die Definition einbeziehen –

$$v(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{d\,x(t)}{dt} = \dot{x}(t) \tag{2.2–6}$$

ist *die zeitliche Ableitung des Ortes x(t).* Es ist allgemein üblich, die zeitliche Ableitung nicht durch einen Strich, sondern durch einen Punkt zu kennzeichnen.

Abb. 2.2–2 Für $t_2 \to t_1$ geht die Steigung der Sekante über in die Steigung der Tangente. Die Steigung der Tangente ist laut Definition die momentane Geschwindigkeit $v(t_1)$.



Bisher waren alle Bewegungen geradlinig. Nun wollen wir auch *krummlinige Bahnen* betrachten. Die zeitabhängige Lage des Massenpunktes wird durch den sog. „Ortsvektor" $\mathbf{r}(t)$ beschrieben, der vom Ursprung des Koordinatensystems zum Ort des Teilchens zeigt (siehe weiter unten Abb. 2.5–2). Der Ortsvektor lässt sich mit seinen drei kartesischen Koordinaten $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ und den sog. „Basisvektoren" $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$, die die Länge Eins haben und auf den drei Koordinatenachsen liegen, als eine Linearkombination schreiben:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{e}_x + y(t)\,\mathbf{e}_y + z(t)\,\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

(2.2–7)

Bemerkung: Die Ortsvektoren dürfen im Gegensatz zu den Vektoren in der Mathematik nicht parallel verschoben werden. Die Ortsvektoren sind ortsfest; ihr Anfang liegt immer im Koordinatenursprung. (Nach einer Parallelverschiebung würde das Ende der Ortsvektoren nicht mehr auf den Ort der Teilchen zeigen.)

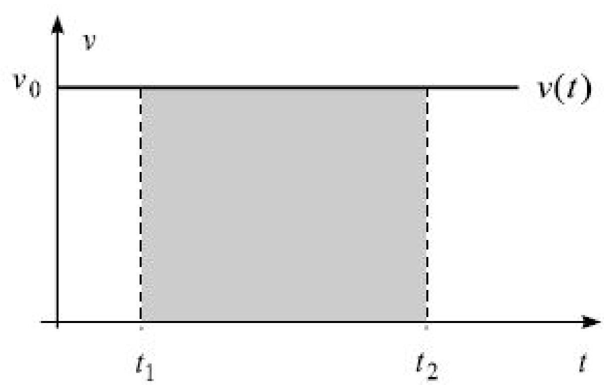
Vektoren werden komponentenweise differenziert und integriert. Daher ergibt sich der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}(t)$ durch die zeitliche Ableitung der drei Koordinaten:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} x(t+\Delta t) - x(t) \\ y(t+\Delta t) - y(t) \\ z(t+\Delta t) - z(t) \end{pmatrix} \quad (2.2\text{–}8)$$

2.3 Einführung in die Integralrechnung

Nach Unterkapitel 2.2 ergibt sich die momentane Geschwindigkeit $v(t)$ durch Ableiten des Ortes $x(t)$ nach der Zeit. Wir wollen nun die umgekehrte Aufgabe lösen: $v(t)$ ist gegeben – z. B. durch den Fahrtenschreiber eines LKWs – und $x(t)$ ist gesucht. $x(t)$ ist die Stammfunktion von $v(t)$.

Abb. 2.3–1 Die graue Fläche im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm ist gleich dem zurückgelegten Weg.



Wir fangen wie üblich mit dem einfachsten Fall an, mit der gleichförmigen Bewegung, für die $v(t)$ = const =: v_0 gilt. Im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm ist $v(t)$ eine Gerade parallel zur Abszisse. Die Integration ist hier besonders einfach: Nach Gl. (2.2–3) wird in dem Zeitintervall $[t_1, t]$, dessen untere Grenze t_1 fest und dessen obere Grenze t variabel ist, folgender Weg zurückgelegt:

$$x(t) - x(t_1) = v_0 \cdot (t - t_1) \quad (2.3\text{–}1)$$

Der Zuwachs $x(t) - x(t_1)$ der Stammfunktionen ist gleich der Fläche unter der Kurve $v(t) = v_0$ im Intervall $[t_1, t]$. Hier deutet sich schon der Zusammenhang zwischen Fläche und Integral an. Der Zuwachs ist die graue Fläche in Abb. 2.3–1. Mit $c := x(t_1) - v_0 \cdot t_1$ folgt:

Damit ist die Stammfunktion $x(t)$ einer konstanten Geschwindigkeit $v(t) = v_0$ bestimmt.

Als nächstes untersuchen wir eine beliebige *un*gleichförmige Bewegung auf der x-Achse. Da die Geschwindigkeit $v(t)$ nicht konstant ist, kann der in dem Zeitintervall $[t_1, t]$ zurückgelegte Weg nicht so ohne weiteres als Produkt $v(t')\,(t - t_1)$ geschrieben werden – zumal man überhaupt nicht wüsste, welche Zeit t' in v einzusetzen wäre.

Wir müssen deshalb anders vorgehen und davon ausgehen, dass die *Geschwindigkeit in genügend kleinen Zeitintervallen Δt nahezu konstant ist.* Der in dem kleinen Zeitintervall $[\hat{t}, \hat{t} + \Delta t]$ zurückgelegte Weg ist daher näherungsweise

$$\Delta x = x(\hat{t} + \Delta t) - x(\hat{t}) \approx v(t')\,\Delta t$$

mit t' = *beliebige* Zeit aus $[\hat{t}, \hat{t} + \Delta t]$

Welche Zeit t' man aus dem Zeitintervall wählt, ist nicht entscheidend, da sich $v(t')$ in dem sehr kleinen Zeitbereich Δt kaum ändert.

Mit dieser Überlegung können wir nun den in der Zeit $[t_1, t]$ zurückgelegten Weg berechnen: Wir unterteilen das Zeitintervall $[t_1, t]$ in n gleich große Teilintervalle der Breite

$$\Delta t = \frac{t - t_1}{n} \qquad (2.3\text{–}2)$$

und berechnen die Geschwindigkeiten $v\,[t_1 + (i - 1)\,\Delta t]$ zu Beginn[1] der Teilintervalle ($i = 1, \ldots n$). Dann ist der im Gesamtintervall zurückgelegte Weg gleich der Summe der in den Teilintervallen zurückgelegten Wege: