BestMasters

Andreas Künnemann

Lösbarkeit von Randwert-problemen mittels komplexer Integralgleichungen

Anwendung funktionentheoretischer Methoden zum Erhalt klassischer Lösungen

Springer Spektrum

BestMasters

Mit „BestMasters“ zeichnet Springer die besten Masterarbeiten aus, die an renommierten Hochschulen in Deutschland, Österreich und der Schweiz entstanden sind. Die mit Höchstnote ausgezeichneten Arbeiten wurden durch Gutachter zur Veröffentlichung empfohlen und behandeln aktuelle Themen aus unterschiedlichen Fachgebieten der Naturwissenschaften, Psychologie, Technik und Wirtschaftswissenschaften.
Die Reihe wendet sich an Praktiker und Wissenschaftler gleichermaßen und soll insbesondere auch Nachwuchswissenschaftlern Orientierung geben.

Andreas Künnemann

Lösbarkeit von Randwertproblemen mittels komplexer Integralgleichungen

Anwendung funktionentheoretischer Methoden zum Erhalt klassischer Lösungen

Springer Spektrum

Andreas Künnemann
Cottbus, Deutschland

BestMasters
ISBN 978-3-658-13125-8 ISBN 978-3-658-13126-5 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-13126-5

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Vorwort

Ein Randwertproblem ist ein mathematisches Problem, bei dem eine Funktion gesucht wird, die in einem Gebiet eine Differentialgleichung löst und auf dem Rand des Gebietes einer zusätzlichen Bedingung genügt. Solche Probleme sind in vielfältiger Form beispielsweise in der Physik anzutreffen. In natürlicher Weise bleibt vor der Suche nach einer Lösung offen, ob ein vorgelegtes Randwertproblem überhaupt lösbar ist. Dieser Fragestellung gehen wir in der vorliegenden Arbeit nach.

Wir wollen dabei derartige Randwertprobleme betrachten, in denen die auftretenden Differentialgleichungen partielle sind. Da sich partielle Differentialgleichungen im Gegensatz zu gewöhnlichen einer einheitlichen Anschauung entziehen, sind mit verschiedenen Typen von partiellen Differentialgleichungen auch unterschiedliche Methoden und Lösungsansätze verknüpft. Wir werden uns deshalb auf spezielle Klassen von Randwertproblemen konzentrieren.

Bei unseren Ausführungen stützen wir uns vorwiegend auf die Ideen von [Ve63] und folgen diesen. Zu bemerken ist jedoch, dass diese einerseits trotz des Umfangs des Gesamtwerkes in Teilen lückenhaft und unübersichtlich dargestellt sind. Andererseits wird der Fokus in [Ve63] auf schwache beziehungsweise verallgemeinerte Lösungen gelegt.
Im Gegensatz dazu sind wir an klassischen Lösungen interessiert, da der Wert einer Lösung auch in ihrer Regularität besteht. Wir werden die Methoden aus [Ve63] dahingehend anpassen. Zudem bemühen wir uns um eine ausführliche und gut verständliche Darstellung der zugrundeliegenden Erkenntnisse.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen, um mich bei einigen Personen zu bedanken, die mich während der Anfertigung dieser Arbeit in besonderer Weise unterstützt haben.
Mein ganz herzlicher Dank gilt meinem Betreuer Herrn Prof. Dr. Friedrich Sauvigny, der mir das vorliegende Thema anvertraute und mir die nötige Freiheit in der Gestaltung dieser Arbeit gab.
Gleichzeitig möchte ich auch Herrn Dr. Michael Hilschenz danken, der immer ein offenes Ohr für mich hatte und mir oft seine Zuversicht entgegenbrachte.
Außerdem spreche ich meinen Weggefährten Frau Imke Höfers und Herrn Christian Schwan, die ich über unser Studium hinaus als sehr gute Freunde schätze, einen besonderen Dank für das Korrekturlesen dieser Arbeit aus.
Ebenso erwähnen möchte ich Herrn Prof. Dr. Steffen Fröhlich, welcher sich als Zweitgutachter dieser Arbeit zur Verfügung stellte.
Am Ende will ich es nicht versäumen auch meiner Mutter zu danken, die mir während meines gesamten Studiums stets den Rücken frei hielt und mich so wunderbar unterstützte.

Cottbus, im März 2015 Andreas Künnemann

Inhaltsverzeichnis

1 Zum Aufbau der Arbeit

Zunächst bauen wir im Kapitel 2 das mathematische Fundament für diese Arbeit auf, indem wir für uns wichtige Ergebnisse der Funktionalanalysis sowie der Funktionentheorie aus entsprechender Literatur darlegen.
Gleichzeitig wird der Leser mit verwendeter Notation und stillschweigenden Vereinbarungen vertraut gemacht.

Im Kapitel 3 starten wir unsere Untersuchungen zur Lösbarkeit von Randwertproblemen. Wir formulieren eine Klasse von Problemen für elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei reellen Veränderlichen. Derartige Randwertprobleme sollen erstmals von Henri Poincaré im Zusammenhang mit Fragen der Himmelsmechanik diskutiert worden sein.
Der Methode von [Ve63] folgend überführen wir die auftretende Differentialgleichung zweiter Ordnung im Anschluss daran in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung. Dieses fassen wir dann wiederum als komplexe Differentialgleichung erster Ordnung auf, da wir Randwertprobleme für Funktionen zweier Veränderlicher betrachten. Indem wir eine Äquivalenz zwischen den Lösungen der verschiedenen Randwertprobleme herstellen, können wir uns bei den Ausführungen auf das komplexe Randwertproblem zurückziehen. Dies eröffnet uns insbesondere den Zugang zu Methoden der Funktionentheorie.
Gleichzeitig konzentrieren wir uns auf die ausschließliche Betrachtung einfach zusammenhängender Gebiete.

Bevor wir uns mit dem komplexen Randwertproblem weiter beschäftigen, untersuchen wir im Kapitel 4 die Eigenschaften von Integraloperatoren. Auch hier orientieren wir uns vorwiegend an [Ve63], liefern allerdings mithilfe weiterer Quellen eine umfassende Aufarbeitung von Beweisen. Zudem führen wir den assoziierten Vekuaschen Integraloperator formal ein und arbeiten seine Eigenschaften heraus.

Ausgehend vom komplexen Randwertproblem aus dem Kapitel 3 formulieren wir zu Beginn des Kapitels 5 ein verallgemeinertes komplexes Randwertproblem.
Angeregt durch die knappe Darstellung in [Ve56] leiten wir anschließend ausführlich eine Darstellungsformel für Lösungen des klassischen Riemann-Hilbertschen Randwertproblems, welches ein Spezialfall des allgemeinen Problems ist, her.
Wir greifen dann mit [Ca33] ein Ergebnis Torsten Carlemans über die Nullstellen von Lösungen einer komplexen Differentialgleichung auf. Unterstützt durch die Ausführungen von [Be53] geben wir einen ausführlichen Beweis des Satzes von Carleman an.
Anschließend leisten wir unter Verwendung des Satzes von Carleman ausreichend Vorarbeit um das sogenannte Ähnlichkeitsprinzip von Bers und Vekua mithilfe der Ideen von [Be53] zu zeigen.
Am Ende des Kapitels ermöglicht uns das Ähnlichkeitsprinzip von Bers und Vekua das allgemeine komplexe Randwertproblem in die kanonische Form zu transformieren.

Wir erklären dabei den Begriff des Indexes.

Die Erkenntnisse der vorangegangenen Kapitel bündeln sich schließlich im Kapitel 6. Dort überführen wir die kanonische Form des allgemeinen Randwertproblems in eine Integralgleichung und können die Lösbarkeit des Randwertproblems an die der Integralgleichung knüpfen. Hierbei betrachten wir ausschließlich die offene Einheitskreisscheibe.
Mit den Ideen von [Ve63] gelangen wir zu einer speziellen Integralgleichung, die wir als Operatorgleichung auffassen. Da wir den auftretenden Operator als Fredholm-Operator erkennen, untersuchen wir schließlich die Lösungen der homogenen Integralgleichung. Wiederum den Ausführungen in [Ve63] folgend zeigt sich, dass die vorgelegte Integralgleichung immer gelöst werden kann. Auf dem Weg dorthin schließen wir gleichzeitig wieder einige Lücken.
Somit zeigt sich, dass auch das allgemeine komplexe Randwertproblem zu einem nicht negativen Index unter relativ schwachen Voraussetzungen an die gegebenen Koeffizienten und rechten Seiten für die offene Einheitskreisscheibe stets lösbar ist.
Am Ende wollen wir sogar eine explizite Darstellung einer Lösung des allgemeinen komplexen Randwertproblems unter einer spezielleren Voraussetzung herleiten, die in keiner der angegebenen Quellen gefunden wurde. Zudem diskutieren wir noch grob die Übertragbarkeit der Ergebnisse auf andere Gebiete.