

BestMasters

RESEARCH

Marvin Horst

Allgemeine Relativitätstheorie und Sternmodelle

Eine Einführung für
Lehramtsstudierende

MOREMEDIA



Springer Spektrum

BestMasters

Mit „**BestMasters**“ zeichnet Springer die besten Masterarbeiten aus, die an renommierten Hochschulen in Deutschland, Österreich und der Schweiz entstanden sind. Die mit Höchstnote ausgezeichneten Arbeiten wurden durch Gutachter zur Veröffentlichung empfohlen und behandeln aktuelle Themen aus unterschiedlichen Fachgebieten der Naturwissenschaften, Psychologie, Technik und Wirtschaftswissenschaften. Die Reihe wendet sich an Praktiker und Wissenschaftler gleichermaßen und soll insbesondere auch Nachwuchswissenschaftlern Orientierung geben.

Springer awards “**BestMasters**” to the best master’s theses which have been completed at renowned Universities in Germany, Austria, and Switzerland. The studies received highest marks and were recommended for publication by supervisors. They address current issues from various fields of research in natural sciences, psychology, technology, and economics. The series addresses practitioners as well as scientists and, in particular, offers guidance for early stage researchers.

Weitere Bände in der Reihe <https://link.springer.com/bookseries/13198>

Marvin Horst

Allgemeine Relativitätstheorie und Sternmodelle

Eine Einführung für
Lehramtsstudierende



Springer Spektrum

Marvin Horst
Oppenheim, Deutschland

ISSN 2625-3577

ISSN 2625-3615 (electronic)

BestMasters

ISBN 978-3-658-36136-5

ISBN 978-3-658-36137-2 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-658-36137-2>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Der/die Herausgeber bzw. der/die Autor(en), exklusiv lizenziert durch Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2022

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geographische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Marija Kojic

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Danksagung

Mit dieser Arbeit und dem damit verbundenen Ende meines Studiums möchte ich einige dankenden Worte aussprechen.

An erster Stelle möchte ich Herrn Prof. Scherer danken, der mit seiner Betreuung und seinem Engagement all dies erst ermöglicht hat. Wenn auch der Start aufgrund der COVID-19 Situation nicht ganz einfach verlief, schafften wir es schnell regelmäßige Videokonferenzen zu organisieren. Diese äußerst angenehmen, zielführenden und gewinnbringenden Treffen sorgten dafür, dass ich mich kontinuierlich mit den Inhalten auseinandergesetzt habe. Weiterhin wurden in diesen intensiven, gerne mal zwei Stunden dauernden, Gesprächen einige Probleme und Unklarheiten aufgedeckt. Ein besonderes Dankeschön möchte ich für die Zeit, die Herrn Prof. Scherer sich generell für mich und die Arbeit genommen hat, aussprechen. Verständlicherweise soll auch Herrn Prof. Reuter für seine Arbeit als Zweitgutachter gedankt werden.

Schließlich gebührt mein Dank auch meinen Kommilitonen und Freunden, die das Studium unvergesslich gemacht haben. Seien es die Lerneinheiten vor anstehenden Prüfungen oder der ein oder andere gemeinsame Abend. All diese Situationen haben die vergangenen fünf Jahre unbeschreiblich wertvoll gemacht. In diesem Zusammenhang möchte ich meiner Freundin Katharina danken, die in jeder noch so stressigen Situation während des Studiums an meiner Seite stand, immer zu Helfen wusste und stets einen kühlen Kopf bewahren konnte.

Zu guter Letzt danke ich meiner Mutter, meiner Oma und insbesondere meinem Opa, der unglücklicherweise die zweite Hälfte meines Studiums nicht mehr miterleben konnte. Dennoch ist und bleibt er mein Vorbild und begleitet mich in meinem Herzen auf jedem noch bevorstehenden Wege. Meine Familie war und ist auch außerhalb des Studiums in jeglicher Situation mit Rat und Tat für mich da.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
Teil I Allgemeine Relativitätstheorie		
2	Vorläufer der modernen Gravitationstheorie	7
2.1	Grundgesetze der Newton'schen Mechanik	7
2.2	Inertialsysteme und Relativitätsprinzip	9
2.3	Die erste Gravitationstheorie	10
3	Spezielle Relativitätstheorie	15
3.1	Von der Galilei- zur Lorentz-Transformation	15
3.2	Ergebnisse der SRT	22
3.3	Tensoren im Minkowski-Raum	26
4	Die ersten Schritte	31
4.1	Ziele der ART	31
4.2	Äquivalenzprinzip	34
4.3	Krümmung und Riemann'scher Raum	38
4.4	Bewegung im Gravitationsfeld und Christoffel-Symbole	47
4.5	Geodätengleichung	55
5	Mathematische Verallgemeinerungen auf gekrümmten Räumen	63
5.1	Tensoren im Riemann'schen Raum	64
5.2	Kovariante Ableitung	68
5.3	Parallelverschiebung	72
5.4	Krümmungstensor und seine Kontraktionen	74

6	Die ART und die Einstein'schen Feldgleichungen	83
6.1	Kovarianzprinzip	84
6.2	Energie-Impuls-Tensor	84
6.3	Die Einstein'schen Feldgleichungen	86
6.4	Schwarzschild-Metrik	91
 Teil II Sternmodelle		
7	Thermodynamische Grundlagen und Hydrodynamik	101
7.1	Ideales Gas und thermodynamische Zustandsgleichungen	102
7.2	Kontinuitätsgleichung und Euler-Gleichung	105
7.3	Relativistische Hydrodynamik	109
8	Der Sternalltag	113
8.1	Sternentstehung und Brennphasen	113
8.2	Endstadien der Sternentwicklung	127
9	Statische Sternmodelle	137
9.1	Sternaufbaugleichungen	138
9.2	Lane-Emden-Gleichung	144
9.3	Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung	151
9.4	Grenzmassen kompakter Objekte	161
10	Dynamische Sternmodelle	171
10.1	Zeitabhängige Metrik und Birkhoff-Theorem	171
10.2	Gravitationskollaps	174
11	Fazit und Ausblick	185
Literaturverzeichnis		191

„Mega-Supernova in Erd-Nähe drohte: Forscher lösen mysteriöses Rätsel um Beteigeuze“¹

Wer die Medien im Zeitraum Dezember 2019 bis Ende Februar 2020 verfolgt hat, wird solchen (oder so ähnlichen) Schlagzeilen sicherlich schon begegnet sein. Zugegebenermaßen wurde für die Einleitung eine etwas überspitzte Schlagzeile gewählt. Das Ende des Roten Überriesen *Beteigeuze* als Supernova wird jedoch in vielen anderen Berichten ebenfalls thematisiert. Doch worum geht es hier genau? Zunächst folgt eine kleine Übersicht über die Ausgangslage des Nachbarsterns. Zu einer ausführlichen Diskussion des Roten Überriesen werden wir im letzten Kapitel [11: Fazit und Ausblick](#) kommen.

Beteigeuze, häufig auch als α *Orionis* bezeichnet, ist ein Stern im Sternbild Orion. Der Rote Überriese wird immer wieder als „die nächste Supernova“² gehandelt. Im Fall der Fälle wäre diese Supernova, aufgrund der ungefähren Entfernung von etwa 650 Lichtjahren, die nächstgelegene je beobachtete Supernova und die erste in unserer Milchstraße seit mehr als 400 Jahren. Doch woher kommen diese Gedanken? *Beteigeuze* ordnet sich üblicherweise in die Top 10 der hellsten Sterne am Nachthimmel ein. Zwischen den Monaten Oktober 2019 und Dezember 2019 allerdings hat er so stark an Leuchtkraft verloren, dass er auf Platz 21 abgerutscht ist. Dies stellt

¹ Dieses Zitat ist der Schlagzeile aus: [\[EIN 20\]](#) entnommen.

² Die nachfolgenden Informationen können in [\[HAT 20\]](#) nachgelesen werden.

Ergänzende Information Die elektronische Version dieses Kapitels enthält Zusatzmaterial, auf das über folgenden Link zugegriffen werden kann
https://doi.org/10.1007/978-3-658-36137-2_1.

den steilsten Helligkeitsverlust seit Beginn der systematischen Beobachtungen vor etwa 50 Jahren dar. Dieser bemerkenswerte Helligkeitsverlust, in Kombination mit der relativen Nähe zur Erde, ist die Ursache der Spekulationen über Beteigeuzes Zukunft. Nun lassen sich verständlicherweise die folgenden Fragen stellen:

1. Gibt es einen Grund zur Besorgnis?
2. Wie lässt sich der Helligkeitsverlust (physikalisch) erklären? Hierfür müssen wir deshalb folgende weitere Fragen stellen:
3. Wie entsteht ein Stern und wie entwickelt sich dieser?
4. Wie sieht das Ende eines Sterns aus? Wie können wir einen Gravitationskollaps und eine Supernova beschreiben?
5. Endet Beteigeuze eventuell sogar als Schwarzes Loch?

Diese Fragestellungen sollen im Rahmen dieser Masterarbeit zufriedenstellend beantwortet werden. Ohne viel vorwegzunehmen, wollen wir kurz erwähnen, dass die Existenz Schwarzer Löcher durch Lösung der sogenannten *Einstein'schen Feldgleichungen* postuliert wird. Notwendiges Unterfangen zur Beantwortung der Fragestellungen wird also die Beschäftigung mit Einsteins *allgemeiner Relativitätstheorie* sein. Diese stellt eine relativistische Verallgemeinerung der Newton'schen Gravitationstheorie dar. Das Lehramtsstudium an der Universität Mainz beinhaltet keine gesonderte Veranstaltung zur allgemeinen Relativitätstheorie. Allerhöchstens findet im Rahmen der Veranstaltung *Gebietsübergreifende Konzepte und Anwendungen* ein kurzer Exkurs in Einsteins Meisterwerk statt. Dieses Glück hatte ich in meinem Studium allerdings nicht. Umso glücklicher konnte ich mich schätzen, dass Prof. Dr. Stefan Scherer seit einiger Zeit Lehramtsstudierenden die Beschäftigung mit der allgemeinen Relativitätstheorie im Rahmen von Abschlussarbeiten ermöglicht. An dieser Stelle würde ich gerne ein Zitat von Max Born zur Arbeit Einsteins anbringen.

„(Die allgemeine Relativitätstheorie) erschien und erscheint mir auch noch heute als die grösste Leistung menschlichen Denkens über die Natur, die erstaunliche Vereinigung von philosophischer Tiefe, physikalischer Intuition und mathematischer Kunst. Ich bewundere sie wie ein Kunstwerk.“³

Ziel dieser Arbeit ist es, für interessierte Lehramtsstudierende oder bereits Lehrende die Arbeit Einsteins zur Gravitationstheorie auf entsprechendem Niveau kompakt darzustellen. Weiterhin liefert die Arbeit mit dem zweiten Teil zu Sternmodellen

³ Dieses Zitat verwendet bereits Straumann in seiner Einleitung des zweiten Kapitels [STR 81, S. 81].

einen Einblick in eines der aktuellsten Forschungsgebiete der Physik: *die (relativistische) Astrophysik*.

Der erste Teil dieser Arbeit stellt die allgemeine Relativitätstheorie in den Vordergrund. Hierzu wird zunächst der Weg von *Newtons Gravitationstheorie* über die *spezielle Relativitätstheorie* (SRT) zur *allgemeinen Relativitätstheorie* (ART)⁴ skizziert. Die wichtigsten physikalischen Inhalte der Newton'schen Mechanik und Einsteins spezieller Relativitätstheorie werden noch einmal kompakt wiederholt. An anderen Stellen wird auf weiterführende Literatur verwiesen. Nach Wiederholung der Grundlagen soll der Weg von der SRT zur ART kleinschrittig nachvollzogen werden. Auf eine ausführliche Diskussion der ART im Rahmen der Differentialgeometrie wird verzichtet, allerdings wird die Mathematik gekrümmter Räume⁵ in einem eigenen Kapitel näher beleuchtet. Der Schwerpunkt soll somit auf der Physik und nicht der Mathematik hinter der ART liegen. Allerdings soll diese auch nicht nur phänomenologisch⁶ behandelt werden. Dazu wird der *Riemann'sche Raum* eingeführt und der Begriff der partiellen Ableitung durch die *kovariante Ableitung* verallgemeinert. Der in der kovarianten Ableitung auftretende Zusatzterm wird geometrisch als *Parallelverschiebung* interpretiert. Die Diskussion des *Krümmungstensors* und des *Energie-Impuls-Tensors* liefert die Grundlage zum Aufstellen der Einstein'schen Feldgleichungen. Diese stellen den Höhepunkt des ersten Teils der Arbeit dar. In einer abschließenden Betrachtung werden wir ebendiese für ein kugelsymmetrisches, statisches Problem lösen und erhalten die Schwarzschild-Metrik, welche die Existenz ungeladener und nicht-rotierender Schwarzer Löcher liefert. Die Darstellung der Inhalte dieses Teils folgt im Wesentlichen den Arbeiten von Fließbach [FLI 16], Göbel [GOE 14] und Rebhan [REB 12]. Noch zu erwähnen sind die Standardwerke von Weinberg [WEI 72], Misner u. a. [MIS 73]⁷ und Ryder [RYD 09].

Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit physikalischen Sternmodellen. Zunächst wird kompakt das Sternleben von der Entstehung über die einzelnen

⁴ Im Folgenden werden die Abkürzungen ART und SRT stellvertretend für die jeweilige Relativitätstheorie verwendet.

⁵ Mit einer ausführlichen Diskussion der Mathematik der gekrümmten Raumzeit beschäftigt sich Oloff in [OLO 04]. Eine ausführliche Betrachtung differentialgeometrischer Aspekte findet sich in [STR 81].

⁶ Für eine Darstellung der wesentlichen Inhalte ohne komplizierte Mathematik sei auf [BEY 09] oder [FIS 16] verwiesen.

⁷ Professor Alberto Vecchio der Universität Birmingham äußert sich zu dem Werk folgendermaßen: „This book is considered the Bible for everyone in the field of gravitation.“ Daher darf dieses Werk auch in dieser Abschlussarbeit nicht fehlen. Das Zitat findet sich in den Reviews zu diesem Werk der Princeton University Press [REV 20].

Evolutionsstufen bis zum Ableben skizziert. In diesem Zusammenhang lernen wir den schon bereits erwähnten Roten Überriesen Beteigeuze näher kennen. Danach folgt eine Wiederholung der Grundgleichungen der Hydrodynamik und der thermodynamischen Zustandsgleichungen. Der nächste Schritt stellt die Beschreibung der statischen und dynamischen Sternmodelle dar, hierbei betrachten wir neben den allgemein-relativistischen Neutronensternen und Schwarzen Löchern auch die nicht-relativistischen Weißen Zwerge. Eine Behandlung der Zustandsgleichungen solcher fordert eine grundlegende Kenntnis der Quantenmechanik. Konkret wird die innere Schwarzschild-Metrik für einen sphärischen, statischen Stern gelöst. Weiterhin wird das Sterngleichgewicht für die kompakten Objekte *Weißer Zwerg und Neutronenstern* aufgestellt und diskutiert. Höhepunkt dieses Kapitels werden die Grenzmassen für Weiße Zwerge und Neutronensterne, sowie die *Oppenheimer-Volkoff-Gleichung* sein. Diese beschreibt das relativistische Gleichgewicht zwischen Druck und Gravitation. Im dynamischen Fall wird die Metrik zeitabhängig und liefert das *Birkhoff-Theorem*, welches besagt, dass das Gravitationsfeld außerhalb einer sphärisch, symmetrischen Massenverteilung statisch ist und durch die Schwarzschildmetrik beschrieben wird. Die Beschäftigung mit dynamischen Sternmodellen erreicht ihr großes Finale in der Untersuchung des Gravitationskollaps.

Am Ende jedes Kapitels findet sich eine Zusammenfassung der wesentlichen Inhalte. Dabei geht es primär um physikalische Zusammenhänge. Auf Gleichungen oder Formeln wird daher nur referenziert. Im Anhang im elektronischen Zusatzmaterial werden Rechnungen zu finden sein, deren Länge den Lesefluss stören wird. An geeigneter Stelle wird dann auf diese Rechnungen im Anhang referenziert.

Teil I

Allgemeine Relativitätstheorie



Vorläufer der modernen Gravitationstheorie 2

Bei der allgemeinen Relativitätstheorie Albert Einsteins (1879–1955) aus dem Jahre 1915 handelt es sich um eine relativistische Verallgemeinerung der Newton'schen Gravitationstheorie von 1687. Die Newton'sche Gravitationstheorie war ein essentieller Schritt zur Vereinheitlichung der Physik. Sie fasst Keplers Beobachtungen mit Newtons Grundgesetzen (Axiomen) zu einer einheitlichen Theorie der Gravitation zusammen. Zunächst wiederholen wir Newtons Grundgesetze und diskutieren den Begriff des *Inertialsystems*. In diesem Kontext wiederholen wir das Galilei'sche *Relativitätsprinzip*. Abschließend leiten wir aus dem Gravitationsgesetz die Feldgleichung in Newtons Theorie ab und vergleichen die mathematische Struktur mit der Elektrostatik. Die Darstellung der Inhalte folgt den Werken von Fließbach zur Mechanik [FLI 15] und zur ART [FLI 16].

2.1 Grundgesetze der Newton'schen Mechanik

Im Jahr 1687 veröffentlichte Sir Isaac Newton (1643–1727) sein Werk „Philosophiae naturalis principia mathematica“. In diesem Hauptwerk der Newton'schen Mechanik formuliert er seine drei Axiome, mit denen eine Beschreibung der Bewegung eines Körpers ermöglicht wird. Die Bewegung eines Körpers kann stets nur als Bewegung relativ zu etwas anderem beschrieben werden. Dazu wird zunächst ein *Bezugssystem* (BS) definiert. In einem solchen Bezugssystem lassen sich geeignete Koordinaten definieren, aus dem Bezugssystem wird ein *Koordinatensystem* (KS).

Die Bahnkurve einer Punktmasse mit Masse m zur Zeit t beschreiben wir durch $\vec{r}(t) = (x^i(t)) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$. Dabei bezeichnen die $x^i(t)$ die drei zeitabhängigen Ortskoordinaten. Das erste Newton'sche Axiom¹ lässt sich wie folgt formulieren:

1. Axiom: Es gibt Bezugssysteme, in denen Körper, auf die keine Kräfte wirken, im Zustand der Ruhe verharren oder sich gleichförmig geradlinig bewegen. Sie lassen sich also in diesem Fall durch $\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \text{const.}$ beschreiben.

Diese hier genannten Bezugssysteme werden wir im Folgenden *Inertialsysteme*² (IS) nennen. Eine ausführliche Diskussion dieser folgt im nächsten Abschnitt. Wir sehen also, dass Teilchen ohne Krafteinwirkung eine gleichförmige Bewegung vollführen. Ein Krafteinfluss führt somit zu einer nicht-gleichförmigen Bewegung. Dies wird durch das zweite Axiom von Newton beschrieben:

$$\mathbf{2. \text{ Axiom: } } \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \text{im IS.} \quad (2.1)$$

Aus dem Zusammenhang zwischen *Impuls* $\vec{p}$ und *Geschwindigkeit* $\vec{v}$,

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}, \quad (2.2)$$

lässt sich dieses Axiom wie folgt umschreiben:³

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}. \quad (2.3)$$

Das letzte Axiom Newtons sagt in anderen Worten, dass Kräfte immer nur paarweise auftreten können. Es wird auch *Wechselwirkungsgesetz* genannt.

¹ In der Literatur häufiger als Trägheitsgesetz bekannt.

² Der Begriff Inertialsystem geht auf den deutschen Physiker Ludwig Lange (1863–1936) zurück.

³ Gl. (2.1) beschreibt die allgemeinste Form, denn hier kann auch die Masse zeitlich veränderlich sein. Gl. (2.3) wird dennoch angeführt, da diese Form in den später diskutierten Bewegungsgleichungen wieder auftreten wird.

3. Axiom: Die Kraft $\vec{F}_{12}$, die ein Massenpunkt 1 auf einen Massenpunkt 2 ausübt, ist betragsmäßig gleich der Kraft $\vec{F}_{21}$, die der Massenpunkt 2 auf den Massenpunkt 1 ausübt. Die Richtung der Kraftwirkung ist entgegengesetzt:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (2.4)$$

Bei den bisherigen Formulierungen wurden nur einzelne Massenpunkte betrachtet. Für eine Diskussion eines Sterns in den späteren Kapiteln ist es wichtig, alle Gasatome zu berücksichtigen. Um die Einflüsse aller Quellen auf ein Teilchen zu bestimmen, führen wir das *Superpositionsprinzip*⁴ ein. Dieses besagt, dass sich die unterschiedlichen Kräfte $\vec{F}_i$ linear zu einer Gesamtkraft addieren $\vec{F}$. Somit gilt:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i. \quad (2.5)$$

2.2 Inertialsysteme und Relativitätsprinzip

Die zuvor betrachteten Bezugssysteme wurden bereits als Inertialsysteme eingeführt. Man stellt fest, dass die IS solche Bezugssysteme sind, die gegenüber dem Fixsternhimmel ruhen oder sich relativ zu diesem mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Der Begriff Fixsternhimmel ist für diese Betrachtungen angemessen, denn die Eigenbewegung der Sterne ist aufgrund ihrer großen Entfernung selbst nach einigen Jahrhunderten mit bloßen Augen kaum zu beobachten.⁵ Inertialsysteme haben eine hervorgehobene Rolle, denn die Newton'schen Axiome sowie die Maxwell-Gleichungen⁶ gelten nur in solchen Bezugssystemen. Generell lassen sich Gesetze auch in anderen Bezugssystemen formulieren, allerdings haben die Naturgesetze in diesen eine andere, im Allgemeinen kompliziertere Form. Solche Bezugssysteme sind zum Beispiel beschleunigte Bezugssysteme, hier treten z. B. die Coriolis-Kraft⁷ oder Zentrifugalkräfte auf.

⁴ Der Begriff *Prinzip* impliziert, dass es sich dabei um eine Erfahrungstatsache handelt, die keineswegs trivial ist.

⁵ Siehe dazu [KEL 05] und den Begriff *Eigenbewegung*.

⁶ Benannt nach dem schottischen Physiker James Clerk Maxwell (1831–1879). Eine nähere Diskussion der Maxwell-Gleichungen in diesem Kontext folgt bereits im nächsten Kapitel.

⁷ Benannt nach dem französischen Physiker Gaspard Gustave de Coriolis (1792–1843).

Für Inertialsysteme gilt das *Relativitätsprinzip von Galilei*.⁸

Alle IS sind *gleichwertig*. In anderen Worten: Naturgesetze haben in allen Inertialsystemen die gleiche Form.

Die Naturgesetze sind somit *forminvariant* oder auch *kovariant* unter Transformationen von einem IS zu einen anderen IS'. Die Diskussion solcher Transformationen folgt im nächsten Kapitel in aller Ausführlichkeit.

2.3 Die erste Gravitationstheorie

Die Bewegung von N Massenpunkten aufgrund gravitativer Einflüsse wird in Newtons Gravitationstheorie durch

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = -G \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_i \cdot m_j \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \quad (\text{Gravitationsgesetz}) \quad (2.6)$$

beschrieben. Hier ist G die Gravitationskonstante. Ihr Wert wurde historisch experimentell bestimmt und hat heute⁹ einen Wert von

$$G = (6,67430 \pm 0,00015) \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}.$$

Diese Gleichung ist die Grundgleichung der Newton'schen Gravitationstheorie. Bei dem Gravitationsfeld handelt es sich um ein *konservatives Kraftfeld*, weshalb sich ein skalares *Gravitationspotential* $\Phi(\vec{r})$ bestimmen lässt. Ziel wird es sein, ausgehend von diesem eine Feldgleichung der Newton'schen Graviationstheorie abzuleiten.

⁸ Benannt nach dem italienischen Universalgelehrten Galileo Galilei (1564–1642).

⁹ Der aktuelle Wert ist den *2018 CODATA recommended Values* entnommen. Siehe [COD 18].

$$\Phi(\vec{r}) = -G \sum_j \frac{m_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \rightarrow -G \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (\text{Gravitationspotential}). \quad (2.7)$$

Im zweiten Schritt geht ein, dass anstelle über einzelne Massen m_j über infinitesimale Beiträge $dm = \rho(\vec{r}') d^3r'$ der Massendichte ρ summiert wurde. Betrachten wir nun die Bahnkurve des Massestücks $m_i =: m$ und setzen diese zu $\vec{r}(t) = \vec{r}_i(t)$, so erhalten wir unter Verwendung von Gl. (2.6) und Gl. (2.7) die *Bewegungsgleichung in Newtons Theorie*¹⁰ zu:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -m \vec{\nabla} \Phi(\vec{r}) \quad (\text{Bewegungsgleichung}). \quad (2.8)$$

Unter Anwendung des *Laplace-Operators* $\Delta = \vec{\nabla}^2$ auf das skalare Gravitationspotential aus Gl. (2.7) lässt sich die Feldgleichung ableiten:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi(\vec{r}) &= \Delta \left[-G \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \right] \\ &= -G \int \rho(\vec{r}') \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \\ &= -G \int \rho(\vec{r}') (-4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')) d^3r' \\ &= 4\pi G \rho(\vec{r}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Hierbei geht der folgende Zusammenhang¹¹ nach dem zweiten Schritt ein:

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (2.10)$$

¹⁰ Streng genommen müssten die Massen links und rechts der Gleichung mit Indizes versehen werden. Es handelt sich bei den Massen um träge und schwere Masse. Eine Diskussion in Abschnitt 4.2: *Äquivalenzprinzip* rechtfertigt das Weglassen. In den folgenden Betrachtungen werden beide Massen als äquivalent betrachtet.

¹¹ Ein Beweis dieses Zusammenhangs kann in [SCHE 10, S. 168f.] nachgelesen werden.

Damit erhalten wir die Feldgleichung für $\Phi(\vec{r})$, diese ist eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die Quelle des Feldes tritt als Materiedichte $\rho(\vec{r})$ in Erscheinung:

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = 4\pi G\rho(\vec{r}) \quad (\text{Feldgleichung in Newtons Theorie}). \quad (2.11)$$

Die Grundgleichungen der Newtonschen Gravitationstheorie Gl. (2.8) und Gl. (2.11) weisen dieselbe Struktur wie die Feldgleichungen der Elektrostatik auf. Die Verallgemeinerung dieser Gleichungen auf den relativistischen Fall, also der Übergang zur ART, kann aufgrund dieser sehr ähnlichen mathematischen Struktur mit dem Übergang von der Elektrostatik zur Elektrodynamik verglichen werden. Aus diesem Grund folgt zum Abschluss dieses Kapitels ein Vergleich der Gravitationstheorie und der Elektrostatik.

Tabelle 2.1 Analogien zwischen Gravitation und Elektrostatik

	Gravitation	Elektrostatik
Bewegungsgleichung	$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$	$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -q\vec{\nabla}\Phi_e(\vec{r})$
Feldgleichung	$\Delta\Phi(\vec{r}) = 4\pi G\rho(\vec{r})$	$\Delta\Phi_e(\vec{r}) = -4\pi\rho_e(\vec{r})$

In Tabelle 2.1 stehen ρ_e für die elektrische Ladungsdichte und Φ_e für das elektrische Potential.¹² Die Vorzeichen der beiden Feldgleichungen unterscheiden sich, da die Gravitationskraft stets anziehend wirkt und die elektrische Kraft sowohl anziehend, als auch abstoßend wirken kann. Als Kopplungskonstante der elektrischen Wechselwirkung tritt auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung die elektrische Ladung q auf. Diese ist von der linken Seite, also der Masse m unabhängig. Weiterhin sind Masse und Ladung unabhängige, intrinsische Eigenschaften eines Körpers. Analog zu dieser Betrachtung ist es denkbar, dass die an die Gravitation gekoppelte *schwere Masse* (m auf der rechten Seite von (2.8)) sich von der *trägen Masse* (m auf der linken Seite ebendieser Gleichung) unterscheidet. Experimentell stellt man allerdings fest, dass mit hoher Präzision beide Massen zueinander äquivalent sind. Diese Äquivalenz ist für die Entwicklung der ART ein grundlegender Ausgangspunkt. Eine nähere Diskussion folgt in Abschnitt 4.2: *Äquivalenzprinzip*. Die Gleichungen Newtons erweisen sich für viele Zwecke als ausreichend, allerdings wird auch schnell klar, dass diese nur einen eingeschränkten Gültigkeitsbereich

¹² Die Angaben der Elektrostatik der obigen Tabelle sind [FLI 12, Kapitel 6] entnommen.

haben. Sie sind *nicht-relativistisch*. Eine allgemeingültige Theorie der Gravitation wird die ART liefern.

Zusammenfassung: Vorläufer der modernen Gravitationstheorie

- Der Grundstein der ART wurde bereits 1687 durch Newtons Gravitationstheorie gelegt. Dieser Vorläufer der modernen Gravitationstheorie war ein wichtiger Schritt zur Vereinheitlichung der Physik.
- Die Bewegung eines Körper wird stets relativ zu etwas anderem beschrieben. Dies fordert die Einführung gewisser Bezugssysteme (BS).
- Die Bewegung wird durch die Newton'schen Axiome beschrieben. Diese besitzen nur in bestimmten BS, den Inertialsystemen (IS), ihre Gültigkeit. Diese sind die BS, die gegenüber dem Fixsternhimmel ruhen oder sich mit $\vec{v} = \text{const.}$ bewegen.
- In den IS gilt das Relativitätsprinzip von Galilei. Dieses besagt, dass alle IS gleichwertig sind, d. h. die Naturgesetze (der Mechanik) besitzen in IS dieselbe Form. Damit sind Naturgesetze unter Galilei-Transformationen von einem IS zu einem IS' forminvariant.
- Das Gravitationsfeld ist ein konservatives Kraftfeld, d. h. längs eines geschlossenen Weges wird keine Arbeit verrichtet. Damit existiert ein skalares Gravitationspotential Gl. (2.7).
- Aus dem Potential lässt sich die Feldgleichung bzw. die Poisson-Gleichung der Gravitation (2.11) ableiten. Der Vergleich zur Feldgleichung der Elektrostatik zeigt dieselbe mathematische Form der Feldgleichungen.
- Die linke Seite der Bewegungsgleichung (2.8) ist proportional zur trägen Masse, die rechte Seite zur schweren Masse. Diese Massen stellen prinzipiell unterschiedliche Konzepte dar, experimentell wurden diese allerdings als äquivalent bestimmt. Dies wird später als schwaches Äquivalenzprinzip formuliert.