



HERBERT UTZ VERLAG WISSENSCHAFT

**FORSCHUNGSBERICHTE**

**306**

**Thomas Bonin**

**Moderne Ordnungsreduktionsverfahren für die Simulation des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen**



Thomas Bonin

**Moderne Ordnungsreduktionsverfahren für die  
Simulation des dynamischen Verhaltens von  
Werkzeugmaschinen**

Herbert Utz Verlag · München 2015

Forschungsberichte IWB  
Band 306

Ebook (PDF)-Ausgabe:  
ISBN 978-3-8316-7176-2 Version: 1 vom 04.11.2015  
Copyright© Herbert Utz Verlag 2015

Alternative Ausgabe: Softcover  
ISBN 978-3-8316-4522-0  
Copyright© Herbert Utz Verlag 2015





TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Lehrstuhl für Werkzeugmaschinen und Fertigungstechnik  
am Institut für Werkzeugmaschinen und Betriebswissenschaften (*iwb*)

**Moderne Ordnungsreduktionsverfahren für die Simulation  
des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen**

**Thomas Günter Bonin**

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)**

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. dr. ir. Daniel J. Rixen

Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Michael Zäh

2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Boris Lohmann

Die Dissertation wurde am 01.12.2014 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 11.05.2015 angenommen.



Thomas Bonin

**Moderne Ordnungsreduktionsverfahren für die  
Simulation des dynamischen Verhaltens  
von Werkzeugmaschinen**



Herbert Utz Verlag · München

## **Forschungsberichte IWB**

Band 306

Zugl.: Diss., München, Techn. Univ., 2015

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Entnahme von Abbildungen, der Wiedergabe auf fotomechanischem oder ähnlichem Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen bleiben – auch bei nur auszugsweiser Verwendung – vorbehalten.

Copyright © Herbert Utz Verlag GmbH · 2015

ISBN 978-3-8316-4522-0

Printed in Germany  
Herbert Utz Verlag GmbH, München  
089-277791-00 · [www.utzverlag.de](http://www.utzverlag.de)

## Geleitwort der Herausgeber

Die Produktionstechnik ist für die Weiterentwicklung unserer Industriegesellschaft von zentraler Bedeutung, denn die Leistungsfähigkeit eines Industriebetriebes hängt entscheidend von den eingesetzten Produktionsmitteln, den angewandten Produktionsverfahren und der eingeführten Produktionsorganisation ab. Erst das optimale Zusammenspiel von Mensch, Organisation und Technik erlaubt es, alle Potentiale für den Unternehmenserfolg auszuschöpfen.

Um in dem Spannungsfeld Komplexität, Kosten, Zeit und Qualität bestehen zu können, müssen Produktionsstrukturen ständig neu überdacht und weiterentwickelt werden. Dabei ist es notwendig, die Komplexität von Produkten, Produktionsabläufen und -systemen einerseits zu verringern und andererseits besser zu beherrschen.

Ziel der Forschungsarbeiten des *iwb* ist die ständige Verbesserung von Produktentwicklungs- und Planungssystemen, von Herstellverfahren sowie von Produktionsanlagen. Betriebsorganisation, Produktions- und Arbeitsstrukturen sowie Systeme zur Auftragsabwicklung werden unter besonderer Berücksichtigung mitarbeiterorientierter Anforderungen entwickelt. Die dabei notwendige Steigerung des Automatisierungsgrades darf jedoch nicht zu einer Verfestigung arbeitsteiliger Strukturen führen. Fragen der optimalen Einbindung des Menschen in den Produktentstehungsprozess spielen deshalb eine sehr wichtige Rolle.

Die im Rahmen dieser Buchreihe erscheinenden Bände stammen thematisch aus den Forschungsbereichen des *iwb*. Diese reichen von der Entwicklung von Produktionssystemen über deren Planung bis hin zu den eingesetzten Technologien in den Bereichen Fertigung und Montage. Steuerung und Betrieb von Produktionssystemen, Qualitätssicherung, Verfügbarkeit und Autonomie sind Querschnittsthemen hierfür. In den *iwb* Forschungsberichten werden neue Ergebnisse und Erkenntnisse aus der praxisnahen Forschung des *iwb* veröffentlicht. Diese Buchreihe soll dazu beitragen, den Wissenstransfer zwischen dem Hochschulbereich und dem Anwender in der Praxis zu verbessern.

*Gunther Reinhart*

*Michael Zäh*



## Vorwort des Verfassers

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Werkzeugmaschinen und Betriebswissenschaften (*iwb*) der Technischen Universität München.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Michael Zäh und Herrn Prof. Dr.-Ing. Gunther Reinhart, den Leitern dieses Instituts, gilt mein besonderer Dank für die wohlwollende Förderung und großzügige Unterstützung meiner Arbeit. Bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Boris Lohmann, dem Leiter des Lehrstuhls für Regelungstechnik der Technischen Universität München, möchte ich mich für die Übernahme des Korreferates und die aufmerksame Durchsicht der Arbeit sehr herzlich bedanken. Ebenso danke ich Herrn Prof. dr. ir. Daniel Rixen, dem Leiter des Lehrstuhls für Angewandte Mechanik der Technischen Universität München, für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes.

Darüber hinaus bedanke ich mich bei allen Kolleginnen und Kollegen des Instituts recht herzlich für die stets angenehme Zusammenarbeit. Besonders hervorheben möchte ich Klemens Niehues und Stefan Schwarz sowie meinen Bürokollegen Johannes Pohl, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit mit Rat und Tat unterstützt haben. Bei den Studierenden, die meine Forschung in Form von Studienarbeiten begleitet haben, bedanke ich mich für deren Interesse und ihr Engagement. Des Weiteren gilt mein Dank Michael Loy und Klemens Niehues, die das Manuskript kritisch begutachtet und viele wertvolle Anregungen gegeben haben. In diesem Zusammenhang möchte ich mich auch herzlich bei Andreas Soppa, ehemaliger wiss. Mitarbeiter am *Institut Computational Mathematics* der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina Braunschweig, für die konstruktive Zusammenarbeit während und nach dem gemeinsam bearbeiteten DFG-Forschungsprojekt bedanken.

Mein besonderer Dank gilt meinen Eltern, die immer an mich geglaubt und mich stets mit allen Kräften unterstützt und mir so den nötigen Rückhalt bei der Anfertigung dieser Arbeit gegeben haben.

Vor allem aber möchte ich mich bei meiner Frau Conny bedanken. Sie hat in den vergangenen Jahren viel Geduld mit der Wissenschaft und mit mir bewiesen. An den ungezählten Abenden und Wochenenden, an welchen diese Arbeit entstand, hat sie verständnisvoll Rücksicht genommen.

München, im September 2015

*Thomas Bonin*



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>v</b>
<b>Verzeichnis der Formelzeichen</b>	<b>ix</b>
Lateinische Buchstaben.....	ix
Griechische Buchstaben .....	xiii
Mathematische Ausdrücke und Zeichen .....	xiv
Glossar mathematischer Begriffe.....	xvi
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Ausgangssituation .....	1
1.2 Problemstellung.....	4
1.3 Zielsetzung .....	6
1.4 Aufbau der Arbeit .....	8
<b>2 Entwicklung und Simulation von Werkzeugmaschinen</b>	<b>11</b>
2.1 Inhalt des Kapitels .....	11
2.2 Strukturverhalten von Werkzeugmaschinen .....	11
2.2.1 Allgemeines.....	11
2.2.2 Werkzeugmaschinen als nachgiebige Systeme.....	12
2.2.3 Beanspruchungen der Maschinenstruktur .....	13
2.2.4 Betriebsverhalten des Gesamtsystems.....	14
2.3 Ablauf des Entwicklungsprozesses .....	16
2.4 Simulationenmethoden.....	19
2.4.1 Simulation in der Werkzeugmaschinenentwicklung.....	19
2.4.2 Numerische Simulationsverfahren .....	21
2.4.3 Strukturmechanische Berechnung .....	24
2.4.4 Berücksichtigung des Dämpfungsverhaltens .....	27
2.5 Simulation des mechatronischen Gesamtsystems .....	33
2.5.1 Überblick .....	33
2.5.2 Simulation von Gestellstrukturen.....	35
2.5.3 Simulation der Antriebskomponenten .....	36
2.5.4 Mechatronisches Gesamtmodell.....	37
2.5.5 Gekoppelte Struktur-Prozess-Simulation.....	38
2.6 Zusammenfassung .....	40
<b>3 Verfahren zur Modellordnungsreduktion</b>	<b>41</b>
3.1 Inhalt des Kapitels .....	41
3.2 Grundlagen der linearen Algebra und der Systemtheorie.....	41

3.2.1	Eigen- und Singulärwertzerlegung .....	41
3.2.2	Matrix-Zerlegungen .....	44
3.2.3	Projektionen.....	45
3.2.4	Darstellung von Systemen.....	47
3.2.5	Systemeigenschaften .....	49
3.2.6	Übertragungsverhalten .....	53
3.2.7	Momente einer Funktion .....	56
3.2.8	Normen .....	59
3.3	Allgemeines zur Modellordnungsreduktion .....	62
3.4	Betrachtete Verfahren .....	64
3.5	Reduktion durch Projektion .....	65
3.6	Modale Reduktion .....	67
3.6.1	Modales Abschneiden.....	67
3.6.2	Substrukturtechnik .....	69
3.7	Krylov-Unterraum-Verfahren .....	70
3.7.1	Definition von Krylov-Unterräumen.....	70
3.7.2	Approximation durch Momentenabgleich .....	71
3.7.3	Ein- und zweiseitige Krylov-Unterraum-Verfahren .....	75
3.7.4	Verwendung mehrerer Entwicklungspunkte.....	76
3.7.5	Bestimmung der Projektionsmatrizen .....	77
3.8	Modellordnungsreduktion in der Simulation von Werkzeug- maschinen .....	83
3.9	Zusammenfassung und Handlungsbedarf .....	87
<b>4</b>	<b>Reduktion von Werkzeugmaschinenmodellen mit Krylov- Unterraum-Verfahren</b> .....	<b>89</b>
4.1	Inhalt des Kapitels .....	89
4.2	Anforderungen an das Reduktionsverfahren .....	90
4.2.1	Systeme zweiter Ordnung und Matrixeigenschaften.....	90
4.2.2	Beschreibung der Anforderungen .....	92
4.3	Einflussfaktoren auf Krylov-Unterraum-Verfahren .....	94
4.3.1	Darstellung des Beispielsystems .....	94
4.3.2	Anzahl der Momente .....	97
4.3.3	Anwendung des ein- bzw. des zweiseitigen Krylov- Unterraum-Verfahrens .....	101
4.3.4	Mehrere Entwicklungspunkte und Wahl ihrer Lage .....	102
4.3.5	Zusammenfassung.....	109
4.4	Bestandteile des Reduktionsverfahrens .....	109
4.4.1	Allgemeines und Aufbau des Verfahrens .....	109
4.4.2	Reduktion von Systemen zweiter Ordnung .....	111
4.4.3	Berücksichtigung mehrerer Systemein- und -ausgänge ..	112
4.4.4	Verwendung mehrerer Entwicklungspunkte.....	113

4.4.5	Vereinfachung des Orthogonalisierungsschemas	114
4.4.6	Automatisierung des Reduktionsverfahrens	115
4.4.7	Zusammenfassung	118
4.5	Reduktionsverfahren für beliebig gedämpfte Modelle	119
4.5.1	Modellierung lokaler viskoser Dämpfungseffekte	119
4.5.2	Berücksichtigung von Strukturdämpfung	120
4.5.3	Reduktionsverfahren für beliebig gedämpfte Systeme auf Basis von Krylov-Unterräumen zweiter Ordnung	121
4.6	Zusammenfassung und Fazit	130
<b>5</b>	<b>Integration des Reduktionsverfahrens in die entwicklungs-</b> <b>begleitende Simulation</b>	<b>133</b>
5.1	Inhalt des Kapitels	133
5.2	Entwicklungsbegleitende Simulation	133
5.3	Anforderungen und Randbedingungen	136
5.4	Konzeption des Vorgehensmodells	137
5.4.1	Überblick	137
5.4.2	Modellierung der Maschinenstruktur	139
5.4.3	Erstellung des Systemmodells	144
5.4.4	Reduktion des Systemmodells	147
5.4.5	Überführung in ein Blockmodell	149
5.4.6	Berechnung der Simulationsaufgabe	150
5.5	Zusammenfassung und Fazit	153
<b>6</b>	<b>Anwendung und Validierung des Reduktionsverfahrens</b>	<b>155</b>
6.1	Inhalt des Kapitels und Vorgehen	155
6.2	Beschreibung der Beispielmodelle	156
6.2.1	Finite-Elemente-Modelle	156
6.2.2	Definition der Systemein- und -ausgänge	159
6.3	Anwendung des Reduktionsverfahrens	160
6.4	Analyse der Approximationsqualität	161
6.4.1	Allgemeines und Berechnung des Fehlers	161
6.4.2	Einfluss der Modelldimension	162
6.4.3	Einfluss des gewählten Frequenzbereiches	169
6.4.4	Reduzierung der Fehlerwahrscheinlichkeit durch Auto-	
	matisierung	170
6.4.5	Berücksichtigung von Starrkörpermoden	171
6.4.6	Einfluss der Anzahl von Ein- und Ausgängen	174
6.4.7	Schlussfolgerungen zur Untersuchung der Approxima-	
	tionsqualität	176
6.5	Untersuchung der Berechnungseffizienz	176
6.5.1	Allgemeines	176

6.5.2	Bestimmung der Berechnungszeiten .....	177
6.5.3	Vergleich der Berechnungszeiten .....	178
6.5.4	Zusammenfassung .....	181
6.6	Reduktion von Systemen mit nicht-proportionaler Dämpfungs- matrix .....	182
6.6.1	Allgemeines .....	182
6.6.2	Darstellung der Reduktionsergebnisse .....	183
6.6.3	Schlussfolgerung .....	186
6.7	Einsatz ordnungsreduzierter Modelle in der gekoppelten Si- mulation .....	187
6.8	Bewertung des Reduktionsverfahrens und Fazit .....	192
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>195</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>199</b>
	<b>Anhang</b>	<b>215</b>
A.1	Beanspruchungsarten mechanischer Strukturen .....	215
A.2	Parameter der Beispielsysteme .....	216
A.3	Weiterführende Details zu den Bestandteilen des Reduktions- verfahrens .....	217
A.3.1	Block-Arnoldi-Algorithmus zur Berücksichtigung mehr- erer Ein- und Ausgänge .....	217
A.3.2	Rationale Interpolation für die Verwendung mehrerer Entwicklungspunkte .....	219
A.3.3	Globaler Arnoldi-Algorithmus zur Vereinfachung der Orthogonalisierung .....	220
A.3.4	Detaillierung des VAIRGA-Verfahrens .....	222
A.4	Invertierung einer Matrix des $\mathbb{K}^{2 \times 2}$ .....	224
A.5	Ergänzende Ergebnisse .....	225
A.5.1	Approximationsqualität der Nachgiebigkeitsfrequenz- gänge des Modells der abstrahierten WZM-Struktur ...	225
A.5.2	Approximationsqualität der Nachgiebigkeitsfrequenz- gänge des Portalfräsmaschinenmodells .....	227
A.5.3	Approximationsqualität bei Modellen mit Starrkörper- moden .....	229
A.5.4	Auswirkung der Dimensionsbegrenzung bei der Re- duktion des $(9 \times 9)$ -Systems .....	230
	<b>Verzeichnis betreuter Studienarbeiten</b>	<b>233</b>

## Abkürzungsverzeichnis

bspw.	beispielsweise
bzgl.	bezüglich
bzw.	beziehungsweise
CACE	Computer Aided Control Engineering (engl.: rechnergestützte Regelungsentwicklung)
CAD	Computer Aided Design (engl.: rechnergestütztes Konstruieren)
CMS	Component Mode Synthesis
CNC	Computerized Numerical Control (engl.: computergestützte numerische Steuerung)
d. h.	das heißt
DBS	Digitale Blocksimulation
DGL	Differenzialgleichung
Dim.	Dimension
DV	Datenverarbeitung
EF	Eigenfrequenz(en)
elektr.	elektrisch, -e, -er, -en
EP	Entwicklungspunkt(e)
ES	Entwicklungsstelle
EV	Eigenvektor(en)
EW	Eigenwert(e)
EWP	Eigenwertproblem
FE	Finite Elemente oder finites Element
FEM	Finite-Elemente-Methode
FHG	Freiheitsgrad(e)
FMD-System	Feder-Masse-Dämpfer-System

ggf.	gegebenenfalls
HIL	Hardware-in-the-Loop (d. h. Kopplung von Steuerungssoftware mit dem Modell der Maschine oder Anlage, um deren Funktionalität zu überprüfen und die spätere Inbetriebnahmephase zu verkürzen)
i. d. R.	in der Regel
IT	Informationstechnologie
kompl.	komplex
konj.	konjugiert
KU	Krylov-Unterraum
KUV	Krylov-Unterraum-Verfahren
LTI-System	Linear time-invariant system (engl.: lineares zeitinvariantes Zustandsraummodell)
max.	maximal, -e, -er, -es, -en
MEMS	micro electro-mechanical system (engl.: mikro-elektromechanisches System)
MGS-Verfahren	modifiziertes Gram-Schmidt-Verfahren
MIMO	Multiple-Input-Multiple-Output (engl.: Mehrgrößensystem)
MKS	Mehrkörpersystem
MOR	model order reduction (engl.: Modellordnungsreduktion)
MT	Modaltransformation
MW	Motorwelle
o. g.	oben genannt, -e, -er, -en
RBE	Rigid Body Element (engl.: Starrkörperelement)
red.	reduziert, -es
SISO	Single-Input-Single-Output (engl.: Eingößensystem)
SOAR	Second-Order-Arnoldi (engl. Abkürzung für einen auf dem Arnoldi-Verfahren basierenden Algorithmus für Systeme zweiter Ordnung)
sog.	sogenannte, -r, -en

SW	Spindelwelle
TCP	Tool Center Point (engl.: Werkzeugmittelpunkt)
TF	Transfer- oder Übertragungsfunktion
u.	und
u. a.	unter anderem
usw.	und so weiter
v.	von
VAIRGA	vollständiger adaptiver iterativer rationaler globaler Arnoldi-Algorithmus
Verf.	Verfahren
vgl.	vergleiche
VHM	Vollhartmetall
WZM	Werkzeugmaschine
z. T.	zum Teil
zul.	zulässig, -e



# Verzeichnis der Formelzeichen

## Schreibweisen

Vektoren und Matrizen werden in dieser Arbeit durch fettgedruckte Klein- bzw. Großbuchstaben dargestellt.

Die Vektoren und Matrizen, die zur Erläuterung allgemeingültiger mathematischer Zusammenhänge dienen (insb. in Abschnitt 3.2), werden hier nicht explizit aufgeführt. Deren Bedeutung geht aus der Beschreibung im Text hervor. Gleiches gilt für Vektoren und Matrizen, welche bestimmte Ausdrücke substituieren, um die Übersichtlichkeit im Text zu erhöhen.

## Lateinische Buchstaben

Größe	Einheit	Bezeichnung
<b>0</b>	-	Nullmatrix, Nullvektor
<i>a</i>	-	Ausgang eines Systems
<i>a<sub>k</sub></i>	-	k-ter Koeffizient der CAUGHEY-Reihe
<i>a<sub>p</sub></i>	<i>mm</i>	Schnitttiefe
<i>a<sub>e</sub></i>	<i>mm</i>	Arbeitseingriff
<b>a</b>	-	Vektor der Systemausgangsgrößen
<b>A</b>	-	Systemmatrix des DGL-Systems 1. Ordnung (Zustandsraumdarstellung)
$\check{A}$	-	Systemmatrix des verallgemeinerten Zustandsraummodells
<b>B</b>	-	Eingangsmatrix des DGL-Systems (1. und 2. Ordnung)
$\check{B}$	-	Eingangsmatrix des verallgemeinerten Zustandsraummodells
$\hat{B}$	-	reduzierte Eingangsmatrix
<b>C</b>	-	Ausgangsmatrix des DGL-Systems 1. Ordnung (Zustandsraumdarstellung)
<i>C<sub>p</sub></i>	-	Ausgangsmatrix des DGL-Systems 2. Ordnung (verschiebungsproportionaler Anteil)

## Verzeichnis der Formelzeichen

---

$\hat{C}_p$	-	reduzierte Ausgangsmatrix
$C_v$	-	Ausgangsmatrix des DGL-Systems 2. Ordnung (geschwindigkeitsproportionaler Anteil)
$\hat{C}_v$	-	reduzierte Ausgangsmatrix
$C$	-	komplexer Anteil der Dämpfungsmatrix
$d$	$mm$	Durchmesser des Fräasers
$d_i$	$Ns/m$	i-te Dämpfungskonstante im FMD-System
$D$	-	Durchgangsmatrix des DGL-Systems 1. Ordnung (Zustandsraumdarstellung)
$D$	$Ns/m,$ $Nms/rad$	Dämpfungsmatrix
$D_L$	-	Lehr'sche Dämpfungsmatrix
$D_{L,i}$	-	Lehr'sches Dämpfungsmaß der i-ten Eigenfrequenz
$\tilde{D}$	$1/s, 1/(rad \cdot s)$	modale Dämpfungsmatrix
$\hat{D}$	$Ns/m,$ $Nms/rad$	reduzierte Dämpfungsmatrix
$e$	-	Eingang eines Systems
$e$	-	Vektor der Systemeingangsgrößen
$E$	-	Deskriptormatrix
$f$	$Hz$	Frequenz
$f_i$	$N$	i-te Kraft im FMD-System
$f_z$	$mm$	Vorschub pro Zahn
$f_{max}$	$Hz$	obere Grenze des zu approximierenden Frequenzbereichs
$F$	$N, Nm$	Vektor der äußeren Kräfte und Momente
$\hat{F}$	$N/\sqrt{kg}$	Vektor der äußeren Kräfte in modalen Koordinaten
$\mathcal{G}_m(\cdot, \cdot, \cdot)$	-	Krylov-Unterraum 2. Ordnung der Stufe $m$
$H(s)$	-	allg. Übertragungsfunktion des DGL-Systems 2. Ordnung
$ H(s) $	-	Amplitude der Übertragungsfunktion
$\hat{H}(\iota\omega)$	-	Übertragungsfunktion eines dynamisch erregten Systems 2. Ordnung
$i$	-	Laufvariable, u. a. für die Entwicklungsstellen oder die Eigenwerte eines Systems

---

$\mathbf{I}$	-	Einheitsmatrix
$k_i$	$N/m$	i-te Federsteifigkeit im FMD-System
$\mathbf{K}$	$N/m, Nm/rad$	Steifigkeitsmatrix
$\tilde{\mathbf{K}}$	$rad^2/s^2$	modale Steifigkeitsmatrix
$\hat{\mathbf{K}}$	$N/m, Nm/rad$	reduzierte Steifigkeitsmatrix
$\mathcal{K}_m(\cdot, \cdot)$	-	Krylov-Unterraum der Stufe $m$
$m$	-	Anzahl der Systemeingänge
$m$	-	Anzahl der Momente
$m_i$	$kg$	i-te Masse im FMD-System
$n$	-	Anzahl der Systemfreiheitsgrade
$\mathbf{M}$	$kg$	Massenmatrix
$\tilde{\mathbf{M}}$	-	modale Massenmatrix
$\hat{\mathbf{M}}$	$kg$	reduzierte Massenmatrix
$n$	$1/min$	Drehzahl
$\mathbf{N}$	$m/N, rad/Nm$	dynamische Nachgiebigkeitsmatrix
$\mathbf{N}_i$	$m/N, rad/Nm$	dynamische Nachgiebigkeitsmatrix des i-ten Eigenwertes
$p(\lambda)$	-	charakteristisches Polynom
$\mathbf{P}$	-	quadratische Matrix zur Bildung der Krylov-Sequenz ( $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ bei Krylov-Unterräumen 2. Ordnung)
$q$	-	Anzahl der Systemausgänge
$\mathbf{q}$	-	Startvektor eines Krylov-Unterraumes
$\mathbf{q}$	$m\sqrt{kg},$ $rad \cdot m\sqrt{kg}$	Vektor der modalen Verschiebungen
$\mathbf{Q}$	-	Startmatrix eines Krylov-Unterraumes (für Blockversion)
$r_{max}$	-	maximal zulässige Dimension des reduzierten Systems
$\mathbf{R}(\lambda_i)$	-	Residuum zur Bestimmung der Dominanz der Entwicklungsstelle $i$
$s$	$rad/s$	komplexe Frequenzvariable ( $s = \sigma + i\omega$ )
$s_0$	$rad/s$	Entwicklungspunkt einer Reihendarstellung
$\mathbf{s}$	-	Vektor der Anfangsentwicklungsstellen
$\mathbf{S}_B$	-	Beobachtbarkeitsmatrix

## Verzeichnis der Formelzeichen

---

$\mathbf{S}_S$	-	Steuerbarkeitsmatrix
$t$	$s$	Zeit
$t_{EWP}$	$s$	Zeitdauer zur Lösung des Eigenwertproblems
$t_{ausw}$	$s$	Zeitdauer zur Auswahl der zu berücksichtigenden Moden
$t_{MT}$	$s$	Zeitdauer für die Modaltransformation
$t_{TF}$	$s$	Zeitdauer für die Berechnung der Übertragungsfunktion
$t_{modal}$	$s$	Gesamtzeitdauer für die modale Reduktion
$t_{MOR}$	$s$	Zeitdauer für die automatische Reduktion mit dem KUV
$t_{KUV}$	$s$	Zeitdauer des Gesamtprozesses unter Verwendung von KUV
$\tau$	-	Deflationstoleranz
$u$	-	Eingangsfunktion eines SISO-Systems
$\mathbf{u}$	-	Vektor der Eingangsfunktionen eines MIMO-Systems
$U$	$V$	Motorspannung
$\mathbf{U}$	-	Laplace-Transformierte des Eingangsvektors
$\mathbf{V}$	-	(rechtsseitige) Projektionsmatrix
$\mathcal{V}$	-	Vektorraum, aufgespannt durch Spaltenvektoren der Projektionsmatrix $\mathbf{V}$
$\mathbf{W}$	-	(linksseitige) Projektionsmatrix
$\mathcal{W}$	-	Vektorraum, aufgespannt durch Spaltenvektoren der Projektionsmatrix $\mathbf{W}$
$x_i$	$m$	translatorische Verschiebung der i-ten Masse
$\mathbf{x}$	$m$	Vektor der Verschiebungen, Zustandsvektor des DGL-Systems 2. Ordnung
$\hat{\mathbf{x}}$	$m$	Zustandsvektor des reduzierten Systems 2. Ordnung
$\mathbf{X}$	-	Laplace-Transformierte des Verschiebungsvektors
$\mathbf{y}$	-	Vektor der Systemausgänge
$\mathbf{Y}$	-	Laplace-Transformierte des Ausgangsvektors
$z$	-	Anzahl der Schneiden

---

$z_0$	-	Ausgangszustand
$z$	-	Zustandsvektor des DGL-Systems 1. Ordnung (Zustandsraumdarstellung)

## Griechische Buchstaben

Größe	Einheit	Bezeichnung
$\alpha$	-	Linearkoeffizient für die Massenmatrix (proportionale Dämpfung)
$\beta$	°	Steigungswinkel
$\beta$	-	Linearkoeffizient für die Steifigkeitsmatrix (proportionale Dämpfung)
$\delta$	-	Konvergenzwert zur Bewertung der Differenz zweier nacheinander reduzierter Systeme
$\delta_i$	rad/s	Abklingkoeffizient des i-ten komplexen Eigenwerts
$\Delta$	-	Distanzparameter
$\epsilon$	-	Residuum
$\epsilon$	-	Reduktionsfehler allgemein
$\epsilon_{rel,ij}$	-	relativer Reduktionsfehler für einen Übertragungspfad
$\epsilon_{rel}$	-	relativer Reduktionsfehler, z. B. bezügl. einer bestimmten Norm
$\epsilon_s$	-	maximal zulässiger relativer Fehler in der Entwicklungsstelle
$\lambda_i$	rad/s	i-ter komplexer Eigenwert des DGL-Systems 2. Ordnung
$\bar{\lambda}_i$	rad/s	i-ter konjugiert komplexer Eigenwert des DGL-Systems 2. Ordnung
$\phi$	$\frac{1/\sqrt{kg}}{1/\sqrt{kg \cdot m^2}}$	Eigenvektor
$\phi_i$	$\frac{1/\sqrt{kg}}{1/\sqrt{kg \cdot m^2}}$	Eigenvektor zum i-ten Eigenwert
$\Phi$	$\frac{1/\sqrt{kg}}{1/\sqrt{kg \cdot m^2}}$	Modalmatrix

$\Phi_r$	$\frac{1/\sqrt{kg},}{1/\sqrt{kg \cdot m^2}}$	reduzierte Modalmatrix (nach Löschen von Eigenvektoren)
$\sigma$	-	Singulärwert
$\sigma$	$rad/s$	Abklingkonstante der komplexen Frequenzvariable
$\Sigma$	-	zu reduzierendes System
$\Sigma_{red}$	-	reduziertes System
$\omega$	$rad/s$	Kreisfrequenz
$\omega_i$	$rad/s$	Kreisfrequenz des i-ten Eigenwerts
$\omega_{D,i}$	$rad/s$	i-te Kreisfrequenz des gedämpften Systems
$\omega_i^2$	$rad/s$	i-ter Eigenwert
$\Omega^2$	$rad^2/s^2$	Eigenwertmatrix
$\xi$	$Ns/m$	lok. wirkender Dämpfungsfaktor
$\psi_i$	-	i-ter komplexer Rechtseigenvektor des DGL-Systems 2. Ordnung
$\bar{\psi}_i$	-	i-ter komplexer Linkseigenvektor des DGL-Systems 2. Ordnung

## Mathematische Ausdrücke und Zeichen

Symbol	Bedeutung
$A^{-1}$	Invertierte der Matrix $A$
$A^T$	Transponierte der Matrix $A$
$A^*$	kompl. conj. Transponierte der Matrix $A$ (Adjungierte), wenn $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ , Transponierte der Matrix $A$ , wenn $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$
$A^\dagger$	Pseudo-Inverse der Matrix $A$
$\tilde{A}$	Größe in modalen Koordinaten
$\mathbb{C}_+$	rechte Halbebene der komplexen Ebene ( $s \in \mathbb{C}_+ : Re(s) > 0$ )
$\det(\cdot)$	Determinante
$\text{diag}(a_1 \dots a_n)$	Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen $a_1 \dots a_n$
$\dim(\cdot)$	Dimension
$\in$	Element von