COLECCIÓN DE MATEMÁTICA APLICADA E INFORMÁTICA
BAJO LA DIRECCIÓN DE F. MICHAVILA.

FUNDAMENTOS DEL CÁLCULO NUMÉRICO 1: TOPOLOGÍA MÉTRICA

F. MICHAVILA

EDITORIAL REVERTÉ

Fundamentos del cálculo numérico I: topología métrica

FRANCISCO MICHAVILA

Catedrático de Cálculo Numérico e Informática
Universidad Politécnica de Madrid

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

Edición en papel:
ISBN 978-84-291-2659-4

Edición e-book (PDF):
ISBN 978-84-291-9449-4

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15, Local B
08029 Barcelona
Tel: (34) 93 419 33 36
E-mail: reverte@reverte.com
Internet: http://www.reverte.com

1014

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Este volúmen, primer tomo de la obra "Fundamentos del Cálculo Numérico", continúa la colección de monografías que, publicadas bajo la dirección de nuestro Departamento, pretenden ofrecer una panorámica lo más completa posible del Análisis Numérico y la Informática.

El libro recoge los principales conocimientos que sobre espacios métricos y espacios vectoriales normados es necesario poseer para estar en condiciones de seguir un posterior curso de Análisis Funcional elemental. En este sentido, este primer tomo finaliza con el estudio de los espacios de Hilbert, dejando para su desarrollo en el segundo tomo de esta obra el marco funcional en el que se plantearán numerosos problemas del Análisis Numérico.

El plan, esencialmente didáctico, de los distintos capítulos que siguen, está trazado con vistas a dar una base sencilla pero suficientemente rigurosa para estudios posteriores de Análisis Numérico. Por tanto, no se pretende desarrollar una introducción general a la topología completa y acabada, sino por el contrario, introducir al lector en aquellos conceptos, propiedades, teoremas, corolarios, etc., cuya utilidad posterior es más inmediata.

El contenido de este tomo es el propio de las enseñanzas que sobre topología métrica se imparten en una Escuela de Ingeniería, completado con numerosos ejemplos, consecuencias, notas y ejercicios. Para su elaboración he contado con la inestimable colaboración del Profesor Javier Elorza, a cuya dedicación y discusión del borrador inicial se deben gran parte de las mejoras introducidas en el texto. El trabajo en equipo de los dos constituye una de las mayores satisfacciones que me ha proporcionado la redacción de este texto.

Asímismo, quiero destacar la colaboración de los profesores Carlos Conde, Luis Ferragut y Santiago de Vicente por su ayuda en la preparación de este libro.

Antes de comenzar la lectura, unas indicaciones al modo de manejar este libro. El símbolo ■ indica el final de un concepto, propiedad, teorema, etc., constituyendo el texto comprendido entre dos símbolos una unidad elemental de conocimiento. Las propiedades, teoremas, corolarios, proposiciones y expresiones se designan, para su referencia, mediante tres números de los cuales los dos primeros indican el apartado en que se encuentran y el tercero el orden en que aparecen en el apartado.

Asímismo, se han subrayado aquellas letras que, refiriéndose a elementos matemáticos, por su posición dentro del texto pudieran confundirse con elementos gramaticales.

Al final de cada capítulo se incluye un esquema del mismo y unas notas bibliográficas, muy sucintas, en las que se hace referencia mediante números entre corchetes a libros que forman parte de la lista bibliográfica que cierra el volúmen.

Mi gratitud a Marisol y Tate, quienes han sacado el máximo partido de presentación en la mecanografía del texto.

Francisco Michavila Pitarch.

CAPÍTULO 1.

Distancia. Concepto de espacio métrico

1.1. Noción de distancia. Definición de espacio métrico

Sea E un conjunto cualquiera

DEFINICION

Se denomina DISTANCIA d, definida sobre E a toda aplicación de $E \times E \to \mathbb{R}_+$, tal que a la pareja de elementos $x, y \in E$ le asocia el número real no negativo $d(x,y)$, que verifique las condiciones siguientes

a) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ *(axioma de la separación)* (1.1.1.)

b) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in E$ *(axioma de la simetría)* (1.1.2.)

c) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in E$ *(desigualdad triangular)* (1.1.3.)

EJEMPLOS:

1º Si $E = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ es una distancia.

2º Si $E = \mathbb{R}^2$, siendo (x_1, x_2) las coordenadas del punto x, la aplicación siguiente es una distancia:

$$d(x,y)=|x_1-y_1| + |x_2-y_2|$$

3º Si $E=\mathbb{R}^2$, otra distancia es:

$$d(x,y) = \left[(x_1-y_1)^2+ (x_2-y_2)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

4º Si $E=\mathbb{R}^2$, otra distancia será:

$$d(x,y) = \operatorname{Sup}\left\{ |x_1-y_1| \ , \ |x_2-y_2|\right\}$$

5º Si E es un conjunto cualquiera:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

6º Si $E=\mathbb{C}$, la aplicación d así definida,

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{k} \qquad \text{si } \arg x = \arg y$$

$$d(x,y) = \frac{1}{k}\left(|x|+|y|\right) \quad \text{si } \arg x \neq \arg y$$

es una distancia, siendo k un escalar estrictamente positivo.

En efecto, cumple el axioma de la separación:

. Si $x = y$, $d(x,y) =\frac{1}{k}\ |x-y| = 0$

. Si $d(x,y)=0$, $\frac{1}{k}\ |x-y|=0 \Rightarrow x = y$

$\frac{1}{k}\ (|x|+|y|)=0 \Rightarrow x = y = 0$;

cumple el axioma de la simetría:

. Si arg x = arg y

$$d(x,y) = \frac{1}{k} \,|x-y| = \frac{1}{k} \,|-(y-x)| = \frac{1}{k} \,|y-x| = d(y,x)$$

. Si arg x $\neq$ arg y

$$d(x,y) = \frac{1}{k} (|x|+|y|) = \frac{1}{k} (|y|+|x|) = d(y,x) \quad ;$$

y cumple la desigualdad triangular, para ello hay que distinguir los siguientes casos:

. Si arg x = arg y = arg z :

$$d(x,y) = \frac{1}{k} \,|x-y| = \frac{1}{k} \,|x-z+z-y| \leqslant \frac{1}{k}|x-z| + \frac{1}{k} \,|z-y| =$$

$$= d(x,z) + d(z,y)$$

. Si arg x = arg y $\neq$ arg z:

$$d(x,y) = \frac{1}{k} \,|x-y| \leqslant \frac{1}{k} (|x|+|z|) + \frac{1}{k} (|z|+|y|) =$$

$$= d(x,z) + d(z,y)$$

. Si arg x $\neq$ arg y $\neq$ arg z:

$$d(x,y) = \frac{1}{k} (|x|+|y|) \leqslant \frac{1}{k} (|x|+|z|) + \frac{1}{k} (|z|+|y|) =$$

$$= d(x,z) + d(z,y).$$

7º Si E = $\mathbb{R}^2$ la aplicación:

$$d(x,y) = \operatorname{Inf} \left[k, d'(x,y) \right] \qquad k>0 \text{ cte } \forall x,y \in E.$$

representando d' la distancia del ejemplo 3º, define otra distancia a su vez sobre $\mathbb{R}^2$. En efecto, cumple el axioma de la separación:

. Si $x=y$, $d(x,y) = \text{Inf}[k,0] = 0$

. Si $d(x,y)=0, \text{Inf}\,[k,d'(x,y)] = 0 \Longrightarrow d'(x,y) = 0 \Longrightarrow x=y$

cumple el axioma de la simetría:

$$d(x,y) = \text{Inf}\,[k,d'(x,y)] = \text{Inf}[k,d'(y,x)] = d(y,x) \qquad \forall x,y \in E$$

y cumple la desigualdad triangular, pues

. Si $d(x,z) = k$ y $d(z,y) = k$, tenemos

$$d(x,z) + d(z,y) = k+k = 2k > k \geq d(x,y)$$

. Si $d(x,z) = k$ y $d(z,y) < k$, tenemos

$$d(x,z) + d(z,y) = k+d(z,y) \geq k \geq d(x,y)$$

. Si $d(x,z) < k$ y $d(z,y) < k$, tenemos en este caso que

$$d(x,z) = d'(x,z)$$

$$d(z,y) = d'(z,y)$$

por tanto:

$$d(x,y) \leq d'(x,y) \leq d'(x,z) + d'(z,y) = d(x,z) + d(z,y)$$

NOTA:

Como puede comprobarse en los ejemplos anteriores sobre un mismo conjunto hay una enorme posibilidad de definiciones, desde simples a artificiosas, de distancias. En particular sobre el conjunto $\mathbb{R}^m$, una familia de infinitas distancias posibles será:

$$\{d_n\} : \quad d_n(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|^n \right)^{1/n} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \blacksquare$$

PROPIEDAD 1.1.1.

Para toda distancia d definida sobre E, se verifica:

$$|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y) \qquad \forall x,y \in E \qquad (1.1.4.)$$

DEMOSTRACION:

Por ser d una distancia definida sobre E cumplirá (1.1.3.), así como (1.1.2.), luego:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) = d(x,y) + d(z,y)$$

por tanto:

$$d(x,z) - d(z,y) \leq d(x,y) \qquad (1.1.5.)$$

De igual forma:

$$d(z,y) \leq d(z,x) + d(x,y) = d(x,z) + d(x,y)$$

de donde:

$$-d(x,y) \leq d(x,z) - d(z,y) \qquad (1.1.6.)$$

Agrupando (1.1.5.) y (1.1.6.):

$$-d(x,y) \leq d(x,z) - d(z,y) \leq d(x,y)$$

es decir:

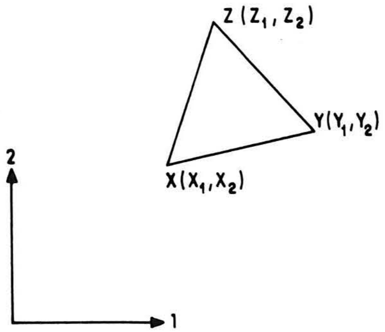
$$|d(x,z) - d(z,y)| \leq |d(x,y)|$$

y como d(x,y) es un número real no negativo:

$|d(x,z) - d(z,y)| \leqslant d(x,y)$ c.q.d.

NOTA:

Este resultado generaliza la ya sabida propiedad que tienen los triangulos, en los cuales la longitud de uno cualquiera de sus lados es mayor que el valor absoluto de la diferencia de las longitudes de los otros dos lados.- En efecto, considerando un triangulo cualquiera de vértices x,y,z y tomando por d(x,y) -recordar el ejemplo 2 de distancia- la longitud del lado (x,y), se sabe que por ser la línea recta el camino más corto entre dos puntos:



$$d(x,y) + d(x,z) \geqslant d(y,z)$$

partiendo de esta desigualdad y utilizando el método seguido en la demostración de la anterior propiedad se llega a :

$$d(x,y) \geqslant |d(x,z) - d(z,y)|$$

■

DEFINICION

A un conjunto E dotado de una distancia d se le denomina ESPACIO METRICO y se le representa por (E,d).

EJEMPLOS:

1º Sea $E = \mathbb{R}$, $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que:

$d(x,y) = |x-y|$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$. Esta aplicación recibe el nombre de distancia fundamental y se la representará por d_f, en todo cuanto sigue. Al espacio métrico $(\mathbb{R},d_f)$

le denominaremos de ahora en adelante RECTA REAL.

2º Sea $E=\mathbb{R}^2$. Como se ha visto en los ejemplos 2,3 y 4 de distancia, hay diversas aplicaciones definiendo distancias; - para distinguirlas se utilizan, con caracter universal, los si-- guientes subíndices:

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{2} |x_i-y_i| \quad \text{(distancia del ejemplo 2º)}$$

$$d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{2} (x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(distancia del ejemplo 3º, denominada natural o euclidea)}$$

$$d_\infty(x,y) = \operatorname{Sup}_{i=1,2} |x_i-y_i| \quad \text{(distancia del ejemplo 4º)}$$

Así $(\mathbb{R}^2,d_1)$, $(\mathbb{R}^2,d_2)$ y $(\mathbb{R}^2,d_\infty)$ constituyen tres ejemplos de espacios métricos.

3º Sea $E=\mathbb{R}^n$. Cada $x\in\mathbb{R}^n$ vendrá definido por n coordenadas $(x_1,x_2,\ldots, x_n)$. Podemos extender los casos de espacios mé-- tricos del ejemplo anterior a este caso:

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i|$$

$$d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d_\infty(x,y) = \operatorname{Sup}_{i=1,\ldots,n} |x_i-y_i|$$

siendo $(\mathbb{R}^n,d_1)$, $(\mathbb{R}^n,d_2)$ y $(\mathbb{R}^n,d_\infty)$ otros tres ejemplos de espacios métricos.

4º Si en E, conjunto cualquiera se define la distancia del ejemplo 5º de distancia, denominada trivial, d_t,(E,d_t) es el e.m. denominado discreto.

NOTAS:

1ª. En adelante utilizaremos la abreviatura e.m. para designar a un espacio métrico.

2ª. A los elementos de un espacio métrico les denominaremos puntos.

DEFINICION

Dados n espacios métricos (E_1,d^1), (E_2,d^2), ..., (E_n,d^n) se denomina ESPACIO METRICO PRODUCTO (E,d) a aquél constituido por el conjunto producto $E=E_1 x E_2 x \ldots x E_n$ y la distancia d definida en función de d^i, $i=1,2,\ldots,n$ mediante una de estas tres expresiones:

a) $\sum_{i=1}^{n} d^i(x_i,y_i)$, b) $\left(\sum_{i=1}^{n} d^{i^m}(x_i,y_i)\right)^{\frac{1}{m}}$, c) $\sup_{i=1,\ldots,n} d^i(x_i,y_i)$

siendo x_i la coordenada de $x \in E$ en el e.m. E_i

EJEMPLOS:

Los ejemplos 2º y 3º de e.m. pueden ser considerados como e.m. producto obtenidos a partir de $(\mathbb{R}, d_f)$. $\blacksquare$

DEFINICION

Se denomina SEMIDISTANCIA e definida sobre E a toda aplicación de $E x E \mapsto \mathbb{R}_+$, tal que a la pareja de elementos $x,y \in E$ le asocia el número real no negativo $e(x,y)$ que verifique las condiciones siguientes:

a) $x=y \Longrightarrow e(x,y) = 0 \qquad x,y \in E$

b) $e(x,y) = e(y,x) \qquad \forall x,y \in E$ *(axioma de la simetría)*

c) $e(x,y) \leq e(x,z)+e(z,y) \qquad \forall x,y,z \in E$ *(desigualdad triangular)*

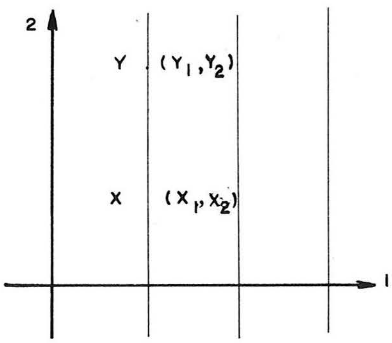
EJEMPLO:

Sea $E=\mathbb{R}^2$, con $x\in\mathbb{R}^2$ definido por sus coordenadas (x_1,x_2) son ejemplos de semidistancias:

a) $e_1(x,y) = |x_1-y_1| \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}^2$

b) $e_2(x,y) = |x_2-y_2| \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}^2$

Si comparamos estas semidistancias con la distancia d_2 anteriormente definida, se puede observar que para que $d_2(x,y)$ -como para cualquier otra distancia- sea cero es necesario que el punto x sea idéntico al y, mientras que con la semidistancia e_1 (o con la e_2) puede ocurrir que $e_1(x,y)=0$ (o respectivamente $e_2(x,y)=0$) sin que necesariamente x sea el mismo punto que y.- Para ello bastará que x e y estén sobre la misma recta vertical del plano (o respectivamente sobre la misma recta horizontal).



No obstante cuando x=y también se cumple que:

$e_1(x,y)=0$ (y análogamente $e_2(x,y)=0$) $\blacksquare$

PROPOSICION 1.1.1.

A partir de una semidistancia definida sobre E siempre se puede generar una distancia sobre el conjunto cociente $E/\sim$ respecto a la relación de equivalencia: "$x\sim y$ si $e(x,y)=0$"

DEMOSTRACION:

La relación $\sim$ así definida es una relación de equivalencia, puesto que goza de las propiedades:

. Reflexiva: $x \sim x \qquad \forall\, x \in E$

En efecto, por la definición de semidistancia se sabe que:

$$x=x \Longrightarrow e(x,x)=0 \qquad \forall\, x \in E$$

Luego x se relaciona con el mismo.

. Simétrica: $x \sim y \Rightarrow y \sim x \qquad \forall\, x,y \in E.$

En efecto, por ser e una semidistancia sobre E, cumplirá el axioma de simetría, luego:

$$x \sim y \iff 0= e(x,y)= e(y,x) = 0 \iff y \sim x$$

. Transitiva: $\left.\begin{array}{l} x \sim y \\ y \sim z \end{array}\right\} \Longrightarrow x \sim z \qquad \forall\, x,y,z \in E$

En efecto, por la desigualdad triangular que cumple e se sabe que:

$$e(x,z) \leq e(x,y) + e(y,z)$$

pero si x se relaciona con y se tiene que $e(x,y)=0$.

Análogamente si y se relaciona con z, se sabe que $e(y,z)=0$. Luego, bajo estos supuestos, $e(x,z) \leq 0$.

Como la semidistancia $e(x,z)$ sólo puede tomar valores reales no negativos, es evidente que:

$$e(x,z)=0 \Longrightarrow x\sim z$$

Por tanto la relación $\sim$ producirá una partición del conjunto E en clases de equivalencia. Sean $\dot{x}$ e $\dot{y}$ las clases de equivalencia a las que pertenecen respectivamente x e y. Si se define sobre el espacio cociente la aplicación $d: E/\sim \times E/\sim \mapsto \mathbb{R}_+$ siguiente:

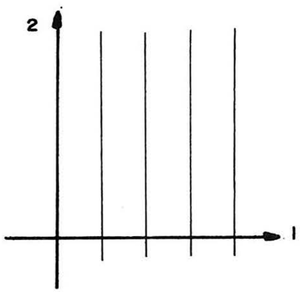
$$d(\dot{x},\dot{y}) = e(x,y) \qquad \forall\, x \in \dot{x},\ y \in \dot{y} \qquad (1.1.7)$$

es inmediato comprobar que $(E/\sim, d)$ es un e.m.

EJEMPLO:

Si se define sobre $\mathbb{R}^2$ la semidistancia: $e(x,y)=|x_1-y_1|$ y sobre él se establece la relación de equivalencia:

$$\forall\, x,y\in\mathbb{R}^2 \qquad x\sim y \Longleftrightarrow e(x,y)=0$$



se puede efectuar una partición del conjunto $\mathbb{R}^2$ en clases de equivalencia. Cada clase de equivalencia sería una recta vertical, ya que dos puntos cualesquiera x e y, situados sobre una misma recta vertical serían equivalentes.

Pues bien, en el conjunto cociente $\mathbb{R}^2/\sim$, formado por todas las rectas verticales del plano, la aplicación d que se obtiene a partir de e mediante (1.1.7) es una distancia entre las clases de equivalencia.

Es decir, que el conjunto $\mathbb{R}^2/\sim$ dotado de la aplicación d es un espacio métrico $(\mathbb{R}^2/\sim\ , d)$. ■

DEFINICION

Si (E,d) es un espacio métrico y A es un subconjunto de E, el subconjunto A dotado de la misma distancia d, (A,d), se denomina SUBESPACIO METRICO de (E,d).

DEFINICION

Dos espacios métricos (E,d) y (F,d') se dice que son ISOMETRICOS, si existe una aplicación f de E en F tal que verifique:

$$d(x,y) = d'(f(x),f(y)) \qquad \forall x,y \in E.$$

También se dice que f es una isometría entre los dos e. m. y establece un isomorfismo entre las estructuras de los dos e.m.

EJEMPLO:

Toda recta es un subespacio métrico de $\mathbb{R}^2$, dotado de cualquiera de las distancias d_1, d_2 o d_∞, isométrico de la recta real $(\mathbb{R}, d_f)$. ■

1.2. Bolas abiertas. Bolas cerradas. Esferas

Sea (E,d) un e.m. Sea $a \in E$.

DEFINICION

Se denomina BOLA ABIERTA de centro $\underline{a}$ y radio r (siendo $r \in \mathbb{R}^*_+$), y se representa por $B(a,r)$, al conjunto de puntos pertenecientes a E, tales que su distancia al punto $\underline{a}$ es estrictamente inferior al radio r. Es decir:

$$B(a,r) = \{x \in E / d(a,x) < r\} \qquad (1.2.1.)$$

DEFINICION

Se denomina BOLA CERRADA de centro $\underline{a}$ y radio r (siendo $r \in \mathbb{R}^*_+$), y se representa por $B'(a,r)$, al conjunto de puntos pertenecientes a E tales que su distancia al punto $\underline{a}$ es igual o inferior al radio r. Es decir:

$$B'(a,r) = \{x \in E / d(a,x) \leq r\} \qquad (1.2.2.)$$

DEFINICION

Se denomina ESFERA de centro $\underline{a}$ y radio r (donde $r \; \mathbb{R}^*_+$), y se representa por $S(a,r)$, al conjunto de puntos pertenecientes a E tales que su distancia al centro $\underline{a}$ es exactamente igual al radio r:

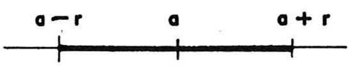
$$S(a,r) = \{x \quad E / d(a,x) = r\} \qquad (1.2.3.)$$

NOTAS: a) En el e.m. $(\mathbb{R}^3, d_2)$ los nombres de bolas y esferas tienen un sentido geométrico clásico.

b) Es evidente que $\{a\} \; B(a,r) \; B'(a,r)$. En particular ninguna bola es vacía.

EJEMPLOS:

1º Consideremos el espacio métrico $(\mathbb{R}, d_f)$, es decir la recta real. En este e.m., la bola abierta de centro $\underline{a}$ y radio r es el intervalo abierto $]a-r, a+r[$ (en el que los puntos a-r y a+r no pertenecen a dicho intervalo).



$$B(a,r) =]a-r \;, \; a+r[$$

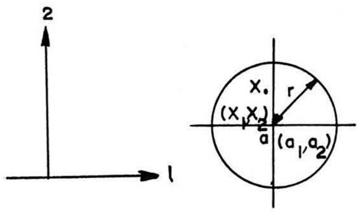
La bola cerrada de centro $\underline{a}$ y radio r es el intervalo cerrado $[a-r, a+r]$ (en el que los puntos a-r y a+r sí pertenecen a dicho intervalo).

$$B'(a-r) = [a-r, a+r]$$

La esfera de centro $\underline{a}$ y radio r estaría formada por los puntos a-r y a+r.

$$S(a,r) = \{a-r \quad , \quad a+r\}$$

2º Consideremos el espacio métrico $(\mathbb{R}^2, d_2)$ siendo d_2 la distancia euclídea. Estamos ahora en el denominado plano euclídeo.



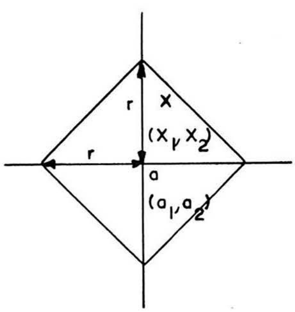
En él, la bola abierta de centro a y radio r, está formada por todos los puntos del círculo de centro a y radio r, excluídos los de la circunferencia. Se denomina a este conjunto disco abierto de centro a y radio r. Es decir, $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, [(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2]^{\frac{1}{2}} < r\}$ La bola cerrada de centro a y radio r está formada por todos los puntos del círculo de centro a y radio r incluídos los puntos de la circunferencia periférica. A este conjunto se le denomina, también, disco cerrado de centro a y radio r. Luego:

$$B'(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \;|\; [(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2]^{\frac{1}{2}} \leqslant r\}$$

La esfera estará constituida por todos los puntos de la circunferencia de centro a y radio r.

$$S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \;|\; [(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2]^{\frac{1}{2}} = r\}$$

3º Consideremos el espacio métrico $(\mathbb{R}^2, d_1)$. En dicho e.m. la bola abierta de centro a y radio r estará formada por todos los puntos interiores al cuadrado girado 45° respecto a los ejes de la figura, excluidos los de los lados del cuadrado, es decir:



$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x_1-a_1| + |x_2-a_2| < r\}$$

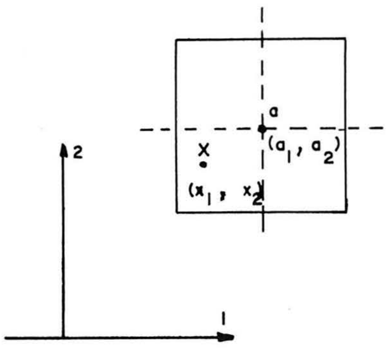
La bola cerrada B' (a,r) estaría formada por todos los puntos interiores al cuadrado anterior, incluidos los de los lados. Es decir:

$$B'(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| \leq r\}$$

La esfera S(a,r) estaría formada por todos los puntos de los lados del cuadrado de la figura. Es decir:

$$S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = r\}$$

4º Consideremos el espacio métrico $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$. Ahora la bola abierta de centro a y radio r estará constituida por todos los puntos situados dentro del cuadrado de lados paralelos a los ejes de la figura, excluidos los situados justamente en los lados. Es decir:



$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sup_{i=1,2} |x_i - a_i| < r\}$$

La bola cerrada estará integrada por los anteriores más los del borde del cuadrado, esto es:

$$B'(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sup_{i=1,2} |x_i - a_i| \leq r\}$$

Finalmente la esfera en este caso la formarán los puntos de los lados del cuadrado, es decir:

$$S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sup_{i=1,2} |x_i - a_i| = r\}$$

5º Consideremos el espacio métrico discreto antes definido (E, d_t).

En este caso las bolas abiertas, cerradas y las esferas de centro a, cualquiera, y radio r dependerán de cual sea -

el radio considerado. Así:

a) Si $r < 1$:

$B(a,r) = \{a\}$

$B'(a,r) = \{a\}$

$S(a,r) = \phi$

b) Si $r = 1$:

$B(a,r) = \{a\}$

$B'(a,r) = E$

$S(a,r) = E-\{a\}$

c) Si $r > 1$:

$B(a,r) = E$

$B'(a,r) = E$

$S(a,r) = \phi$

6º Sea el e.m. $(\mathbb{C},d)$ estando d definida por el ejemplo 6º de distancia del apartado [1.1]. Para estudiar las bolas abiertas y cerradas y esferas de este espacio métrico hay que distinguir dos casos:

a) Caso que el centro de la bola se encuentre en el origen del plano complejo. Entonces:

$$d(0,x) = \frac{1}{k} |x|$$

luego

$B(0,r)=\{x\in \mathbb{C} \mid |x| < k.r\}$

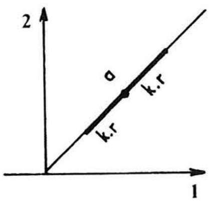
$B'(0,r)=\{x\in \mathbb{C} \mid |x| \leq k.r\}$

$S(0,r)=\{x\in \mathbb{C} \mid |x| = k.r\}$

es decir, coinciden con las correspondientes definidas en el ejemplo 2º.

b) Caso que el centro a de la bola sea un punto distinto del origen. Según sea el radio tenemos:

b.1. Si $r\in \left]0,\frac{|a|}{k}\right]$ sólo podrán formar parte de los subconjuntos estudiados puntos con el mismo argumento que a, es decir:

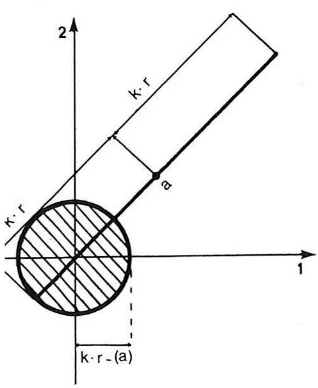


$B(a,r) = \{x\in \mathbb{C} \mid \arg x=\arg a,\ \ |x-a| < k.r\}$

$B'(a,r)= \{x\in \mathbb{C} \mid \arg x=\arg a,\ \ |x-a| \leq k.r\}$

$S(a,r) = \{x\in \mathbb{C} \mid \arg x=\arg a,\ \ |x-a| = k.r\}$

b.2. Si $r \in \left]\frac{|a|}{k},+\infty\right[$, cabrán puntos con argumentos iguales a a o distintos, así:



$B(a,r) = \{x\in \mathbb{C} \mid \arg x=\arg a,\ \ |x-a| < k.r\}\cup$

$\cup\{x\in \mathbb{C} \mid \arg x\neq\arg a,\ \ |x|<k.r-|a|\}$

$B'(a,r)= \{x\in \mathbb{C} \mid \arg x=\arg a,\ \ |x-a| \leq k.r\}\cup$

$\cup\{x\in \mathbb{C} \mid \arg x\neq\arg a,\ \ |x|\leq k.r-|a|\}$

$S(a,r) = \{x\in \mathbb{C} \mid \arg x=\arg a,\ \ |x|=|a|\pm k.r\}\cup$

$\cup\{x\in \mathbb{C} \mid \arg x\neq\arg a,\ \ |x|= k.r-|a|\}$

7º Sea el e.m. ($\mathbb{R}^2$,d) donde d viene definida por el ejemplo 7º de una distancia del apartado [1.1] . Es decir:

$$d(x,y) = \text{Inf}\,[k, d_2(x,y)] \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^2$$

llamando ya a d' del citado ejemplo por su notación universal d_2 dada en dicho apartado. Si r<k:

$$d(a,x) < r < k \Longrightarrow d_2(a,x) < r$$

luego las bolas abiertas, cerradas y esferas son las definidas en el ejemplo 2º.

Si r=k, la bola abierta coincide con el disco abierto de radio k, la bola cerrada es $\mathbb{R}^2$ entero y la esfera es $\{\mathbb{R}^2 - B(a,r)\}$.

Si r>k, la bola abierta coincide con $\mathbb{R}$ igual que la cerrada, siendo la esfera el conjunto vacio. ■

PROPOSICION 1.2.1.

En todo e.m. se verifica:

$$B(a,r) \cup S(a,r) = B'(a,r) \qquad \forall\, a \in E,\ \forall r \in \mathbb{R}^*_+$$

DEMOSTRACION:

Es evidente teniendo en cuenta las expresiones (1.2.1.), (1.2.2.) y (1.2.3.). ■

1.3. Distancia entre subconjuntos de un espacio métrico

Sea un e.m. (E,d) y sean A y B dos subconjuntos de E.

DEFINICION

Se denomina DISTANCIA ENTRE LOS SUBCONJUNTOS A y B, y se representa por d(A,B), al extremo inferior de las distancias entre las parejas de puntos formadas por un punto de A y otro de B. Es decir:

$$d(A,B) = \operatorname*{Inf}_{\substack{x\in A \\ y\in B}} d(x,y)$$

CONSECUENCIAS:

1º $d(A,B)$ no es propiamente una distancia a pesar de su nombre.

2º $d(A,B) = d(B,A)$ $\forall A,B \subset E$(por cumplir la distancia el axioma de simetría)

3º Si $A\cap B \neq \phi$ $d(A,B) = 0$

Caso Particular:

Si el conjunto A está formado por un único punto a, la distancia $d(A,B)$ se denomina DISTANCIA DEL PUNTO a AL SUBCONJUNTO B, y se representa por $d(a,B)$, siendo:

$$d(a,B) = \operatorname*{Inf}_{\forall x\in B} d(a,x)$$

EJEMPLOS:

1º Consideremos la recta real, $(\mathbb{R},d_f)$, y sea $\mathbb{Q}$ el -- conjunto de los números racionales.

Para cualquier punto $a \in \mathbb{R}$, se cumple que:

$$d_f(a,\mathbb{Q}) = 0$$

2º De igual forma, en dicho e.m., se tiene:

$$d_f(\mathbb{Q},\mathbb{R}-\mathbb{Q}) = 0$$

DEFINICION

Se denomina DIAMETRO del conjunto A, y se representa por $\delta(A)$, al extremo superior de las distancias entre puntos cualesquiera de A:

$$\delta(A) = \sup_{x,y\in A} d(x,y)$$

EJEMPLOS:

1º En el e.m. $(\mathbb{R}^2,d_2)$ siendo d_2 la distancia euclídea, el diámetro de los conjuntos se denomina diámetro geométrico.

2º En el espacio métrico discreto (E,d_t), el diámetro de E es 1.

PROPIEDAD 1.3.1.

Toda bola abierta o cerrada de un e.m. (E,d) y de radio r, tiene un diámetro inferior o igual a $2r$.

$$\delta(B(a,r)) \leqslant 2r. \qquad \forall a \in E$$
$$\delta(B'(a,r)) \leqslant 2r. \qquad \forall r \in \mathbb{R}_+^*$$