Mathematik für Wirtschafts-wissenschaftler

Die Einführung mit vielen ökonomischen Beispielen

Michael Merz
Mario V. Wüthrich

Vahlen

Zum Inhalt:

- Mathematische Grundlagen
- Lineare Algebra
- Matrizentheorie
- Folgen und Reihen
- Reellwertige Funktionen in einer und mehreren Variablen
- Differential- und Integralrechnung
- Optimierung mit und ohne Nebenbedingungen
- Numerische Verfahren

Die Mathematikausbildung spielt eine zentrale Rolle im wirtschaftswissenschaftlichen Studium, da sie die methodischen Grundlagen für zahlreiche Vorlesungen liefert. Wo Optimierungsprobleme auftreten, ist die Mathematik gefordert, und Wirtschaften heißt letztlich, Optimierungsprobleme zu lösen.
So zentral die Rolle der Mathematik in der Ökonomie ist, so schwer tun sich die Studierenden mit mathematischen Methoden und Konzepten. Umso wichtiger ist es, die Studierenden bei ihrem aktuellen Wissensstand abzuholen und vorsichtig an den Stoff heranzuführen. Diesem Ziel verschreibt sich dieses Lehrbuch. Es führt mit vielen interessanten Bei spielen aus der Ökonomie, kurzen Anekdoten und einem modernen mehrfarbigen Design in die zentralen mathematischen Methoden für ein erfolgreiches Wirtschaftsstudium ein, ohne dabei auf mathematische Klarheit sowie die notwendige Formalität und Stringenz zu verzichten. Auch nach dem Studium ist dieses Buch ein wertvoller Begleiter bei der mathematischen Lösung wirtschaftswissenschaftlicher Problemstellungen.

Zu den Autoren:

Prof. Dr. Michael Merz ist Inhaber des Lehrstuhls für Mathematik und Statistik in den Wirtschaftswissenschaften an der Universität Hamburg.
Prof. Dr. Mario V. Wüthrich forscht und lehrt am Department für Mathematik der ETH Zürich.

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Die Einführung mit vielen ökonomischen Beispielen

von

Prof. Dr. Michael Merz

und

Prof. Dr. Mario V. Wüthrich

Verlag Franz Vahlen München

Für
unsere Eltern,
Anja, Alessia und Luisa

Vorwort

Vorwort

Zielsetzung

Das Werk *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler: Die Essentials* ist eine ausführliche, anschauliche, anwendungsorientierte und dennoch präzise Darstellung der mathematischen Grundlagen für ein erfolgreiches wirtschaftswissenschaftliches Bachelor- und Masterstudium. Es versteht sich als Lehrbuch, welches angehende Wirtschaftswissenschaftler im Studium und darüber hinaus auch in ihrem späteren Berufsleben begleitet. Insbesondere soll es den Studierenden einen Weg in die Gedankenwelt der Mathematik aufzeigen, welcher sie dazu befähigt, auftretende ökonomische Probleme mathematisch erfassen, analysieren und nach Möglichkeit auch lösen zu können.

Vermittlung mathematischer Grundlagen

Die Mathematik besitzt nicht nur für die Natur- und Ingenieurwissenschaften, sondern auch für die Wirtschaftswissenschaften eine große Bedeutung. Viele betriebs- und volkswirtschaftliche Problemstellungen werden in zunehmendem Maße im Rahmen mathematischer und statistischer Modelle und Konzepte untersucht. Ein großer Teil der modernen Wirtschaftswissenschaften basiert daher auf der soliden Beherrschung mathematischer Methoden und Denkweisen.

Für die ökonomische Theorie und weite Bereiche der angewandten Wirtschaftswissenschaften, wie z.B. Finanzwirtschaft, Spieltheorie, Marketing, Haushaltstheorie, Risikomanagement, Controlling, Arbeitsmarkttheorie oder Produktionsplanung, wird neben der linearen Algebra und der Differential- und Integralrechnung für Funktionen in einer und mehreren Variablen auch ein grundlegendes Verständnis multivariater Optimierungsprobleme mit oder ohne Nebenbedingungen benötigt. Aus diesem Grund ist die mathematische Grundlagenausbildung in den Lehrplänen wirtschaftswissenschaftlicher Studiengänge an Universitäten und Fachhochschulen fest verankert.

Das vorliegende Lehrbuch trägt dieser Situation in jeder Hinsicht Rechnung und deckt mit seinen 29 Kapiteln die in wirtschaftswissenschaftlichen Bachelor- und Masterstudiengängen benötigten mathematischen Grundlagen ab. Darüber hinaus haben wir eine Darstellung gewählt, die es ermöglicht, es auch als verlässliches Nachschlagewerk für Studium und Beruf zu nutzen.

Vermittlung des mathematischen Formalismus

Während fehlende Kenntnisse bezüglich der mathematischen Notation und Symbolik bei der Anwendung von wirtschaftswissenschaftlichen Theorien und Konzepten häufig nicht so sehr ins Gewicht fallen, erschweren sie oftmals die Aneignung neuen Wissens erheblich. Aus diesem Grund ist es eine weitere wichtige Zielsetzung dieses Lehrbuches, die Studierenden auch beim Erlernen des mathematischen Formalismus zu unterstützen, der für das Verständnis ökonomischer Literatur unerlässlich ist.

Besonderheiten

Das Lehrbuch *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler: Die Einführung mit vielen ökonomischen Beispielen* hebt sich in mehrerer Hinsicht von vielen anderen Lehrbüchern zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler ab.

Brücke zwischen Schule und Hochschule

Die Erfahrungen in den letzten Jahren zeigen, dass viele Studierende mit unzureichenden mathematischen Grundkenntnissen ein wirtschaftswissenschafliches Studium aufnehmen. Die Gründe hierfür sind vielfältig. Neben den unterschiedlichen Lehrplänen in den einzelnen Bundesländern, den verschiedenen Schwerpunktsetzungen in den Schulen, der oftmals mehrere Jahre zurückliegenden Schulzeit sind hier natürlich vor allem auch die großen Unterschiede in der Leistungsfähigkeit der einzelnen Studierenden als Grund zu nennen.

Aber selbst Studierende mit guten Schulnoten im Fach Mathematik haben häufig erhebliche Schwierigkeiten, den hohen mathematischen Anforderungen speziell in den ersten beiden Studienjahren gerecht zu werden. Probleme ergeben sich auch durch den Wechsel der Unterrichtsform sowie durch den im Vergleich zum Schulunterricht größeren Schwierigkeitsgrad, das deutlich erhöhte Tempo und den stärkeren Formalismus.

Das vorliegende Lehrbuch trägt dieser Tatsache durch seinen ersten Teil *Mathematische Grundlagen* Rechnung, in dem wichtige Grundlagen und Themengebiete aus der Schulmathematik, wie z.B. *Aussagenlogik, mathematische Beweisführung, Mengenlehre, Zahlenbereiche, Gleichungen, Ungleichungen, Trigonometrie, Kombinatorik, Relationen* und

Abbildungen, in einem an das Hochschulniveau angepassten Formalismus wiederholt werden. Auf diese Weise wird eine tragfähige Verbindung („Brücke“) zwischen Schule und Hochschule geschaffen, und auch Studierende mit zu Beginn ihres Studiums eher geringen mathematischen Vorkenntnissen erhalten die Chance, die darauf aufbauende mathematische Grundausbildung mit Erfolg zu absolvieren.

Alles so einfach wie möglich, aber nicht einfacher

Bekanntlich fällt vielen Studierenden in wirtschaftswissenschaftlichen Studiengängen das Fach Mathematik nicht leicht. Dies hat zur Folge, dass in vielen Lehrbüchern die mathematischen Aussagen und Methoden zwar didaktisch gut aufbereitet werden, aber die Voraussetzungen, unter denen die Aussagen gelten bzw. unter denen die Methoden zur Anwendung kommen können, zu Gunsten einer stark vereinfachten Darstellung nicht genau präzisiert werden. In der ökonomischen Theorie und in der wirtschaftswissenschaftlichen Praxis zeigt sich jedoch immer wieder, dass zur Vermeidung von Fehlentscheidungen die genaue Kenntnis der benötigten Voraussetzungen mindestens genauso wichtig ist wie das Verständnis der herangezogenen mathematischen Aussagen und Methoden. Aus diesem Grund haben wir uns in dem vorliegenden Lehrbuch ganz bewusst dafür entschieden, bei der Formulierung von mathematischen Sätzen und Methoden stets präzise anzugeben, welche Voraussetzungen ihnen zugrunde liegen.

Aufgrund unserer Lehrerfahrung sind wir auch der Überzeugung, dass eine ausschließlich intuitive Rechtfertigung von mathematischen Aussagen und ihre Veranschaulichung anhand von Beispielen nicht immer ausreichend und es für Studierende auf Dauer nicht sehr befriedigend ist, wenn sie nur Sachverhalte und Rezepte vermittelt bekommen. Daher sollte auch in mathematischen Lehrveranstaltungen für Wirtschaftswissenschaftler der eine oder andere Beweis geführt werden. Neben einem Mehr an Verständnis und Erfüllung führt dies bei den Studierenden auch zu einem gewissen Gespür für die inneren Zusammenhänge mathematischer Resultate und Methoden. Darüber hinaus können Beweise auch als willkommene Wiederholung und Lernkontrolle für bereits Gelerntes aufgefasst werden, in denen aus bekannten mathematischen Resultaten und neuen Definitionen weitere mathematische Aussagen abgeleitet werden. Wir haben daher versucht, für die einfacheren mathematischen Resultate möglichst gut nachvollziehbare Beweise und für die komplizierteren Aussagen zumindest geeignete Literaturhinweise anzugeben. Um jedoch den ergänzenden Charakter von Beweisen auszudrücken und auch um die Aufmerksamkeit der Studierenden nicht allzu stark zu beanspruchen, sind Beweise durch ein kleineres Schriftbild optisch vom Rest des Buches abgetrennt.

Ansprechende Gestaltung und klare Strukturierung

Zusammen mit dem Verlag Vahlen haben wir versucht, das Buch optisch und inhaltlich so zu gestalten, dass man gerne damit arbeitet. Neben einem ansprechenden Layout und vielen mehrfarbigen Abbildungen und Skizzen, dienen hierzu auch die verschiedenfarbigen Boxen für Definitionen (grün), mathematische Sätze (rot) und Beispiele (blau). Auf diese Weise lassen sich die klassischen Strukturelemente eines mathematischen Lehrbuches auf einen Blick unterscheiden, und sie werden vom restlichen Buchtext mit den Motivationen und Erläuterungen hervorgehoben. Zusammen mit der Kennzeichnung des Beweises eines mathematischen Satzes durch das Symbol ■ fördert dies die Übersichtlichkeit und unterstreicht die klare Strukturierung des Lehrstoffes in Definition, Satz, Beweis und Beispiel.

Ausführliche Motivation und viele (ökonomische) Beispiele

Bei der Einführung neuer Konzepte und Methoden wird stets zuerst die zugrunde liegende mathematische Problemstellung erläutert und – sofern angebracht – der Zusammenhang zu ökonomischen Fragestellungen hergestellt. Neben einer Vielzahl von reinen Rechenbeispielen, die vor allem zur Verdeutlichung der mathematischen Definitionen und Resultate sowie zur Erlangung gewisser Rechenfertigkeiten dienen, sind in diesem Lehrbuch auch viele interessante ökonomische Anwendungen zu finden, welche die hohe Praxisrelevanz der behandelten Themen belegen. Zum Beispiel sind in diesem Buch wirtschaftswissenschaftliche Anwendungen aus den Bereichen *Tauschwirtschaft, Portfoliomanagement, Hedging, Input-Output-Analyse, Produktionsrechnung, Markentreue, Wirtschaftsentwicklung, Rating von Unternehmen, Einkommensteuer, Entscheidungstheorie, Abschreibung, Statistik, komparativ-statische Analyse, Finanzmathematik, Risikomanagement, Haushaltstheorie, Lagerhaltung, Optimierung von Transport-, Verschnitt-* und *Mischproblemen* usw. zu finden.

Mathematik ist spannend und macht Spaß

Vor der Mathematik braucht man keine Angst zu haben! Die Mathematik ist auch keine graue Theorie, deren Erlernen ausschließlich langweilig und mühsam ist. Sie ist vielmehr eine lebendige Wissenschaft und die Beschäftigung mit ihr kann durchaus spannend und überraschend sein sowie eine Menge Spaß machen. Zum Beleg dieser – für manche vielleicht etwas gewagten – Behauptung sind neben einer Vielzahl von ökonomischen Beispielen auch viele historische Anmerkungen, kurze Anekdoten und überraschende Ergebnisse in diesem Buch zu finden. Hierzu zählen unter anderem das *Beispiel von den drei Freunden im Gefängnis, das Beispiel von Anna und Bernd, das Barbier-Paradoxon, Hilberts Hotel, das Geburtstagsparadoxon, der Satz vom Fußball, der $25.000.000.000 Eigenvektor von Google, die 37%-Regel* und *das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte*. Darüber hinaus wird der aufmerksame Leser zum Beispiel auch auf den *kürzesten Witz der Welt, die schönste Formel, die berühmteste Gleichung* sowie auf eine Auswahl der *bedeutendsten mathematischen Sätze* stoßen.

Unterstützung von Dozenten

Aus unserer langjährigen Erfahrung als Hochschullehrer wissen wir, wie dankbar Studierende speziell in Mathematik-Vorlesungen Abbildungen und Bilder aufnehmen. Daher stellen wir Dozenten gerne alle Abbildungen und Bilder unseres Buches zur Verfügung. Darüber hinaus unterstützen wir den Einsatz dieses Buches in der Lehre mit einem mittels LaTeX erzeugten PDF-Foliensatz. Für die Zusendung dieser Lehrmaterialien genügt eine kurze E-Mail an `michael.merz@wiso.uni-hamburg.de` unter Nennung der geplanten Vorlesung sowie der Lehreinrichtung.

Zusammen mit dem Verlag Vahlen haben wir in den letzten drei Jahren viel Zeit und Energie aufgewendet, um ein Lehrbuch zu erstellen, dass die Lehre bestmöglich unterstützt. Wir würden uns daher sehr freuen, wenn Sie unser Lehrbuch in Ihren Lehrveranstaltungen einsetzen und Ihren Studierenden empfehlen.

Behandelte Themen

Dieses Lehrbuch bietet eine umfassende Darstellung des Faches Mathematik, wie es in den ersten beiden Semestern an Hochschulen in wirtschaftswissenschaftlichen Studiengängen unterrichtet wird. Es ist dabei in zehn Teile untergliedert. Neben dem „Standardstoff“ der mathematischen Grundausbildung werden auch eine Reihe von Themen behandelt, welche den Studierenden häufig erst in höheren Semestern oder in der beruflichen Praxis begegnen. Hierzu zählen zum Beispiel die Themengebiete *komplexe Zahlen, Mächtigkeit von Mengen, orthogonale Projektionen, Eigenwerttheorie, Quadratische Formen, Landau-Symbole, Fixpunktsätze, Potenzreihen, Riemann-Stieltjes-Integral, Taylor-Formel in einer oder mehreren Variablen, mehrfache Riemann-Integrale, Parameterintegrale, Einhüllendensätze, Optimierung unter Gleichheits- und Ungleichheitsnebenbedingungen, lineare Optimierung, numerische Lösung von Gleichungen, Polynominterpolation, Spline-Interpolation* und *numerische Integration*. Dieses Buch ist daher auch nach der mathematischen Grundausbildung ein verlässlicher Begleiter in Studium und Beruf.

Danksagungen

Unseren herzlichen Dank möchten wir allen Kollegen, Mitarbeitern und Studierenden aussprechen, die durch Anregungen und Hinweise zur Verbesserung dieses Lehrbuches beigetragen haben.

An erster Stelle sind hier unsere Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter, Frau Dipl.-Kffr. Nataliya Chukhrova, Frau Dipl.-Übers. Angelika Ruiz, Frau Dipl.-Math. Anne Thomas, Herr Dipl.-Math. Sebastian Happ, Herr Dipl.-Kfm. Jochen Heberle und Herr Dipl.-Vw. Arne Johannssen zu nennen. Sie alle haben das Korrekturlesen unseres Manuskriptes stets mit viel Freude und Engagement übernommen. Zu großem Dank sind wir aber auch einer Reihe von motivierten Studierenden verpflichtet, die das Manuskript sehr genau gelesen und dabei eine Vielzahl von Verbesserungen und didaktischen Hinweisen in den Entstehungsprozess eingebracht haben. Beteiligt waren hierbei Frau Eva Elena Ernst, Frau Elisabeth Hufnagel, Frau Laura Prill, Herr Manuel Ernst, Herr Chris Huber, Herr Nicolas Iderhoff und Herr Sören Pannier. Unser besonderer Dank gilt auch Herrn Philipp Rohde, der neben seiner Tätigkeit als Korrekturleser die Erstellung eines guten Dutzend aufwendiger LaTeX-Grafiken übernommen hat, und Herrn Aidin Miri Lavasani, der für sein sorgfältiges Korrekturlesen selbst nach langem Zureden partout keine Entlohung für seine Arbeit entgegennehmen wollte. Nicht zu vergessen ist auch Herr Torsten Frese, der durch seine große Hilfsbereitschaft sowie viele kleinere und größere Freundschaftsdienste zum Gelingen dieses Buches beigetragen hat.

Schließlich gilt unser Dank Herrn Dennis Brunotte, der mit seiner beeindruckenden Sachkenntnis als Lektor dieses Buchprojekt während der kompletten Entstehungsphase begleitet hat sowie Dr. Jonathan Beck vom Verlag Vahlen für die Bereitschaft, ein mehrfarbiges Mathematikbuch zu verlegen.

Eine Bitte der Autoren

Für Hinweise und Anregungen – insbesondere aus dem Kreis der Studierenden – sind wir stets sehr dankbar. Sie sind eine wichtige Voraussetzung und wichtige Hilfe für die permanente Verbesserung dieses Lehrbuches.

Wir wünschen Ihnen nun in Ihrem Studium mit diesem Buch viel Freude und Erfolg!

Hamburg und Zürich, im Herbst 2012
Michael Merz, Mario V. Wüthrich

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Mathematische Grundlagen

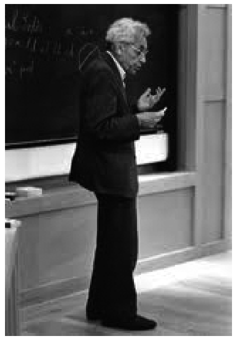
Kapitel 1

Aussagenlogik und mathematische Beweisführung

1.1 Was ist Mathematik?

Auf die Frage „Was ist ein Mathematiker?“ gab der bedeutende ungarische Mathematiker *Paul Erdös* (1913–1996) die kurze Antwort:[1]

> *„A mathematician is a machine for turning coffee into theorems.“*



P. Erdös

Die Frage „Was ist Mathematik?“ lässt sich jedoch nicht so einfach und prägnant beantworten. Selbst unter Mathematikern existieren die verschiedensten Auffassungen darüber, wie diese Frage zu beantworten sei. Die Mathematik ist jedenfalls eine der ältesten Wissenschaften der Welt. Sie entstand aus der Untersuchung von geometrischen Formen und Figuren sowie dem Messen und dem Rechnen mit Zahlen. Die Geschichte der Mathematik reicht bis ca. 3000 Jahre v. Chr. zu den alten Ägyptern und Babyloniern zurück, wobei der Begriff „Mathematik“ seinen Ursprung im griechischen Wort „mathema“, der ursprünglichen Bezeichnung für Wissenschaft überhaupt, hat.

Aufgrund ihrer umfassenden Bedeutung und Anwendbarkeit gibt es bis heute keine allgemein anerkannte Definition dafür, was unter dem Begriff „Mathematik“ genau zu verstehen ist. Selbst die Frage, ob die Mathematik zu der Wissenschaftskategorie der **Naturwissenschaften** oder doch eher zu den **Geisteswissenschaften** zu zählen ist, wird seit langer Zeit kontrovers diskutiert. Für einige überwiegt bei ihrer Einordnung vor allem der Aspekt, dass viele mathematische Fragestellungen und Begriffe durch natur- und ingenieurwissenschaftliche Problemstellungen motiviert sind, während sich andere bei ihrer Einordnung mehr von der Tatsache leiten lassen, dass die Mathematik starke methodische und inhaltliche Gemeinsamkeiten zur Philosophie aufweist. Wieder andere kategorisieren die Mathematik – neben weiteren Disziplinen wie z. B. der Informatik und der reinen Linguistik – als **Struktur-** bzw. **Formalwissenschaft**. Sie betonen damit den Aspekt, dass sich die Mathematik mit der Analyse von formalen Systemen beschäftigt und nicht mit der Untersuchung vorgefundener Gegebenheiten, wie es in der real- oder erfahrungswissenschaftlichen Forschung der Fall ist. Der US-amerikanische Mathematiker *Norbert Wiener* (1894–1964) war dagegen einer ganz anderen Auffassung und sagte:

> *„Mathematics is an experimental science. It matters little that the mathematician experiments with pencil and paper while the chemist uses testtube and retort, or the biologist stains and the microscope. The only great point of divergence between mathematics and the other sciences lies in the circumstance that experience only whispers ‘yes’ or ‘no’ in reply to our questions, while logic shouts.“*

N. Wiener

Unabhängig von dieser Kontroverse wird jedoch die Mathematik heute üblicherweise als eine Wissenschaft beschrieben, die abstrakte Strukturen und Objekte bezüglich ihrer Eigenschaften und Muster untersucht. Dabei wird oftmals auch zwischen **reiner** und **angewandter Mathematik** unterschieden, wobei die Grenze zwischen diesen beiden Teilgebieten durchaus fließend ist. Während die reine Mathematik durch abstrakte Konzepte ohne jeglichen Bezug zu außermathematischen Anwendungen geprägt ist, hat sich die angewandte Mathematik den Einsatz und die Entwicklung mathematischer Methoden zur Lösung von Problemen aus der Physik, Chemie, Biologie, Medizin, Wirtschaft, Informatik, Technik usw. zum Ziel gesetzt. Zur angewandten Mathematik zählen z. B. die Bereiche numerische Mathematik, Ingenieurmathematik, mathematische Physik, Technomathematik, mathematische Psychologie, Graphentheorie, Kryptologie usw.

Andere Bereiche der angewandten Mathematik, die einen sehr starken Anwendungsbezug speziell zu den Wirtschaftswissenschaften besitzen, sind z. B. Wahrscheinlichkeitstheorie, Statistik, Finanzmathematik, Versicherungsmathematik, Spiel- und Entscheidungstheorie, Ökonometrie, Optimierungstheorie oder Operations Research.

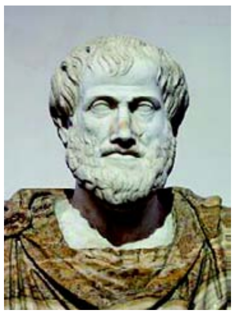
Das Ziel dieses Lehrbuches ist es, den Lesern die Grundlagen aus den mathematischen Teilgebieten **Algebra** (insbesondere lineare Algebra) und **Analysis** zu vermitteln, die für das Erlernen der Konzepte, Methoden und Modelle in diesen für die modernen Wirtschaftswissenschaften wichtigen Bereichen der angewandten Mathematik benötigt werden.

[1] Einige Quellen ordnen dieses Zitat auch dem ungarischen Mathematiker *Alfréd Rényi* (1921–1970) zu, der ein kaffeeabhängiger Kollege von *Erdös* war.

1.2 Axiom, Definition und mathematischer Satz

Wie in Abschnitt 1.1 bereits erläutert wurde, ist die Mathematik durch die Untersuchung von abstrakten Strukturen und Objekten bezüglich ihrer Eigenschaften und Muster geprägt. Um dabei zum einen Missverständnissen und Mehrdeutigkeiten in der Formulierung von Definitionen und mathematischen Resultaten vorzubeugen, und zum anderen die universelle Anwendbarkeit der mathematischen Konzepte und Methoden zu gewährleisten, bedient man sich in der Mathematik einer eigenen künstlichen Sprache.

Diese Kunstsprache wird als **formale Logik** bezeichnet. Das Wort „Logik“ stammt aus dem Altgriechischen und bedeutet soviel wie „denkende Kunst“ oder „Vorgehensweise“. Die formale Logik hat ihre Ursprünge bereits in der Antike und wurde durch *Aristoteles* (384–322 v. Chr.) zu einem bis in die heutige Zeit gültigen Stand entwickelt.


Büste von Aristoteles

In der formalen Logik erfolgt die Analyse und Konstruktion von Aussagen und logischen Schlussfolgerungen nicht mit Hilfe einer natürlichen Sprache, sondern auf Basis einer formalen, künstlichen Sprache mit speziellen Symbolen und streng definierten Schlussregeln. Dabei stehen ausschließlich formale Aspekte im Vordergrund und die Analyse und Konstruktion von Aussagen erfolgt unabhängig von ihrem konkreten Inhalt. Kennzeichnend für die formale Logik ist auch, dass neue Erkenntnisse ausschließlich innerhalb logisch abgeschlossener und widerspruchsfreier Systeme gewonnen werden und dass ihr Wahrheitsgehalt nur von logisch korrekten Schlüssen abhängt.

Ein Beispiel für solch ein formales System ist die **Aussagenlogik**, die Gegenstand von Abschnitt 1.3 ist. Die Bedeutung der Logik für die gesamte Mathematik kommt sehr gut durch das Zitat

> *„Logic is the hygiene the mathematician practices to keep his ideas healthy and strong.“*


H. Weyl

des deutschen Mathematikers *Hermann Weyl* (1885–1955) zum Ausdruck.

Axiomatische Theorien

Ein weiteres Charakteristikum für die mathematische Vorgehensweise ist, dass die Mathematik in Form von Theorien präsentiert wird, die aus bestimmten Grundbegriffen gewisse Grundsachverhalte formulieren. Diese Grundsachverhalte, die nicht bewiesen, sondern als wahr angesehen werden, heißen **Axiome**. Aus diesen Grundpostulaten (Axiomen) werden dann weitere wahre Aussagen, die sogenannten **(mathematischen) Sätze**, abgeleitet. Die Herleitung erfolgt dabei nach genau festgelegten Schlussregeln und wird als **Beweis** des Satzes bezeichnet (siehe hierzu die Abschnitte 1.5 und 1.6).

Axiome bilden somit die Grundlage für die Entwicklung einer mathematischen Theorie, die schließlich durch die **Definition** weiterer mathematischer Objekte und die logisch korrekt hergeleiteten Eigenschaften dieser Objekte – in Form von mathematischen Sätzen – entsteht. Aus diesem Grund werden mathematische Theorien auch als **axiomatische Theorien** bezeichnet. Die Wahl der Axiome, die einer mathematischen Theorie zugrunde gelegt werden sollen, wird jedoch häufig kontrovers diskutiert.

Ein Beispiel hierfür ist das 1904 von dem deutschen Mathematiker *Ernst Zermelo* (1871–1953) formulierte **Auswahlaxiom**. Vereinfacht besagt es, dass es zu jeder Menge von nichtleeren Mengen eine Funktion gibt, die jeder dieser Mengen ein Element derselben zuordnet, d. h. „auswählt“. Während das Auswahlaxiom von der überwiegenden Mehrheit der Mathematiker akzeptiert wird, da es in vielen Zweigen der Mathematik zu besonders bedeutenden und ästhetischen Ergebnissen führt, verzichten Anhänger der sogenannten **konstruktivistischen Mathematik** bewusst auf das Auswahlaxiom. Dieser Gruppe von Mathematikern steht eine ganze Reihe bedeutender mathematischer Sätze, zu deren Beweis das Auswahlaxiom benötigt wird, nicht zur Verfügung.


E. Zermelo

Auf der anderen Seite werden jedoch auf diese Weise einige eigentümlich erscheinende Konsequenzen vermieden, die sich ebenfalls mit Hilfe des Auswahlaxioms beweisen lassen. Das bekannteste Beispiel hierfür ist sicherlich das nach den beiden polnischen Mathematikern *Stefan Banach* (1892–1945) und *Alfred Tarski* (1901–1983) benannte **Banach-Tarski-Paradoxon**. Vereinfacht besagt es, dass eine Kugel in $n \geq 3$ Dimensionen stets derart zerlegt werden kann, dass sich ihre Teile wieder zu zwei vollständigen Kugeln zusammenfügen lassen, von denen jede denselben Radius besitzt wie die ursprüngliche Kugel.

S. Banach

Das heißt, das Volumen einer Kugel kann alleine durch Zerlegen der Kugel und anschließendes Wiederzusammenfügen der entstehenden Teile verdoppelt werden, ohne dass dabei erklärt werden kann, wie durch einen solchen Vorgang Volumen aus dem Nichts entstehen soll (vgl. Abbildung 1.1).

A. Tarski

Abb. 1.1: Veranschaulichung des Banach-Tarski-Paradoxons

Unstrittig ist jedoch unter allen Mathematikern, dass die einer mathematischen Theorie zugrunde gelegten Axiome sowohl **konsistent**, d. h. widerspruchsfrei, als auch **unabhängig**, d. h. nicht auseinander ableitbar, sein sollen.

Axiomensystem von Peano

Das Vorgehen bei der Entwicklung einer mathematischen auf Axiomen basierender Theorie lässt sich exemplarisch sehr gut anhand der Defnition der **Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen** nachvollziehen.

G. Peano

Im Folgenden wird deshalb das sogenannte **Axiomensystem von Peano** betrachet, welches 1889 vom italienischen Mathematiker *Giuseppe Peano* (1858–1932) formuliert wurde und zur Definition der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen dient. Es besteht aus fünf Axiomen und charakterisiert die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen und ihre Eigenschaften anhand des Begriffs des „Nachfolgers“:

Definition 1.1 (Axiomensystem von Peano)

(P1) 1 ist eine natürliche Zahl.

(P2) Jede natürliche Zahl n hat eine natürliche Zahl m als Nachfolger.

(P3) 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.

(P4) Verschiedene natürliche Zahlen haben verschiedene Nachfolger.

(P5) Enthält eine Menge A das Element 1 und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger, dann ist die Menge der natürlichen Zahlen eine Teilmenge von A.

Das Axiom (P1) stellt für sich allein genommen zunächst nur sicher, dass es eine mit dem Symbol 1 („Eins“) bezeichnete natürliche Zahl gibt. Bezeichnet ferner $N(n)$ den Nachfolger einer natürlichen Zahl n, dann wird durch die Axiome (P2)–(P5) gewährleistet, dass man sukzessive und widerspruchsfrei durch die Definitionen

$$\begin{aligned} &2 := N(1),\ 3 := N(2),\ 4 := N(3),\\ &5 := N(4),\ 6 := N(5),\ \ldots \end{aligned}$$

unendlich viele weitere natürliche Zahlen erhält, die mit den Symbolen $2, 3, \ldots$ bezeichnet werden. Die auf diese Weise resultierende Menge

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} \tag{1.1}$$

wird als **Menge der natürlichen Zahlen** bezeichnet. Das Axiom (P5) heißt **Induktionsaxiom**, da auf ihm das Beweisprinzip der vollständigen Induktion beruht (siehe hierzu Abschnitt 1.7).

Für die Menge der natürlichen Zahlen definiert man nun die **Addition** durch

$$n + 1 := N(n) \qquad \text{und} \qquad n + N(m) := N(n + m)$$

für alle n und m aus $\mathbb{N}$. Dies führt dann zu der Additionstabelle

$$\begin{aligned}
&1+1=N(1)=2\\
&1+2=1+N(1)=N(1+1)=N(2)=3\\
&1+3=1+N(2)=N(1+2)=N(3)=4\\
&2+1=N(2)=3\\
&2+2=2+N(1)=N(2+1)=N(3)=4\\
&2+3=2+N(2)=N(2+2)=N(4)=5\\
&3+1=N(3)=4\\
&3+2=3+N(1)=N(3+1)=N(4)=5\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Aufbauend auf der Addition wird für die Menge der natürlichen Zahlen die **Multiplikation** definiert durch

$$n \cdot 1 := n \qquad \text{und} \qquad n \cdot N(m) := n + n \cdot m$$

für alle n und m aus $\mathbb{N}$. Aus der Definition $n \cdot 1 := n$ folgt, dass 1 ein **neutrales Element der Multiplikation** ist. Durch die Konvention, dass die Multiplikation stets vor der Addition ausgeführt wird, ergibt sich folgende Multiplikationstabelle

$$\begin{aligned}
&1\cdot 1=1\\
&1\cdot 2=1\cdot N(1)=1+1\cdot 1=1+1=2\\
&1\cdot 3=1\cdot N(2)=1+1\cdot 2=1+2=3\\
&2\cdot 1=2\\
&2\cdot 2=2\cdot N(1)=2+2\cdot 1=2+2=4\\
&2\cdot 3=2\cdot N(2)=2+2\cdot 2=2+4=6\\
&3\cdot 1=3\\
&3\cdot 2=3\cdot N(1)=3+3\cdot 1=3+3=6\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Anschließend lassen sich für die Addition und die Multiplikation mit Hilfe des Axioms (P5) und der Konvention, dass die Multiplikation stets vor der Addition ausgeführt wird, die folgenden grundlegenden **Rechengesetze** beweisen. Es gelten für beliebige natürliche Zahlen l, m, n:

a) **Assoziativgesetze:**

$$l+(m+n)=(l+m)+n \quad \text{und} \quad l\cdot(m\cdot n)=(l\cdot m)\cdot n$$

b) **Kommutativgesetze:**

$$m+n=n+m \quad \text{und} \quad m\cdot n=n\cdot m$$

c) **Distributivgesetz:**

$$l\cdot(m+n)=l\cdot m+l\cdot n$$

Aus den beiden Assoziativgesetzen lässt sich schließen, dass beliebige (mehrfache) Summen und Produkte stets ohne Klammern geschrieben werden können. Die Kommutativgesetze besagen darüber hinaus, dass es bei beliebigen (mehrfachen) Summen und Produkten grundsätzlich nicht auf die Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren ankommt.

An diesem Beispiel einer Einführung der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist ersichtlich, wie in der Mathematik ausgehend von Axiomen und logischen Schlüssen neue mathematische Aussagen hergeleitet und durch die Definition zusätzlicher mathematischer Objekte und mit erneuten logischen Schlüssen weitere mathematische Aussagen gewonnen werden.

Diese grundsätzliche Vorgehensweise beim Aufbau mathematischer Theorien ist auch in diesem Lehrbuch immer wieder sichtbar. Denn ausgehend von Axiomen und/oder Definitionen für grundlegende mathematische Objekte werden immer wieder Aussagen über die wichtigsten Eigenschaften eines mathematischen Objekts in Form eines mathematischen Satzes formuliert. Anschließend erfolgt der Beweis des Satzes oder es wird ein Hinweis gegeben, wie der Beweis geführt werden kann. In manchen Fällen wird auch eine Literaturquelle angegeben, in welcher der Beweis zu finden ist. Ferner werden bei der Definition neuer mathematischer Objekte häufig die Symbole „$:=$“ oder „$:\Leftrightarrow$“ verwendet. Diese Symbole drücken aus, dass das mathematische Objekt auf der linken Seite durch den Ausdruck auf der rechten Seite definiert wird.

1.3 Aussagenlogik

Die Aussagenlogik ist der Bereich der formalen Logik, der sich mit Aussagen und deren Verknüpfung durch logische Operatoren, die sogenannten **Junktoren**, befasst. Ausgehend von sogenannten **Elementaraussagen**, denen einer der beiden Wahrheitswerte „wahr“ oder „falsch“ zugeordnet ist, werden mit Hilfe von Junktoren zusammengesetzte Aussagen gebildet und deren Wahrheitswert – ohne zusätzliche Informationen – aus den Wahrheitswerten der Elementaraussagen abgeleitet. Die Aussagenlogik bildet damit auch die Grundlage für die anderen Teilgebiete der formalen Logik und damit insbesondere auch die Basis für die mathematische Beweisführung, die Gegenstand von Abschnitt 1.6 ist.

Aussagen

Der Begriff der **Aussage** ist für die Aussagenlogik von zentraler Bedeutung:

Definition 1.2 (Aussage)

Eine Aussage A ist ein Satz, der entweder wahr (kurz: w) oder falsch (kurz: f) ist.

Anstelle von w bzw. f wird für den Wahrheitswert einer Aussage oftmals auch 1 bzw. 0 geschrieben. Die Definition 1.2 beinhaltet die beiden folgenden wichtigen Aspekte:

1) Eine Aussage kann nur den Wahrheitswert w oder f besitzen. Für eine Aussage ist kein weiterer Wahrheitswert zugelassen (**Prinzip der Zweiwertigkeit**).
2) Eine Aussage kann nicht sowohl den Wahrheitswert w als auch den Wahrheitswert f haben (**Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch**).

Eine Aussage ist somit formal ein grammatikalisch korrekter Satz, der entweder wahr oder falsch ist. Zum Beispiel ist der Satz „Die Zahl 13 ist eine Primzahl“ eine wahre Aussage, während der Satz „Alle Zahlen sind ohne Rest durch 2 teilbar“ offensichtlich eine falsche Aussage darstellt. Der Wahrheitswert der Aussage „Morgen ist Freitag“ hängt dagegen davon ab, ob diese Feststellung an einem Donnerstag getroffen wurde oder nicht.

Bei einer Aussage ist es aber auch durchaus möglich, dass man zum gegenwärtigen Zeitpunkt noch nicht sagen kann, welchen Wahrheitswert sie besitzt. Dies ist z. B. bei ungelösten mathematischen Problemen der Fall. Die nach dem französischen Mathematiker *Adrien-Marie Legendre* (1752–1833) benannte **Legendresche Vermutung**

Karikatur von A.-M. Legendre

„Zwischen n^2 und $(n+1)^2$ liegt für eine natürliche Zahl n stets mindestens eine Primzahl“

ist ein bekanntes Beispiel für solch eine Aussage. Zum Beispiel liegen zwischen 1 und 4 die Primzahlen 2 und 3, zwischen 4 und 9 die Primzahlen 5 und 7, usw. Einerseits hat noch kein Mensch eine natürliche Zahl n entdeckt, für die zwischen n^2 und $(n+1)^2$ keine Primzahl liegt; andererseits hat auch noch nie jemand beweisen können, dass die Aussage für alle natürlichen Zahlen n wahr ist.

Noch berühmter als die Legendresche Vermutung ist die nach dem deutschen Mathematiker und Diplomaten *Christian Goldbach* (1690–1764) benannte **Goldbachsche Vermutung**

„Jede gerade Zahl n größer als 2 kann als Summe zweier Primzahlen p und q geschrieben werden.“

C. Goldbach

Goldbach formulierte diese Vermutung am 7. Juni 1742 in einem Brief an den schweizer Mathematiker *Leonhard Euler* (1707–1783). Mittlerweile gehört die Goldbachsche Vermutung zu den ältesten und bedeutendsten ungelösten mathematischen Problemen, und dies trotz der Tatsache, dass im Jahre 2000 ein britischer Verlag ein Preisgeld von einer Million Dollar auf den Beweis dieser Vermutung aussetzte. Im November 2011 wurde ihre Gültigkeit für alle Zahlen bis $26 \cdot 10^{17}$ explizit nachgewiesen. Dies ist aber natürlich kein Beweis dafür, dass die Goldbachsche Vermutung für jede beliebig große gerade Zahl gültig ist.

Brief von Goldbach an Euler

Die beiden Feststellungen von *Legendre* und *Goldbach* haben somit gemeinsam, dass sie entweder wahr oder falsch sind, auch wenn die größten Mathematiker der letzten 250 Jahre nicht in der Lage waren, diese Vermutungen zu verifizieren oder zu widerlegen. Einer Person, der es gelingen sollte, eine dieser beiden Vermutungen zu beweisen oder zu widerlegen, wäre mit einem Schlag berühmt und würde sicherlich zahlreiche Angebote für Vorträge und Professuren an renommierten Universitäten erhalten.

Üblicherweise werden Aussagen mit lateinischen Großbuchstaben aus dem vorderen Teil des Alphabets, also A, B, C usw., bezeichnet. Für eine wahre Aussage A sagt man auch:

„A gilt“, „A ist richtig“ oder „A ist erfüllt“

Entsprechend sagt man für eine falsche Aussage A auch:

„A gilt nicht“, „A ist nicht richtig“ oder „A ist nicht erfüllt“

Durch Hinzufügen des Wortes „nicht“ kann also eine Aussage stets **negiert**, d. h. verneint werden.

Aufgrund der Gültigkeit des Prinzips der Zweiwertigkeit spricht man auch von **zweiwertiger Logik**. Im Gegensatz hierzu kann in der **mehrwertigen Logik** und in der **Fuzzy-Logik** eine Aussage mehr als zwei Wahrheitswerte annehmen. Ein Blick in verschiedene Mathematikbücher zeigt, dass das Prinzip der Zweiwertigkeit oft mit dem auch innerhalb mehrwertiger Logiken gültigen **Prinzip des ausgeschlossenen Dritten** verwechselt wird. Das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten besagt, dass für eine beliebige Aussage mindestens die Aussage selbst oder ihr Gegenteil gelten muss. Eine dritte Möglichkeit, die weder die Aussage ist, noch ihr Gegenteil, sondern eine Aussage irgendwo dazwischen, kann es nicht geben.

Beispiel 1.3 (Aussagen)

a) A = „Alle Studierenden lieben das Fach Mathematik.“

b) B = „Die Zahl 9 ist ohne Rest durch 3 teilbar.“

c) C = „Der HSV wird nächster Deutscher Fußballmeister.“

d) D = „In Hamburg scheint jeden Tag die Sonne.“

e) E = „Der gegenwärtige König von Deutschland ist kahl.“

Die Aussagen A und D sind (leider) falsch, während die Aussage B wahr ist. Ob jedoch die Aussage C wahr ist, kann derzeit nicht entschieden werden. Denn dies wird sich erst am Ende der laufenden Fußballsaison zeigen. Bei E handelt es sich hingegen um keine Aussage, da die Feststellung E gegen das Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch verstößt (siehe hierzu Beispiel 1.5b)).

Durch Verknüpfung von Elementaraussagen durch logische Operatoren, die sogenannten **Junktoren** (von lat. iungere „verknüpfen“, „verbinden“), können kompliziertere Aussagen gebildet werden. Dabei wird durch eine sogenannte **Wahrheitstafel** festgelegt, in welcher Weise der Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage durch die Wahrheitswerte der Elementaraussagen bestimmt ist (**Prinzip der Extensionalität**).

In der klassischen Aussagenlogik sind die fünf Junktoren **Negation**, **Konjunktion**, **Disjunktion**, **Implikation** und **Äquivalenz** am gebräuchlichsten.

Negationen

Die **Negation** einer Aussage bezieht sich im Gegensatz zu den anderen vier Junktoren nur auf eine einzelne Aussage. Dennoch wird auch die Negation als eine Verknüpfung von Aussagen bezeichnet.

Definition 1.4 (Negation)

Die Negation $\neg A$ der Aussage A (gelesen: „nicht A“) ist die Verneinung dieser Aussage A. Das heißt, $\neg A$ ist wahr, wenn A falsch ist, und $\neg A$ ist falsch, wenn A wahr ist. Die Negation $\neg A$ ist festgelegt durch die Wahrheitstafel:

A	w	f
$\neg A$	f	w

Neben $\neg A$ ist auch $\overline{A}$ eine verbreitete Schreibweise für die Negation einer Aussage.

Beispiel 1.5 (Negierte Aussagen)

a) Die Aussage A = „Die Zahl 8 ist ohne Rest durch 3 teilbar“ besitzt die Negation $\neg A$ = „Die Zahl 8 ist nicht ohne Rest durch 3 teilbar“ und entsprechend ist die Negation der Aussage B = „Die Zahl 9 ist ohne Rest durch 3 teilbar“ durch $\neg B$ = „Die Zahl 9 ist nicht ohne Rest durch 3 teilbar“ gegeben.

b) Die Feststellung E = „Der gegenwärtige König von Deutschland ist kahl“ verstößt gegen das Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch und ist damit keine Aussage. Denn die Feststellung E ist falsch, da es gegenwärtig keinen König von Deutschland gibt. Aus demselben Grund ist auch die Negation $\neg E$ = „Der gegenwärtige König von Deutschland ist nicht kahl“ falsch. Aus der Definition 1.4 und dem **Gesetz der doppelten Verneinung** (siehe den weiter unten folgenden Satz 1.17b)) folgt, dass die Feststellung E auch richtig ist. Das heißt die Feststellung E besitzt im Gegensatz zu einer Aussage sowohl den Wahrheitswert w als auch den Wahrheitswert f.

c) Die Negation der Aussage $A =$ „Alle Studierenden mögen das Fach Mathematik“ ist $\neg A =$ „Es gibt mindestens einen Studierenden, der das Fach Mathematik nicht mag.“ Hierbei ist zu beachten, dass die Aussage „Kein Studierender liebt das Fach Mathematik“ nicht die Negation von A ist.

Konjunktionen

Die **Konjunktion** zweier Aussagen A und B entspricht dem umgangssprachlichen Wort „und“ und ist wie folgt definiert:

Definition 1.6 (Konjunktion)

Die Konjunktion $A \wedge B$ der beiden Aussagen A und B (gelesen: „A und B“) ist die aus den Aussagen A und B zusammengesetzte Aussage, die genau dann wahr ist, wenn sowohl die Aussage A als auch die Aussage B wahr ist. Ansonsten ist die Konjunktion $A \wedge B$ falsch. Die Konjunktion $A \wedge B$ ist festgelegt durch die Wahrheitstafel:

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \wedge B$	w	f	f	f

Eine Konjunktion $A \wedge B$ mit dem Wahrheitswert w entspricht somit einem „Es ist sowohl A als auch B wahr“. Eine Konjunktion ist falsch, wenn mindestens eine der beiden Aussagen A und B falsch ist.

Die Wahrheitstafeln der beiden Konjunktionen $A \wedge B$ und $B \wedge A$ sind offensichtlich identisch.

Beispiel 1.7 (Konjunktionen)

Gegeben seien die beiden Aussagen $A =$ „Die Bank 1 verkauft die Anleihe X“ und $B =$ „Die Bank 1 verkauft die Anleihe Y“. Dann gilt:

a) $A \wedge B =$ „Die Bank 1 verkauft die Anleihen X und Y.“

b) $\neg A \wedge B =$ „Die Bank 1 verkauft nicht die Anleihe X, aber die Anleihe Y.“

c) $\neg A \wedge \neg B =$ „Die Bank 1 verkauft weder die Anleihe X noch die Anleihe Y.“

Dabei wurde in Beispiel 1.7b) und c) stillschweigend die Konvention verwendet, dass die Negation vor der Konjunktion ausgeführt wird.

Disjunktionen

Die **Disjunktion** zweier Aussagen A und B entspricht dem umgangssprachlichen Wort „oder“ und ist wie folgt definiert:

Definition 1.8 (Disjunktion)

Die Disjunktion $A \vee B$ der beiden Aussagen A und B (gelesen: „A oder B“) ist die aus den Aussagen A und B zusammengesetzte Aussage, die genau dann wahr ist, wenn mindestens eine der beiden Aussagen A oder B wahr ist. Ansonsten ist die Disjunktion $A \vee B$ falsch. Die Disjunktion $A \vee B$ ist festgelegt durch die Wahrheitstafel:

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \vee B$	w	w	w	f

Eine Disjunktion $A \vee B$ mit dem Wahrheitswert w entspricht einem nicht ausschließenden „oder“ im Sinne von „Es ist A und/oder B wahr“. Eine Disjunktion ist somit nur dann falsch, wenn beide Aussagen A und B falsch sind. Das ausschließende „oder“ im Sinne von „Es ist entweder A oder B wahr“ wird durch die zusammengesetzte Aussage

$$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$$

ausgedrückt. Denn diese Aussage ist nur wahr, wenn A wahr und B falsch ist, oder wenn umgekehrt A falsch und B wahr ist. Dabei wurde stillschweigend die Konvention verwendet, dass die Negation vor der Konjunktion und der Disjunktion ausgeführt wird.

Die Symbole $\vee$ und $\wedge$ für Disjunktion bzw. Konjunktion können leicht dadurch unterschieden werden, dass das lateinische Wort „vel“ für das nicht ausschließende „oder“ mit dem Buchstaben „v“ anfängt.

Die Wahrheitstafeln der beiden Disjunktionen $A \vee B$ und $B \vee A$ sind offensichtlich identisch.

Beispiel 1.9 (Disjunktionen)

Durch A und B seien wieder die beiden Aussagen aus Beispiel 1.7 gegeben. Dann gilt:

a) $A \vee B$ = „Die Bank 1 verkauft die Anleihe X und/oder die Anleihe Y."

b) $\neg A \vee \neg B$ = „Die Bank 1 verkauft höchstens eine der beiden Anleihen X und Y."

In Beispiel 1.9b) wurde stillschweigend die Konvention verwendet, dass die Negation vor der Disjunktion ausgeführt wird.

Implikationen

Die **Implikation** $A \Rightarrow B$ ist die am wenigsten intuitive logische Operation. Sie ist wie folgt definiert:

Definition 1.10 (Implikation)

Die Implikation $A \Rightarrow B$ (gelesen: „wenn A, dann B") ist die aus den beiden Aussagen A und B zusammengesetzte Aussage, die genau dann falsch ist, wenn A wahr und B falsch ist. Sonst ist $A \Rightarrow B$ wahr. Die Implikation ist festgelegt durch die Wahrheitstafel:

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Rightarrow B$	w	f	w	w

Die Aussage A wird dabei Voraussetzung oder Prämisse genannt und die Aussage B heißt Schlussfolgerung oder Konklusion.

Anstelle von Implikation spricht man bei $A \Rightarrow B$ auch von einer **logischen Folgerung**. Eine Implikation $A \Rightarrow B$ ist bis auf den Fall einer wahren Voraussetzung A in Verbindung mit einer falschen Schlussfolgerung B stets wahr. Das heißt insbesondere, dass eine Implikation $A \Rightarrow B$, deren Voraussetzung A falsch ist, unabhängig vom Wahrheitswert der Schlussfolgerung B stets wahr ist. Somit kann man aus etwas Falschem alles folgern. Es existiert folglich ein großer Unterschied zwischen einer Implikation und der gängigen Vorstellung von einer „logischen Folgerung", die man automatisch mit einer wahren Prämisse verbindet. Ist jedoch die Prämisse A wahr, dann hängt der Wahrheitsgehalt der Implikation $A \Rightarrow B$ ausschließlich vom Wahrheitsgehalt der Aussage B ab: Ist B wahr, dann auch $A \Rightarrow B$. Ist B falsch, so auch $A \Rightarrow B$.

Neben „wenn A, dann B" sind für $A \Rightarrow B$ auch die Sprechweisen „aus A folgt B", „A impliziert B", „A ist hinreichend für B" und „B ist notwendig für A" üblich. Für die Negation der Implikation $A \Rightarrow B$ schreibt man anstelle von $\neg(A \Rightarrow B)$ häufig auch $A \not\Rightarrow B$.

In Beispiel 1.14a) wird gezeigt, dass die Implikation $A \Rightarrow B$ genau der Aussage

$$\neg B \Rightarrow \neg A$$

entspricht. Dieser Zusammenhang bildet die Grundlage sogenannter **indirekter Beweise** (**Kontrapositionen**), die bei der mathematischen Beweisführung eine wichtige Rolle spielen (siehe Abschnitt 1.6).

Beispiel 1.11 (Implikationen)

a) Durch A und B seien wieder die beiden Aussagen aus Beispiel 1.7 gegeben. Dann gilt: $A \Rightarrow B$ = „Wenn die Bank 1 die Anleihe X verkauft, dann verkauft sie auch die Anleihe Y" und $A \Rightarrow \neg B$ = „Wenn die Bank 1 die Anleihe X verkauft, dann verkauft sie nicht die Anleihe Y".

b) Gegeben seien die beiden Aussagen A = „An meinem Standort regnet es in diesem Moment" und B = „An meinem Standort ist die Straße in diesem Moment nass". Dann ist die Aussage $A \Rightarrow B$ wahr.

c) Gegeben seien die beiden Aussagen A = „Die Zahl 3 teilt die Zahl n ohne Rest" und B = „Die Zahl 9 teilt die Zahl n ohne Rest". Dann ist die Aussage $B \Rightarrow A$ stets wahr. Denn der Fall, dass die Prämisse B wahr und die Schlussfolgerung A falsch ist, kann nicht eintreten, da es keine Zahl n gibt, die ohne Rest durch 9, aber nicht ohne Rest durch 3 teilbar ist.

d) Gegeben seien die Aussagen A = „Der Unternehmensgewinn ist gleich dem Umsatz abzüglich der Kosten", B = „Die Kosten wachsen", C = „Der Umsatz wächst" und D = „Der Gewinn wächst". Wird nun angenommen, dass A eine wahre Aussage ist, dann ist auch die Implikation $C \wedge (\neg B) \Rightarrow D$ = „Wenn der Umsatz wächst und die Kosten nicht steigen, dann wächst der Gewinn" eine wahre Aussage.

Dabei wurde in Beispiel 1.11a) stillschweigend die Konvention verwendet, dass die Negation vor der Implikation ausgeführt wird.

Äquivalenzen

Die **Äquivalenz** $A \Leftrightarrow B$ ist wie folgt definiert:

Definition 1.12 (Äquivalenz)

Die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ (gelesen: „A ist äquivalent zu B") ist die aus den beiden Aussagen A und B zusammengesetzte Aussage, die genau dann wahr ist, wenn sowohl die Aussage A als auch die Aussage B wahr ist, oder aber, wenn sowohl Aussage A als auch Aussage B falsch ist. Sonst ist $A \Leftrightarrow B$ falsch. Die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ ist festgelegt durch die Wahrheitstafel:

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Leftrightarrow B$	w	f	f	w

Eine Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ ist somit genau dann wahr, wenn die beiden Aussagen A und B den gleichen Wahrheitswert besitzen, und zwar unabhängig davon, ob dieser Wahrheitswert w oder f ist.

In Beispiel 1.14b) wird gezeigt, dass die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ genau der Aussage $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ enspricht, d. h. die Äquivalenz

$$(A \Leftrightarrow B) \Longleftrightarrow \big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\big) \qquad (1.2)$$

wahr ist. Dabei wird in (1.2) die Konvention verwendet, dass die beiden Aussagen in Klammern auf der rechten Seite von (1.2) vor der Konjunktion $\wedge$ ausgeführt werden. Somit ist bei einer wahren Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ die Aussage A eine hinreichende Bedingung für B und die Aussage B ist eine hinreichende Bedingung für A. Dieser Zusammenhang ist bei der mathematischen Beweisführung sehr hilfreich (siehe hierzu die Abschnitte 1.5 und 1.6).

Bei einer wahren Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ sagt man, dass die Aussagen A und B **logisch äquivalent** sind. Neben „A ist äquivalent zu B" sind für $A \Leftrightarrow B$ auch die Sprechweisen „A ist gleichwertig zu B", „A genau dann, wenn B", „A dann und nur dann, wenn B" und „A ist notwendig und hinreichend für B" gebräuchlich.

Für die Negation der Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ schreibt man anstelle von $\neg(A \Leftrightarrow B)$ häufig auch $A \not\Leftrightarrow B$.

Beispiel 1.13 (Äquivalenzen)

a) Durch A und B seien wieder die beiden Aussagen aus Beispiel 1.7 gegeben. Dann gilt: $A \Leftrightarrow B =$ „Die Bank 1 verkauft die Anleihe X genau dann, wenn sie auch die Anleihe Y verkauft" und $A \Leftrightarrow \neg B =$ „Die Bank 1 verkauft die Anleihe X genau dann, wenn sie die Anleihe Y nicht verkauft".

b) Gegeben seien die Aussagen $A =$ „Die Zahl n ist ohne Rest durch die Zahl 6 teilbar" und $B =$ „Die Zahl n ist ohne Rest durch die Zahlen 2 und 3 teilbar". Dann ist die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ eine wahre Aussage.

c) Gegeben seien die beiden Aussagen $A =$ „Heute ist Dienstag" und $B =$ „Morgen ist Mittwoch". Dann ist die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ stets eine wahre Aussage, und zwar unabhängig davon, ob die Aussage A wahr oder falsch ist.

d) Gegeben seien die beiden Aussagen $A =$ „Das Versicherungsunternehmen X hat einen Marktanteil von 20%" und $B =$ „Die Konkurrenz des Versicherungsunternehmens X hat zusammen einen Marktanteil von 80%". Dann ist $A \Leftrightarrow B$ stets eine wahre Aussage, und zwar unabhängig davon, ob die Aussage A wahr oder falsch ist.

In Beispiel 1.13a) wurde stillschweigend die Konvention verwendet, dass die Negation vor der Äquivalenz ausgeführt wird.

In diesem Abschnitt wurden mit der Negation, Konjunktion, Disjunktion, Implikation und der Äquivalenz die fünf gebräuchlichsten Junktoren eingeführt. Dabei ist festzuhalten, dass einige dieser Junktoren redundant sind. Denn man kann zeigen, dass bereits zwei Junktoren ausreichend sind, wobei einer davon die Negation sein muss. Die anderen drei Junktoren können dann durch diese beiden Junktoren ausgedrückt werden. Zusammengesetzte Aussagen werden dann jedoch schnell sehr unübersichtlich und kompliziert, weshalb sich die Verwendung aller fünf Junktoren durchgesetzt hat.

Das folgende Beispiel 1.14 zeigt, wie mit Hilfe dieser Junktoren problemlos auch mehr als zwei Aussagen zu neuen Aussagen verknüpft und deren Wahrheitswerte ermittelt werden können. Dabei ist die Reihenfolge, in welcher die einzelnen Teilaussagen ausgewertet werden, analog zur Arithmetik mit Hilfe von Klammern eindeutig festgelegt. Darüber hinaus werden zur Minimierung der dazu benötigten Anzahl von Klammern üblicherweise die in Tabelle 1.1 angegebenen Konventionen bzgl. der Priorität der verschiedenen Junktoren getroffen.

Priorität	Junktor
hoch	Negation
mittel	Konjunktion, Disjunktion
gering	Implikation, Äquivalenz

Tabelle 1.1: Konventionen bzgl. der Priorität der verschiedenen Junktoren (logische Operatoren)

Beispiel 1.14 (Äquivalenzen)

a) Die Aussagen $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$ sind logisch äquivalent. Das heißt, es gilt

$$(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A). \qquad (1.3)$$

Dies ist aus der folgenden Wahrheitstafel ersichtlich:

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Rightarrow B$	w	f	w	w
$\neg B$	f	w	f	w
$\neg A$	f	f	w	w
$\neg B \Rightarrow \neg A$	w	f	w	w

Es ist zu erkennen, dass die beiden Teilaussagen $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$ unabhängig von den Wahrheitswerten der Elementaraussagen A und B stets denselben Wahrheitswert besitzen.

b) Die Aussagen $A \Leftrightarrow B$ und $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ sind ebenfalls logisch äquivalent. Das heißt, es gilt

$$(A \Leftrightarrow B) \Longleftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)). \qquad (1.4)$$

Denn mit einer Wahrheitstafel erhält man:

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Leftrightarrow B$	w	f	f	w
$A \Rightarrow B$	w	f	w	w
$B \Rightarrow A$	w	w	f	w
$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	w	f	f	w

Das heißt, die beiden Teilaussagen $A \Leftrightarrow B$ und $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ besitzen unabhängig von den Wahrheitswerten der Elementaraussagen A und B stets denselben Wahrheitswert.

c) Die Aussagen $A \Rightarrow B$ und $(\neg A) \vee B$ sind logisch äquivalent. Das heißt, es gilt

$$(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow \big((\neg A) \vee B\big). \qquad (1.5)$$

Dies ist aus der folgenden Wahrheitstafel ersichtlich:

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Rightarrow B$	w	f	w	w
$\neg A$	f	f	w	w
$(\neg A) \vee B$	w	f	w	w

Auch hier gilt, dass die beiden Teilaussagen $A \Rightarrow B$ und $(\neg A) \vee B$ unabhängig von den Wahrheitswerten der Elementaraussagen A und B stets denselben Wahrheitswert besitzen.

d) Aus der folgenden Wahrheitstafel ist ersichtlich, dass auch die Aussagen $\neg(A \wedge B)$ und $(\neg A) \vee (\neg B)$ logisch äquivalent sind und somit

$$\big(\neg(A \wedge B)\big) \Longleftrightarrow \big((\neg A) \vee (\neg B)\big) \qquad (1.6)$$

gilt. Dies zeigt die folgende Wahrheitstafel:

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \wedge B$	w	f	f	f
$\neg(A \wedge B)$	f	w	w	w
$\neg A$	f	f	w	w
$\neg B$	f	w	f	w
$(\neg A) \vee (\neg B)$	f	w	w	w

e) Zu guter Letzt erhält man, dass auch die Aussagen $\neg(A \vee B)$ und $(\neg A) \wedge (\neg B)$ logisch äquivalent sind und damit

$$\big(\neg(A \vee B)\big) \Longleftrightarrow \big((\neg A) \wedge (\neg B)\big) \qquad (1.7)$$

gilt. Denn man erhält die folgende Wahrheitstafel:

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \vee B$	w	w	w	f
$\neg(A \vee B)$	f	f	f	w
$\neg A$	f	f	w	w
$\neg B$	f	w	f	w
$(\neg A) \wedge (\neg B)$	f	f	f	w

Tautologien und Kontradiktionen

Bei den zusammengesetzten Aussagen (1.3)–(1.7) handelt es sich somit um sogenannte **Tautologien**, d. h. Aussagen, die stets wahr sind. Ist das Gegenteil der Fall, d. h. ist eine Aussage stets falsch, dann spricht man von einer **Kontradiktion**:

Definition 1.15 (Tautologie, Kontradiktion und Kontingenz)

Eine (zusammengesetzte) Aussage heißt Tautologie oder Identität, wenn sie stets wahr ist. Im Gegensatz dazu wird eine Aussage als Kontradiktion oder Widerspruch bezeichnet, wenn sie stets falsch ist. Eine Aussage, die weder eine Tautologie, noch eine Kontradiktion ist, heißt Kontingenz oder Neutralität.

Offensichtlich ist eine Aussage A genau dann eine Tautologie, wenn ihre Verneinung $\neg A$ eine Kontradiktion ist. Umgekehrt ist eine Aussage A genau dann eine Kontradiktion, wenn ihre Verneinung $\neg A$ eine Tautologie ist.

Eine aus Teilaussagen zusammengesetzte Aussage A ist eine Tautologie, wenn ihr Wahrheitswert unabhängig von den Wahrheitswerten der Teilaussagen stets w ist. Ist A dagegen eine Kontradiktion, dann ist der Wahrheitswert von A unabhängig von den Wahrheitswerten der Teilaussagen stets f. Der Wahrheitswert einer Kontingenz A ist dagegen abhängig von den Wahrheitswerten der Teilaussagen und kann w oder f sein.

Umgangssprachliche Tautologie

Zu beachten ist, dass umgangssprachlich Aussagen der Form „weißer Schimmel“, „schwarzer Rappe“, „unverheirateter Junggeselle“, „tote Leiche“ usw. ebenfalls als Tautologien bezeichnet werden.

Eine Aussage heißt **erfüllbar**, wenn sie wahr werden kann, d. h. wenn sie keine Kontradiktion ist. Eine Aussage ist damit genau dann eine Tautologie, wenn ihre Verneinung nicht erfüllbar ist.

Beispiel 1.16 (Tautologien und Kontradiktionen)

a) Die Aussage $A \vee (\neg A)$ ist eine Tautologie. Dies ist aus der folgenden Wahrheitstafel ersichtlich:

A	w	w	f	f
$\neg A$	f	f	w	w
$A \vee (\neg A)$	w	w	w	w

Es ist zu erkennen, dass die Aussage $A \vee (\neg A)$ unabhängig vom Wahrheitswert der Elementaraussage A stets den Wahrheitswert w besitzt.

b) Die Aussage $A \wedge (\neg A)$ ist eine Kontradiktion. Dies ist aus der folgenden Wahrheitstafel ersichtlich:

A	w	w	f	f
$\neg A$	f	f	w	w
$A \wedge (\neg A)$	f	f	f	f

Es ist zu erkennen, dass die Aussage $A \wedge (\neg A)$ unabhängig vom Wahrheitswert der Elementaraussage A stets den Wahrheitswert f besitzt.

c) Die Aussage $A \Leftrightarrow (\neg(\neg A))$ ist eine Tautologie. Dies ist aus der folgenden Wahrheitstafel ersichtlich:

A	w	w	f	f
$\neg A$	f	f	w	w
$(\neg(\neg A))$	w	w	f	f
$A \Leftrightarrow \big(\neg(\neg A)\big)$	w	w	w	w

Es ist zu erkennen, dass die Aussage $A \Leftrightarrow \big(\neg(\neg A)\big)$ unabhängig vom Wahrheitswert der Elementaraussage A stets den Wahrheitswert w besitzt.

d) Die Aussage $A \wedge B \Rightarrow A$ ist eine Tautologie. Dies ist aus der folgenden Wahrheitstafel ersichtlich:

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \wedge B$	w	f	f	f
$A \wedge B \Rightarrow A$	w	w	w	w

Es ist zu erkennen, dass die Aussage $A \wedge B \Rightarrow A$ unabhängig von den Wahrheitswerten der Elementaraussagen A und B stets den Wahrheitswert w besitzt. Völlig analog erhält man, dass auch $A \Rightarrow A \vee B$ eine Tautologie ist.

e) Die Aussage $A \Leftrightarrow \neg A$ ist eine Kontradiktion. Dies ist aus der folgenden Wahrheitstafel ersichtlich:

A	w	w	f	f
$\neg A$	f	f	w	w
$A \Leftrightarrow \neg A$	f	f	f	f

Es ist zu erkennen, dass die Aussage $A \Leftrightarrow \neg A$ unabhängig vom Wahrheitswert der Elementaraussage A stets den Wahrheitswert f besitzt.

f) Die Aussage $B =$ „Der Umsatz eines Unternehmens steigt oder er steigt nicht“ ist eine Tautologie. Dies folgt aus Teil a) dieses Beispiels. Denn die Aussage B ist von der Form $A \vee (\neg A)$ mit $A =$ „Der Umsatz eines Unternehmens steigt“.

g) Die Aussage $C =$ „Eine natürliche Zahl n ist eine rationale Zahl“ ist eine Tautologie. Dies folgt aus Teil d) dieses Beispiels. Denn die Aussage C ist von der Form $A \wedge B \Rightarrow A$ mit $A =$ „Die Zahl n ist eine natürliche Zahl“ und $B =$ „Die Zahl n ist eine rationale Zahl“.

h) Die Aussage $B =$ „Die Ungleichung $xy > 1$ ist genau dann erfüllt, wenn $xy \leq 1$ gilt.“ ist eine Kontradiktion. Dies folgt aus Teil e) dieses Beispiels, denn die Aussage B ist von der Form $A \Leftrightarrow \neg A$ mit $A =$ „Die Ungleichung $xy > 1$ ist erfüllt“.

Der folgende Satz fasst die wichtigsten Tautologien zusammen. Zum Teil wurden diese Identitäten schon in den vorhergehenden Beispielen nachgewiesen. Diese Tautologien bilden eine wichtige Grundlage für die Überlegungen zur mathematischen Beweisführung in Abschnitt 1.6 und damit auch für die Beweise aller mathematischen Aussagen in diesem Lehrbuch.

Satz 1.17 (Wichtige Tautologien)

Die folgenden Aussagen sind Tautologien:

a) $A \vee \neg A$ *(Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten)*

b) $A \Leftrightarrow (\neg(\neg A))$ *(Gesetz der doppelten Verneinung)*

c) Kommutativgesetze:

$$A \wedge B \Longleftrightarrow B \wedge A$$
$$A \vee B \Longleftrightarrow B \vee A$$
$$(A \Leftrightarrow B) \Longleftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$$

d) Assoziativgesetze:

$$A \wedge (B \wedge C) \Longleftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$$
$$A \vee (B \vee C) \Longleftrightarrow (A \vee B) \vee C$$
$$(A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)) \Longleftrightarrow ((A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C)$$

e) Distributivgesetze:

$$A \wedge (B \vee C) \Longleftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$
$$A \vee (B \wedge C) \Longleftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

f) Regeln von De Morgan:

$$\neg(A \vee B) \Longleftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$
$$\neg(A \wedge B) \Longleftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

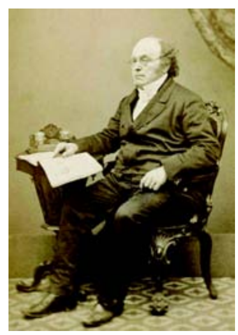
g) $(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ *(Kontraposition)*

Beweis: Zu a) und b): Siehe Beispiel 1.16a) und c).

Zu f) und g): Siehe Beispiel 1.14d) und e) bzw. Beispiel 1.14a).

c), d) und e): Können analog zu den anderen Tautologien in Beispiel 1.14 und Beispiel 1.16 mit Hilfe von Wahrheitstafeln nachgewiesen werden. ■

Die beiden Tautologien in Satz 1.17f) sind nach dem englischen Mathematiker *Augustus De Morgan* (1806–1871) benannt. Sie besagen, dass die Verneinung einer Disjunktion logisch äquivalent zur Konjunktion der beiden verneinten Teilaussagen ist. Umgekehrt ist die Verneinung einer Konjunktion logisch äquivalent zur Disjunktion der beiden verneinten Teilaussagen.



A. De Morgan

Wie sich in Abschnitt 2.3 zeigen wird, sind die Regeln von De Morgan nicht nur für die Aussagenlogik, sondern auch für die Mengenlehre bedeutsam.

Das folgende etwas komplexere Beispiel demonstriert, wie sich durch Verknüpfung von Aussagen neue – auf den ersten Blick nicht offensichtliche – Erkenntnisse ergeben:

Beispiel 1.18 (Drei Freunde im Gefängnis)

In einem Gefängnis sitzen drei befreundete Häftlinge. Der erste sieht noch mit beiden Augen, der zweite sieht nur noch mit einem Auge und der dritte ist völlig blind. Der Gefängnisdirektor erklärt den drei Freunden, dass er fünf Hüte habe, von denen drei weiß und zwei schwarz seien.

Anschließend setzt er jedem der Häftlinge einen der fünf Hüte auf, so dass die Häftlinge zwar die Farbe der Hüte der anderen beiden Häftlinge sehen können, aber nicht die Farbe des eigenen Hutes. Die beiden verbleibenden Hüte verwahrt er. Der Gefängnisdirektor verspricht nun dem normal sehenden Häftling die Freiheit, wenn er die Farbe seines Hutes nennen kann. Der normal sehende Häftling erklärt jedoch, dass er dies nicht könne. Der Gefängnisdirektor macht daher dem einäugigen Häftling dasselbe Angebot, worauf dieser jedoch antwortet, dass er auch nicht in der Lage sei, die Farbe seines Hutes zu nennen. Den blinden Häftling hingegen möchte der Gefängnisdirektor gar nicht erst fragen. Der blinde Häftling bittet jedoch darum, dieselbe Chance wie seine beiden Freunde zu erhalten. Der Gefängnisdirektor fragt daher auch den blinden Häftling nach der Farbe seines Hutes. Der blinde Häftling gibt auf diese Frage die korrekte Antwort:

> *„Was ich von meinen Freunden weiß,*
> *das lässt mich sehen ganz genau*
> *auch ohne Augen: Mein Hut ist weiß!“*

Anschließend erläutert der Blinde dem überraschten Gefängniswärter, dass sich mit Hilfe der drei Aussagen

$A =$ „Der Hut des normal sehenden Häftlings ist weiß“,

$B =$ „Der Hut des einäugigen Häftlings ist weiß“ und

$C =$ „Der Hut des blinden Häftlings ist weiß.“

die Aussagen des Gefängniswärters und seiner beiden Freunde wie folgt darstellen lassen:

Die Aussage des Gefängniswärters ist $A \vee B \vee C$. Denn es gibt nur zwei schwarze Hüte.

Die Aussage des normal sehenden Freundes ist $B \vee C$. Denn würden der einäugige Freund und der Blinde einen schwarzen Hut tragen, dann müsste aufgrund der Aussage des Gefängnisdirektors der Hut des normal sehenden Freundes weiß sein.

Die Aussage des einäugigen Freundes ist C. Denn würde der Blinde einen schwarzen Hut tragen, dann müsste aufgrund der Aussage des normal sehenden Freundes der Hut des einäugigen Freundes weiß sein.

Die Aussagen des Gefängniswärters, des normal sehenden Freundes und des einäugigen Freundes ergeben somit die zusammengesetzte Aussage

$$(A \vee B \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge C.$$

Da jedoch die Implikation

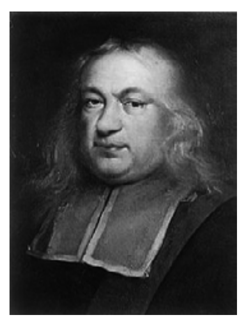
$$(A \vee B \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge C \Longrightarrow C$$

offensichtlich eine Tautologie ist, folgt für den Blinden, dass sein Hut weiß sein muss.

In Abschnitt 1.7 wird mit Hilfe der mathematischen Beweismethode der **vollständigen Induktion** ein ähnlich strukturiertes – aber komplizierteres – Problem gelöst (vgl. Beispiel 1.31).

1.4 Aussageformen und Quantoren

In der Mathematik wird man sehr oft mit Formulierungen wie z. B. „x ist eine gerade Zahl“ konfrontiert. Bei dieser einfachen Feststellung handelt es sich jedoch um keine Aussage im Sinne der Definition 1.2. Denn aufgrund des „Platzhalters“ x lässt sich nicht entscheiden, ob diese Feststellung überhaupt sinnvoll ist, und falls sie Sinn ergibt, ob sie wahr oder falsch ist. Denn je nach Belegung von x erhält man einen Ausdruck, der keinen Sinn ergibt, z. B. „$\sqrt{2}$ ist eine gerade Zahl“ ist eine wahre Aussage, z. B. „2 ist eine gerade Zahl“ oder eine falsche Aussage, z. B. „1 ist eine gerade Zahl.“



P. de Fermat

Da jedoch die Formulierung „x ist eine gerade Zahl“ sprachlich die Form einer Aussage aufweist und man in der Mathematik z. B. sehr oft mit Ausdrücken der Form

$$x^n + y^n = z^n \tag{1.8}$$

konfrontiert wird, die von einem oder mehreren Platzhaltern abhängen, ist es sinnvoll, den Begriff der Aussage um diese Möglichkeit zu erweitern.

Zum Beispiel besagt eine vom französischen Mathematiker und Juristen *Pierre de Fermat* (ca. 1608–1665) vor ungefähr 400 Jahren aufgestellte Behauptung, dass die Gleichung (1.8) mit $x, y, z \in \mathbb{N}$ für keine natürliche Zahl $n > 2$ eine Lösung besitzt. Diese Behauptung ist unter der Bezeichnung der **große Fermatsche Satz**, **Fermatsche Vermutung** oder auch **Jahrhundertproblem** sehr berühmt geworden.

Die Fermatsche Vermutung wurde erst im Jahre 1993 (publiziert 1995) – nach zahlreichen vergeblichen Versuchen bekannter und weniger bekannter Mathematiker – vom britischen Mathematiker *Andrew Wiles* (*1953) bewiesen. Aus Angst davor, von seinen Mathematik-Kollegen für seine Anstrengungen belächelt zu werden, hielt *Wiles* seine intensive und über sieben Jahre andauernde Arbeit an einem Beweis der Fermatschen Vermutung streng geheim.

A. Wiles

Für seine außergewöhnlichen mathematischen Leistungen wurde *Wiles* mit zahlreichen Wissenschaftspreisen ausgezeichnet. Darüber hinaus wurde er 2000 sogar mit einer eigenen Briefmarkenausgabe geehrt und zum Ritter geschlagen.

Briefmarke zum Beweis der Fermatschen Vermutung durch A. Wiles

Aussageformen

Wird der Begriff der Aussage um die Möglichkeit der Existenz eines Platzhalters oder auch mehrerer Platzhalter erweitert, dann spricht man anstelle von Aussage von einer **Aussageform**:

Definition 1.19 (Aussageform)

Eine Aussageform $A(x)$ oder $A(x_1, \ldots, x_n)$ ist ein Ausdruck, der einen oder mehrere Platzhalter x bzw. $x_1, \ldots, x_n$ enthält und durch Belegung der Platzhalter durch Objekte aus einem Bereich $\mathbb{D}$ in eine wahre oder falsche Aussage übergeht.

Die Platzhalter x bzw. $x_1, \ldots, x_n$ werden dann als Variablen oder Veränderliche bezeichnet und der Bereich $\mathbb{D}$ heißt Definitionsbereich (Definitionsmenge) der Aussageform. Der Teilbereich $\mathbb{L}$ von $\mathbb{D}$, für den die Aussageform in eine wahre Aussage übergeht, wird als Lösungsbereich (Lösungsmenge) der Aussageform bezeichnet.

Analog zu Aussagen werden auch Aussageformen meistens mit lateinischen Großbuchstaben aus dem vorderen Teil des Alphabets, also A, B, C usw., bezeichnet. Zur Darstellung der Variablen benutzt man dagegen Kleinbuchstaben aus dem hinteren Teil des Alphabets, bspw. x, y, z oder $x_1, \ldots, x_n$. Falls die Variablen für natürliche oder ganze Zahlen stehen, sind zur Darstellung der Variablen auch die Kleinbuchstaben k und n gebräuchlich.

Der Definitionsbereich $\mathbb{D}$ einer Aussageform $A(x)$ ist in der Regel nicht eindeutig festgelegt. Oft verwendet man jedoch den größtmöglichen Bereich, für den die Aussageform in eine Aussage übergeht. Dabei ist zu beachten, dass der Lösungsbereich $\mathbb{L}$ in der Regel vom Definitionsbereich $\mathbb{D}$ abhängt.

G. Frege

Nach Definition 1.19 hat eine Aussageform $A(x)$ keinen bestimmbaren Wahrheitswert. Dieser resultiert erst nach Einsetzen eines Objekts aus dem Definitionsbereich $\mathbb{D}$. Eine Aussageform $A(x)$ kann daher als formale Vorschrift zur Gewinnung von Aussagen aufgefasst werden. Sie beschreibt eine Eigenschaft, die dem für die Variable x einzusetzendem Objekt gleichkommt. Das heißt, x erhält ein sogenanntes **Prädikat**. Aus diesem Grund wird die Theorie der Aussageformen als **Prädikatenlogik** oder **Quantorenlogik** bezeichnet.

Die Prädikatenlogik stellt eine bedeutende Erweiterung der Aussagenlogik dar und wurde – unabhängig voneinander – von dem deutschen Mathematiker und Philosophen *Gottlob Frege* (1848–1925) und dem US-amerikanischen Mathematiker und Logiker *Charles Sanders Peirce* (1839–1914) entwickelt. Sie erlaubt es, komplexe Argumente

C. S. Peirce