Peter Halfar

Spannungen in Gletschern

Verfahren zur Berechnung

Springer Spektrum

Spannungen in Gletschern

Peter Halfar

Spannungen in Gletschern

Verfahren zur Berechnung

Springer Spektrum

Peter Halfar
Hamburg, Deutschland

ISBN 978-3-662-48021-2 ISBN 978-3-662-48022-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-48022-9

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung: Merlet Behncke-Braunbeck

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Berlin Heidelberg ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
(www.springer.com)

Für Dorothea, Harry, Ronnie und Annelie

Vorwort

Man sollte meinen, dass zu einem klassischen Thema wie „Spannungen in Gletschern“ eigentlich schon alles gesagt ist. Aber beim Studium dieses Themas entstand bei mir allmählich ein anderer Eindruck, weil mir immer wieder die Einfachheit der Balancebedingungen ins Auge sprang, denen die Kräfte und Drehmomente in Gletschern genügen müssen. Diese Einfachheit der Balancebedingungen – sie bestehen aus der Symmetriebedingung für den Spannungstensor und aus einer Differentialgleichung, in welcher die Divergenz des Spannungstensors vorkommt – führte mich zu der Vermutung, dass es dazu auch eine einfache allgemeine Lösung geben müsste. Tatsächlich fand ich diese allgemeine Lösung, wie erwartet, in einem Handbuch über Festkörpermechanik. Das hier Bemerkenswerte an dieser allgemeinen Lösung war, dass sie noch nie auf die Gletscherdynamik angewandt wurde. Diese Lücke soll im Folgenden geschlossen werden.

Nach der Konstruktion dieser allgemeinen Lösung der Balancebedingungen gehe ich noch einen Schritt weiter und berechne die allgemeine Lösung, welche nicht nur diese Balancebedingungen berücksichtigt, sondern auch die Randbedingungen an freien Gletscheroberflächen und an den Kontaktflächen zu stehenden Gewässern.

Aber weiter als bis zur allgemeinen Lösung dieser Balance- und Randbedingungen kann man bei allgemeinen Spannungsberechnungen nicht gehen, wenn die berücksichtigten Bedingungen zuverlässig und der Rechenaufwand vertretbar bleiben sollen. Wollte man die nur unzureichend bekannten Randbedingungen an der Gletschersohle oder an den Grenzflächen zum benachbarten, nicht betrachteten Teil des Gletschers berücksichtigen, ginge die Zuverlässigkeit verloren. Wollte man die Fließbedingungen – Inkompressibilität des Eises und Fließgesetz – berücksichtigen, hätte das hohen Rechenaufwand zur Folge.

Daher hat man mit dieser allgemeinen Lösung der Balance- und Randbedingungen genau den Teil der Spannungsberechnungen bewältigt, welcher auf zuverlässigen Bedingungen beruht und mit vertretbarem Rechenaufwand durchgeführt werden kann. Diese allgemeine Lösung bildet wegen ihrer Zuverlässigkeit eine solide Ausgangsbasis für alle weitergehenden Berechnungen.

Ich habe versucht, den Begriff des Spannungstensors so ausführlich zu erklären und alle Berechnungsverfahren so detailliert darzustellen, dass ein möglichst in sich geschlossenes Hand- und Lehrbuch zur Berechnung von Spannungen vorliegt, welches ohne Spezialkenntnisse und ohne weitere Literaturstudien verwendet werden kann. Voraussetzung für die Lektüre sind Grundkenntnisse in Analysis, Distributionstheorie, linearer Algebra und klassischer Mechanik. Damit der Leser schnell das finden und verwenden kann, was ihn interessiert, habe ich in Kap. 9 einen Überblick über die allgemeine Lösung sowie ihre Anwendungsmöglichkeiten gegeben und habe außerdem zahlreiche Querverweise durch Fußnoten aufgenommen, um eine selektive Lektüre zu ermöglichen. Auf diese Weise und mit Hilfe des Inhaltsverzeichnisses kann sich der Leser das Buch erschließen. Deshalb habe ich auf einen Index verzichtet.

Ein ziemliches Problem bereiteten die vielen Formeln. Diese Formeln, die doch zum Verständnis der vorgestellten Rechenverfahren beitragen sollen, könnten die geradezu gegenteilige Wirkung entfalten, wenn sie den Text zu sehr durchsetzten und damit zu sehr störten. Ich habe versucht, dieses Problem durch Verlagerung von Berechnungen in den Anhang zu lösen, was jedoch noch nicht genügte. Die Lösung dieses Problems fand ich erst, nachdem ich mir klar gemacht hatte, dass hier zwei Sprachen gesprochen werden, nämlich die Sprache des Textes und die Sprache der Formeln und dass jede Sprache ihre eigene Botschaft hat und dass sich diese Botschaften gegenseitig um so mehr stören, je mehr man die beiden Sprachen vermischt. Daher habe ich in jedem Abschnitt den Text und die Formeln getrennt und habe es vermieden, im Text direkt über die Formeln zu sprechen. So stehen in jedem Abschnitt der Text und die Formeln eigenständig nebeneinander und sind nur locker miteinander verbunden. Diese lockere Verbindung wird durch die in den Text eingestreuten geklammerten Formelnummern hergestellt. Diese Formelnummern sind hochgestellt zum Zeichen dafür, dass sie kein Bestandteil des Textes sind. Auf diese Weise bleibt der Text ungestört von den Formeln und behält seine eigenständige Bedeutung.

Um auch die nur aus Formeln bestehenden Teile in sich möglichst verständlich zu gestalten, sind diese Teile gegliedert. Aus diesem Grund sind auch Gleichheitszeichen gelegentlich – um sie genauer zu spezifizieren – mit einem Hinweis versehen, falls es sich bei einer Gleichheit nicht um eine Bedingung handelt, sondern um eine Gleichheit gemäß Voraussetzung, um eine Gleichheit durch Definition oder um eine mathematische Identität oder falls eine andere Formel zu beachten ist. Eine wichtige Rolle spielen die in Kap. 3 eingeführten speziellen Integrationsvorschriften und deren Symbolisierung durch Integraloperatoren. Damit können nicht nur viele Formeln übersichtlich geschrieben werden, sondern damit lassen sich auch viele Berechnungen besonders leicht durchführen, da diese Integraloperatoren besonders einfachen Rechenregeln genügen. Dabei treten nicht nur gewöhnliche Funktionen, sondern auch Distributionen auf.

Eine Erläuterung und ein Verzeichnis der Symbole befinden sich am Ende des Buches. Hier seien nur die schräg durchgestrichenen Symbole erwähnt, da sie nicht allgemein üblich sind. $\not\mathbf{u}$ bezeichnet den antisymmetrischen Tensor, welcher einem Vektor $\mathbf{u}$ zugeordnet ist und $\not\mathbf{H}$ bezeichnet den Vektor, welcher dem antisymmetrischen Teil eines Tensors $\mathbf{H}$ zugeordnet ist.

Glückliche Zufälle, für die ich vielen Personen Dank schulde, haben es mir ermöglicht, dieses Buch zu schreiben. Ganz besonders danke ich meiner Frau Dorothea. Sie war meine erste Lektorin und im Dialog mit ihr habe ich das Buch gestaltet.

Hamburg, im Sommer 2015 Peter Halfar

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Einführung und Grundlagen

Einleitung

1

1.1 Die Berechnung von Spannungen

Schon lange gibt es ein bekanntes mathematisches Verfahren, das sich zur Berechnung von Spannungen in Gletschern eignet. Es ist aber in der Glaziologie noch nie angewandt worden. Mit diesem Verfahren lassen sich die so genannten gewichtslosen Spannungstensorfelder darstellen.

Diese gewichtslosen Spannungstensorfelder sollen im Folgenden zur Berechnung von Spannungen herangezogen werden. Um das Konzept und das Ziel dieser Untersuchung zu beschreiben, werden zunächst einmal die relevanten physikalischen Mechanismen dargelegt und die gewichtslosen Spannungstensorfelder charakterisiert.

1.2 Die physikalischen Mechanismen

Die folgenden physikalischen Mechanismen sind für die Spannungen in Gletschern maßgeblich [4, S. 258–261]:

Die Balancebedingungen

Die Balancebedingungen für die Kräfte und Drehmomente gelten, weil jeder Teil eines Gletschers beschleunigungsfrei ist. Das stimmt zwar nicht ganz genau, aber doch fast immer in sehr guter Näherung, da Beschleunigungen in Gletschern gegenüber der Erdbeschleunigung fast immer vernachlässigbar sind. Deshalb spürt man in der Regel keine Beschleunigungskräfte, wenn man auf einem Gletscher steht und von seiner Bewegung mitgenommen wird. Das eigene Körpergewicht ist nämlich viel größer als die auf den eigenen Körper wirkende Beschleunigungskraft, weil die Erdbeschleunigung viel größer ist als die Beschleunigung bei der Fließbewegung. Dagegen können bei fühlbar ruckartigen Gletscherbewegungen die Beschleunigungen nicht vernachlässigt werden.

P. Halfar, *Spannungen in Gletschern*, DOI 10.1007/978-3-662-48022-9_1

Man kann also unter dynamischen Gesichtspunkten einen Gletscher als beschleunigungsfreies Kontinuum betrachten, welches sich demzufolge in vollkommener statischer Balance befindet. Das bedeutet, dass für jeden beliebigen Teilbereich eines Gletschers sowohl die äußeren Kräfte als auch die äußeren Drehmomente insgesamt verschwinden.

Die Randbedingungen
Unter „Randbedingungen" werden hier die zuverlässig bekannten Randbedingungen verstanden, im Gegensatz zu den im Folgenden genannten unbekannten Randbedingungen. Diese Randbedingungen bestehen aus den Bedingungen verschwindender Randspannungen an freien Gletscheroberflächen und aus den hydrostatischen Randbedingungen auf Randflächen in stehenden Gewässern. Der Luftdruck wird vernachlässigt.

Die unbekannten Randbedingungen
Unbekannte oder zumindest nicht zuverlässig bekannte Randbedingungen treten am Untergrund und an den (fiktiven) Grenzflächen zum nicht betrachteten Gletscherbereich auf.

Die Fließbedingungen: Inkompressibilität und Fließgesetz
Inkompressibilität bedeutet, dass jeder beliebige materielle Teil eines Gletschers während der Fließbewegung sein Volumen beibehält. Mathematisch wird das durch die Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes der Fließbewegung ausgedrückt.

Das Fließgesetz beschreibt eine Relation zwischen den Verzerrungsraten der Fließbewegung und den Spannungen.

1.3 Die gewichtslosen Spannungstensorfelder

Die gewichtslosen Spannungstensorfelder bilden die allgemeine Lösung der homogenisierten Balancebedingungen, bei denen das spezifische Eisgewicht als formaler Parameter betrachtet und auf Null gesetzt wird. Folglich kann man diese gewichtslosen Spannungstensorfelder als Spannungstensorfelder in fiktiven gewichtslosen Gletschern interpretieren.

Die gewichtslosen Spannungstensorfelder lassen sich mit dem eingangs erwähnten, schon lange bekannten Verfahren berechnen. Mit ihrer Hilfe kann man die allgemeine Lösung der Balancebedingungen angeben, indem man eine spezielle Lösung dieser Balancebedingungen addiert.

1.4 Konzept und Ziel der Untersuchung

1.4.1 Allgemeines

Das allgemeine Untersuchungskonzept besteht in der Entwicklung von Rechenverfahren, die auf zuverlässigen Voraussetzungen beruhen und mit vertretbarem Aufwand durchgeführt werden können. Die allgemeine Lösung der Balance- und Randbedingungen genügt diesem Konzept, weil sie sowohl auf zuverlässigen Voraussetzungen beruht als auch mit vertretbarem Aufwand konstruiert werden kann. Gemäß diesem Konzept können weitere Bedingungen aber nicht berücksichtigt werden, da die übrigen Randbedingungen unbekannt sind und die Fließbedingungen einen unvertretbar hohen Rechenaufwand zur Folge hätten.

Deshalb ist die allgemeine Lösung der Balance- und Randbedingungen das Ziel dieser Untersuchung. Die Berechnung dieser allgemeinen Lösung ist wesentlicher Inhalt des allgemeinen Teils II dieses Buches. Das Kap. 7 ist sein Herzstück, weil in diesem Kapitel die gewichtslosen Spannungstensorfelder mit Randbedingungen konstruiert werden, mit deren Hilfe man sofort die allgemeine Lösung angeben kann. Eine zusammenfassende Beschreibung der allgemeinen Lösung und ihrer Anwendungsmöglichkeiten gibt Kap. 9.

1.4.2 Besonderes

Neben dem grundlegenden Teil I und dem allgemeinen Teil II enthält das Buch noch einen speziellen Teil III. In diesem speziellen Teil werden nicht nur Eigenschaften und Anwendungsmöglichkeiten der allgemeinen Lösung diskutiert, sondern es wird auch der Frage nachgegangen, wie man aus den unendlich vielen Spannungstensorfeldern der allgemeinen Lösung jeweils ein realistisches Spannungstensorfeld auswählt. Da dieses Auswahlproblem wegen seiner Komplexität nicht allgemein gelöst werden kann, werden zwei Aspekte dieses Auswahlproblems exemplarisch behandelt.

Ein praktischer Aspekt betrifft die Aufgabe, bei der Berechnung einer passenden Lösung unnötigen Rechenaufwand zu vermeiden, also nicht durch zu hohen Aufwand eine Präzision anzustreben, die aufgrund unsicherer Voraussetzungen ohnehin nicht erreichbar ist. Wie man diese Aufgabe angehen kann wird am Beispiel der quasistarren Spannungstensorfelder in Abschn. 10.3 demonstriert. Diese quasistarren Spannungstensorfelder können mit relativ geringem Aufwand berechnet werden und sind Kandidaten für realistische Spannungstensorfelder in stagnierenden Gletschern.

Ein theoretischer Aspekt des Auswahlproblems betrifft die Frage nach der idealen Lösung, ob also durch Berücksichtigung der Balance-, Rand- und Fließbedingungen eine eindeutige Lösung definiert werden kann und wie diese aussieht. Solche idealen Lösungen werden für horizontal unendlich ausgedehnte, isotrope und homogene Tafeleisbergmodelle in Abschn. 11.3 berechnet.

2 Balance- und Randbedingungen

Der zu betrachtende Gletscherbereich wird mit Ω, seine geschlossene Berandung mit $\partial\Omega$ bezeichnet.[1] Die Balancebedingungen besagen, dass jeder Teilbereich ω dieses Gletscherbereiches beschleunigungsfrei ist und folglich als starrer Körper angesehen werden kann, der sich in statischer Balance befindet [4, S. 258]. Somit heben sich die auf diesen Teilbereich ω wirkenden Kräfte und Drehmomente insgesamt auf.[2] Diese Kräfte und Drehmomente lassen sich durch Integrale über die differentiellen Kräfte und Drehmomente darstellen, welche auf die differentiellen Eismassen im Inneren des Teilbereiches ω und welche von außen auf die orientierten differentiellen Flächenelemente[3] seiner Berandung $\partial\omega$ wirken.

Die differentielle Kraft, welche unter der Erdbeschleunigung $\mathbf{g}$ auf eine differentielle Eismasse mit differentiellem Volumen dV und Eisdichte ρ wirkt, ist gleich ihrem differentiellen Gewicht (2.1). Die auf ein orientiertes Flächenelement mit der differentiellen Fläche dA wirkende differentielle Kraft (2.2) wird durch den Spannungsvektor $\mathbf{Sn}$ definiert, wobei

[1] Es wird vorausgesetzt, dass der Modellgletscherbereich Ω die einfache topologische Struktur einer Kugel hat. Ω und die Kugel können also durch eine stetige und umkehrbare Abbildung ineinander übergeführt werden, wobei die geschlossene Berandung $\partial\Omega$ und die Kugeloberfläche ineinander übergehen.

[2] In der klassischen Mechanik ist Beschleunigungsfreiheit eines Systems punktförmiger Teilchen, welche dem zweiten und dritten Bewegungsgesetz von Newton folgen, gleichbedeutend damit, dass für jedes Teilsystem die äußeren Kräfte und Drehmomente insgesamt verschwinden [1, S. 5–7]. Diese charakteristische Eigenschaft beschleunigungsfreier Systeme wird auf die für Gletscher relevante Kontinuumsmechanik übertragen, da diese nur eine phänomenologische Variante der klassischen Mechanik punktförmiger Teilchen ist, welche dem zweiten und dritten Bewegungsgesetz von Newton folgen.

[3] Die Orientierung eines Flächenelementes wird durch die Richtung seiner Normale festgelegt. Diese orientierte Normale ist der zur entsprechenden Seite zeigende und zum Flächenelement senkrechte Einheitsvektor. Ein orientiertes Flächenelement besteht aus dem Flächenelement selbst und seiner orientierten Normale. Hier weist die Normale nach außen.

P. Halfar, *Spannungen in Gletschern*, DOI 10.1007/978-3-662-48022-9_2

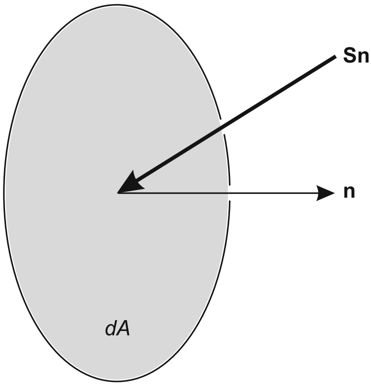

Abb. 2.1 Orientierte differentielle Flächenelemente dA mit ihren orientierten Flächennormalen **n** und mit Spannungsvektoren **Sn**

S den Spannungstensor und **n** die orientierte Flächennormale bezeichnen[4]. Es handelt sich um eine Flächenkraft zwischen den Eismassen, die von beiden Seiten an die differentielle Fläche stoßen. Diese Flächenkraft kommt jeweils von der Eismasse auf einer Seite der differentiellen Fläche und wirkt durch diese differentielle Fläche auf die Eismasse auf der anderen Seite. Bei der jeweiligen Berechnung (2.2) dieser beiden Flächenkräfte weist die Flächennormale **n** zu der Eismasse, von der die Kraft kommt. Diese beiden Flächenkräfte sind wegen Richtungsumkehr der Flächennormale **n** zueinander entgegengesetzt und erfüllen somit das Prinzip „Actio gleich Reactio". In Abb. 2.1 ist der Spannungsvektor **Sn** jeweils auf der Seite der Fläche eingezeichnet, von der die Kraft und damit die Spannung kommt. Stößt der Spannungsvektor auf die Fläche, ist seine Normalkomponente eine durch diese Fläche auf die andere Seite wirkende Druckspannung, andernfalls eine Zugspannung. Aus den differentiellen Kräften erhält man die differentiellen Drehmomente, indem man die Vektorprodukte mit den Ortsvektoren **r** bildet (2.3), (2.4).

Die resultierende Kraft und das resultierende Drehmoment, welche auf einen beliebigen Teilbereich ω wirken, ergeben sich durch Integration über alle differentiellen Kräfte (2.1), (2.2) und Drehmomente (2.3), (2.4) sowohl im Inneren des Teilbereiches ω als auch auf seiner geschlossenen Berandung $\partial\omega$. Diese resultierenden Größen sollen gemäß den Balancebedingungen (2.8), (2.9) verschwinden. In diesen Balancebedingungen sind die Flächenintegrale über die geschlossene Berandung $\partial\omega$ gleich der Kraft bzw. dem Drehmoment, welche auf diese Berandung wirken. Die Volumenintegrale über den Teilbereich ω sind gleich der Kraft bzw. dem Drehmoment, welche durch die Gewichtsverteilung in diesem Teilbereich verursacht werden. Diese Volumenintegrale lassen sich durch die Masse m_ω (2.5) bzw. das Moment $\mathbf{M}_\omega$ (2.6) der Massenverteilung im Teilbereich ω ausdrücken

[4] Zur Begründung, dass der Spannungsvektor die Form **Sn** hat, s. [5, S. 134–135].

und sind gleich dem Gewicht dieser Masse m_ω bzw. gleich dem Drehmoment der fiktiv in ihrem Schwerpunkt $\mathbf{c}_\omega$ [(2.7)] konzentrierten Masse[5].

Um die Balancebedingungen von den integralen Formen [(2.8), (2.9)] in lokale Formen umzuwandeln, rechnet man die Integrale über die geschlossene Berandung $\partial\omega$ des Bereiches ω mit dem Satz von Gauß in Volumenintegrale [(2.10), (2.11)] über den Bereich ω um[6]. Damit lassen sich die integralen Balancebedingungen durch reine Volumenintegrale ausdrücken, die für beliebige Teilbereiche ω des betrachteten Gletscherbereiches Ω verschwinden müssen [(2.12), (2.13)]. Deshalb sind diese integralen Balancebedingungen äquivalent zu den lokalen Balancebedingungen, welche aus einer Differentialgleichung [(2.14)] und der Symmetriebedingung [(2.15)] für den Spannungstensor $\mathbf{S}$ bestehen.

Für die Randbedingungen [(2.16)] werden nur zuverlässig bekannte Daten berücksichtigt, nämlich die Randspannungen $\mathbf{s}$ auf der Randfläche Σ des Gletschers, welche aus seiner freien Oberfläche und seiner Grenzfläche in stehenden Gewässern besteht. Die Randspannungen an der freien Oberfläche verschwinden und die Randspannungen in stehenden Gewässern sind durch den hydrostatischen Druck $\tilde{p}$ gegeben, der entgegengesetzt zum nach außen gerichteten Normalenvektor $\mathbf{n}$ der Fläche Σ wirkt [(2.17)]. Der Luftdruck wird vernachlässigt[7].

Die allgemeine Lösung $\mathbf{S}$ der Balance- und Randbedingungen [(2.14)–(2.16)] kann durch Subtraktion irgend einer speziellen Lösung $\mathbf{S}_{\text{bal}}$[8] der Balancebedingungen [(2.18), (2.19)] in die allgemeine gewichtslose Lösung $\mathbf{T}$ [(2.20)] der einfacheren Balance- und Randbedingungen [(2.21)–(2.23)] für gewichtslose Spannungstensorfelder transformiert werden. Die Spannungstensorfelder $\mathbf{T}$ werden als „gewichtslos" bezeichnet, weil in der entsprechenden Balancebedingung [(2.21)] für $\mathbf{T}$ das spezifische Eisgewicht $\rho\mathbf{g}$ nicht auftritt, im Gegensatz zur entsprechenden Balancebedingung [(2.14)] für $\mathbf{S}$[9]. Die Randspannungen $\mathbf{t}$ der gewichtslosen Spannungstensorfelder $\mathbf{T}$ auf der Randfläche Σ sind die Differenz [(2.24)] aus den bekannten Randspannungen $\mathbf{s}$ sowie den Randspannungen des

[5] Statt der Momente $\mathbf{M}_\omega$ (2.6) in den Bereichen ω könnte man auch die Vektoren $\mathbf{c}_\omega$ (2.7) vom Koordinatenursprung zu den Massenschwerpunkten verwenden. Es ist jedoch einfacher, mit diesen Momenten zu arbeiten, da sie sich bei Gebietserweiterungen addieren, die Schwerpunktsvektoren dagegen nicht. Diese Momente $\mathbf{M}_\omega$ (2.6) und auch die Schwerpunktsvektoren $\mathbf{c}_\omega$ (2.7) hängen von der Position des Koordinatenursprungs ab.

[6] Es bezeichnen div $\mathbf{S}$ (13.8) die zeilenweise gebildete Divergenz des Tensorfeldes $\mathbf{S}$, $\not{\mathbf{S}}$ (12.11) das zum schiefsymmetrischen Anteil von $\mathbf{S}$ gehörende Vektorfeld. Bei der Balancebedingung für die Drehmomente schreibt man $\mathbf{r} \times \mathbf{S}\mathbf{n}$ als $\not{\mathbf{r}}\mathbf{S}\mathbf{n}$ und formt die Divergenz von $\not{\mathbf{r}}\mathbf{S}$ gemäß (13.21) um.

[7] Der Luftdruck bewirkt gemäß Archimedischem Prinzip eine Gewichtsverminderung des Eises durch Auftrieb, die dadurch berücksichtigt werden kann, dass die Größe ρ in den Berechnungen nicht als Eisdichte interpretiert wird, sondern als Differenz aus Eisdichte und Luftdichte. Diese Änderung liegt jedoch im Promillebereich und wird daher vernachlässigt.

[8] Für die Darlegungen in diesem Kapitel genügt die Information, dass $\mathbf{S}_{\text{bal}}$ die Balancebedingungen (2.18), (2.19) erfüllt, die Lösung selbst braucht nicht bekannt zu sein. In Kap. 5 wird eine solche Lösung konstruiert.

[9] Es handelt sich bei $\mathbf{T}$ genauer gesagt um Spannungstensorfelder in fiktiven, gewichtslosen Medien. Die gewählte Bezeichnung „gewichtslose Spannungstensorfelder" ist etwas ungenau, aber nicht so umständlich.

Tensorfeldes $\mathbf{S}_{\text{bal}}$ und sind damit ebenfalls bekannt. Durch Umwandlung der lokalen Balancebedingungen (2.21), (2.22) für gewichtslose Spannungstensorfelder $\mathbf{T}$ in ihre integralen Formen (2.25), (2.26) wird deutlich, dass gewichtslose Spannungstensorfelder $\mathbf{T}$ auf orientierten, geschlossenen Flächen keine resultierenden Kräfte und Drehmomente erzeugen, da die Bereiche, welche von diesen Flächen eingeschlossen werden, gewichtslos sind und somit keine Beiträge liefern.

$$\rho \cdot \mathbf{g} \cdot dV \tag{2.1}$$

$$\mathbf{Sn} \cdot dA \tag{2.2}$$

$$\mathbf{r} \times \rho \cdot \mathbf{g} \cdot dV \tag{2.3}$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{Sn} \cdot dA \tag{2.4}$$

***

$$m_\omega \overset{\text{def.}}{=} \int\limits_\omega \rho \cdot dV \tag{2.5}$$

$$\mathbf{M}_\omega \overset{\text{def.}}{=} \int\limits_\omega \mathbf{r}\rho \cdot dV \tag{2.6}$$

$$\mathbf{c}_\omega \overset{\text{def.}}{=} \frac{\mathbf{M}_\omega}{m_\omega} \tag{2.7}$$

***

$$\oint\limits_{\partial\omega} \mathbf{Sn} \cdot dA + \underbrace{\int\limits_\omega \rho \cdot \mathbf{g} \cdot dV}_{m_\omega \mathbf{g}} = 0; \qquad \omega \overset{\text{vor.}}{\subseteq} \Omega \tag{2.8}$$

$$\oint\limits_{\partial\omega} \mathbf{r} \times \mathbf{Sn} \cdot dA + \underbrace{\int\limits_\omega \rho \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{g} \cdot dV}_{\mathbf{M}_\omega \times \mathbf{g} = \mathbf{c}_\omega \times m_\omega \mathbf{g}} = 0; \qquad \omega \overset{\text{vor.}}{\subseteq} \Omega \tag{2.9}$$

$$\oint_{\partial\omega} \mathbf{S}\mathbf{n} \cdot dA \overset{\text{id.}}{=} \int_{\omega} \operatorname{div} \mathbf{S} \cdot dV \tag{2.10}$$

$$\oint_{\partial\omega} \mathbf{r} \times \mathbf{S}\mathbf{n} \cdot dA \overset{\text{id.}}{=} \int_{\omega} [\mathbf{r} \times \operatorname{div} \mathbf{S} + 2 \cdot \not{\mathbf{S}}] \cdot dV \tag{2.11}$$

$$\int_{\omega} (\operatorname{div} \mathbf{S} + \rho\mathbf{g}) \cdot dV = \mathbf{0}; \qquad \omega \overset{\text{vor.}}{\subseteq} \Omega \tag{2.12}$$

$$\int_{\omega} [\mathbf{r} \times (\operatorname{div} \mathbf{S} + \rho\mathbf{g}) + 2 \cdot \not{\mathbf{S}}] \cdot dV = \mathbf{0}; \qquad \omega \overset{\text{vor.}}{\subseteq} \Omega \tag{2.13}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \rho\mathbf{g} = \mathbf{0} \tag{2.14}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T \tag{2.15}$$

$$\mathbf{S}|_{\Sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{s} \tag{2.16}$$

$$\mathbf{s} \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} \mathbf{0} & \text{an freien Oberflächen} \\ -\tilde{p} \cdot \mathbf{n} & \text{in stehenden Gewässern} \end{cases} \tag{2.17}$$

***

$$\operatorname{div} \mathbf{S}_{\text{bal}} + \rho\mathbf{g} = \mathbf{0} \tag{2.18}$$

$$\mathbf{S}_{\text{bal}} = \mathbf{S}_{\text{bal}}^T \tag{2.19}$$

$$\mathbf{T} \overset{\text{def.}}{=} \mathbf{S} - \mathbf{S}_{\text{bal}} \tag{2.20}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \mathbf{0} \tag{2.21}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \tag{2.22}$$

$$\mathbf{T}|_{\Sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \tag{2.23}$$

$$\mathbf{t} \overset{\text{def.}}{=} \mathbf{s} - \mathbf{S}_{\text{bal}}|_{\Sigma} \cdot \mathbf{n} \tag{2.24}$$

$$\oint_{\partial\omega} \mathbf{Tn} \cdot dA = \mathbf{0}; \qquad \omega \overset{\text{vor.}}{\subseteq} \Omega \tag{2.25}$$

$$\oint_{\partial\omega} \mathbf{r} \times \mathbf{Tn} \cdot dA = \mathbf{0}; \qquad \omega \overset{\text{vor.}}{\subseteq} \Omega \tag{2.26}$$

Integraloperatoren

3

3.1 Beispiel, allgemeine Eigenschaften und minimale Modelle

Im Vergleich zu konventionellen Integralen lassen sich mit Integraloperatoren Formeln übersichtlicher gestalten und Berechnungen leichter durchführen.

Diese Vorteile der Integraloperatoren sollen an einem typischen Beispiel demonstriert werden. Eine Funktion f wird über einen Pfad integriert, der von einem Punkt im Gletscher in z-Richtung an seine freie Oberfläche führt. Am Ergebnis ändert sich nichts, wenn diese Funktion f oberhalb der freien Oberfläche verschwindet (3.1) und man die Integration bis ins Unendliche fortsetzt (3.2). Kehrt man das Vorzeichen um, so erhält man eine Rechenoperation (3.3), die invers zur Differentiation ist und deshalb durch ∂_z^{-1} symbolisiert wird[1]. Dieser Integraloperator ∂_z^{-1} ist mit allen Differentialoperatoren vertauschbar (3.4) und seine Multiplikation mit dem Differentialoperator ∂_z ergibt 1 (3.5). Die wiederholte Anwendung dieses Integraloperators ∂_z^{-1} kann als negative Potenz des Differentialoperators ∂_z definiert werden (3.6), so dass alle ganzzahligen Potenzen des Differentialoperators ∂_z erklärt sind, wobei die nullte Potenz, wie üblich, gleich 1 sein soll (3.7). Für die Multiplikation dieser ganzzahligen Potenzen gelten die bekannten Rechenregeln (3.8). Diese Vertauschungs- (3.4) und Potenzregeln (3.8) für die Integraloperatoren erleichtern das Rechnen ganz besonders, im Gegensatz zu der schwerfälligen Form (3.9) der Vertauschungsregeln und der noch umständlicheren Form der Potenzregeln in konventioneller Schreibweise.

Um die Äquivalenz zwischen den Vertauschungsregeln (3.4) für den Integraloperator ∂_z^{-1} und den konventionellen Vertauschungsregeln (3.9) zu demonstrieren, schreibt man die Funktion f als Produkt (3.10) aus einer Funktion f_c und einer Sprungfunktion. Die Funktion f_c ist überall stetig und differenzierbar und stimmt im Gletscherbereich mit der Funktion f überein. Die Sprungfunktion verschwindet oberhalb der freien Oberfläche und

[1] Der Differentialoperator ∂_z ist invertierbar, weil nur Funktionen zugelassen sind, die oberhalb der freien Oberfläche verschwinden, wodurch die Integrationskonstante festgelegt ist.

P. Halfar, *Spannungen in Gletschern*, DOI 10.1007/978-3-662-48022-9_3