

Wolfgang H. Müller
Ferdinand Ferber

Inklusive CD
mit Schnelltests u. v. a.

Übungsaufgaben zur Technischen Mechanik

Mit ausführlichen
Lösungen



3., neu bearbeitete Auflage



HANSER

Müller/Ferber
Übungsaufgaben zur
Technischen Mechanik



Wolfgang H. Müller
Ferdinand Ferber

Übungsaufgaben zur Technischen Mechanik

3., neu bearbeitete Auflage

Mit zahlreichen Bildern sowie einer CD-ROM



Fachbuchverlag Leipzig
im Carl Hanser Verlag

Prof. Dr. rer. nat. habil. Wolfgang H. Müller

Technische Universität Berlin, Institut für Mechanik
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie

PD Dr.-Ing. habil. Ferdinand Ferber

Universität Paderborn, Fakultät für Maschinenbau
Lehrstuhl für Technische Mechanik



Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-446-44542-0

E-Book-ISBN 978-3-446-44555-0

Alle in diesem Buch enthaltenen Programme, Verfahren und Bilder wurden nach bestem Wissen erstellt und mit Sorgfalt getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund ist das im vorliegenden Buch enthaltene Programm-Material mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autoren und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Art aus der Benutzung dieses Programm-Materials oder Teilen davon entsteht.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung des Buches oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag

© 2015 Carl Hanser Verlag München

www.hanser-fachbuch.de

Druck und Bindung: Hubert & Co, Göttingen

Printed in Germany

Vorwort

*L'exemple est un dangereux leurre;
Où la guêpe a passé, le moucheron de-
meure.*

Jean DE LA FONTAINE (1621-1695) in 'Fables (II, XVI)'

Diese Aufgabensammlung soll das Lehrbuch *Technische Mechanik für Ingenieure* ergänzen und den Studenten Übungsmaterial bereitstellen, um den zu den jeweiligen Kapiteln gehörigen Stoff unmittelbar zu vertiefen. Die Übungen sind parallel zu unseren Vorlesungen an der Universität Paderborn, der Heriot-Watt University in Edinburgh und an der Technischen Universität Berlin entstanden. Insbesondere gehen die Aufgaben zu den Kapiteln 3 bis 10 auf Notizen und Vorlesungen von Herrn Professor Helmut Wild, Paderborn, zurück, dem wir für seine Anregungen herzlich danken. Weiterhin gebührt Herrn Kollegen Prof. Dr.-Ing. Albert Duda Dank für eine erste Durchsicht des Manuskripts und viele Verbesserungsvorschläge.

Vom Stoffumfang her sind unsere Übungen auf zwei Semesterwochenstunden ausgelegt. Sicherlich werden sich bei Verwendung der Aufgaben in der täglichen Lehre viele weitere Wünsche einstellen. Zum Beispiel haben wir es in dieser Auflage des Übungsbuches versäumt, Aufgaben zum Thema D'ALEMBERTSche und LAGRANGESche Mechanik bereitzustellen. In diesem Zusammenhang können wir vorläufig nur empfehlen, die mit dem NEWTONSchen Konzept ausführlich bearbeiteten Aufgaben der Kapitel 14 und 15 mit diesen Methoden entsprechend durchzurechnen und die präsentierte Lösung unter anderen Gesichtspunkten wiederzuentdecken. Ferner sind manche Abschnitte im Moment etwas unterbesetzt, wie zum Beispiel die Kapitel 11 bis 13, also die Themen Knickstab und Punktkinematik und – kinetik. Unser Ziel ist es, während der kommenden Semester hierzu im Stil des Buches weitere ausgearbeitete Aufgaben auf unserer webpage anzubieten: <http://mechanik.tu-berlin.de/mueller/lehre.htm>. Hier werden wir auch über die zu erwartenden Druckfehler berichten und Informationen in Form einer permanent zu aktualisierenden Errataliste anbieten.

Wir wurden auch mehrfach darauf angesprochen, warum wir unsere Leser denn duzen. Darauf ist zu erwidern, dass selbst wenn wir dies täten, es keineswegs diminutiv, deklassierend oder gar kommunistisch-klassenkämpferisch gemeint wäre. Vielmehr jedoch gebrauchen wir Ausdrücke wie „Stelle auf“, „Erarbeite“, etc. im Sinne eines kategorischen Imperativs und meinen eigentlich „Man stelle auf“, „Man erarbeite“. Um vorzubeugen: Letztere Erklärung ist durchaus im nicht-antifeministischen Sinne zu verstehen!

Abschließend bedanken wir uns herzlich für die angenehme Zusammenarbeit mit Herrn Dipl.-Phys. Jochen Horn vom Carl Hanser Verlag, der das Werden dieses Buches aufmerksam begleitet hat und mit Rat und Tat stets aktiv und äußerst hilfreich zur Seite stand.

Wolfgang H. Müller und Ferdinand Ferber im Sommer 2004

Vorwort zur 2. Auflage

... deinde quia longum iter est per praecepta, breve et efficax per exempla.

Lucius Annaeus SENECA (1-65) in ‘Epistulae morales ad Lucilium (I, VI [5])’

Nachdem wir unser Lehrbuch der modularen Struktur angepasst haben, war eine entsprechende Korrektur des Aufgabenbuches überfällig. Diese Lücke haben wir hiermit geschlossen. Parallel zum Lehrbuch findet man in fünf Kapiteln gegliedert Aufgaben zu den an der Technischen Universität Berlin für die Studierenden der Ingenieurwissenschaften angebotenen Modulen Statik, Festigkeitslehre, Dynamik, Kontinuumsmechanik und Energiemethoden.

Weiterhin wurden die Aufgaben thematisch nach den im Kapitel jeweils folgenden Unterpunkten sortiert. Wir stellen nicht ohne Stolz fest, dass zu jedem Unterkapitel Übungsaufgaben bereitstehen. Außerdem ist zu vermelden, dass im Rahmen der beiliegenden CD dem starken Wunsch der Studierenden Rechnung getragen wurde, sog. „Quickies“ üben zu können. Diese Kurz- oder auch Theoriefragen stellen erfahrungsgemäß in der Klausur eine sehr große Hürde dar und werden, obwohl sie es nach überlegtem Studium des Lehrbuches nicht sein sollten, als extrem schwierig empfunden. Entsprechend groß ist die Furcht, sich nicht darauf vorbereiten zu können. Dieses wird nun möglich.

Abschließend gilt unser Dank noch allen unseren studentischen Helfern, nämlich den Damen und Herren cand.-ing. Matti Blume, Claudia Gertheinrich, Stefan Jannikoy, Anna Japs, Saskia Krech, Felix-Joachim Müller, den wissenschaftlichen Mitarbeitern Dipl.-Ing.’s Emek Abali, Andreas Brandmair und Holger Worrack, Herrn Dipl.-Ing. Guido Harneit für die Rechneradministration und Softwareunterstützung sowie – wie immer last but not least – Herrn Dipl.-Phys. Jochen Horn vom Carl Hanser Verlag.

Wolfgang H. Müller und Ferdinand Ferber im Juli 2009

Vorwort zur 3. Auflage

Книги читай, однако помни — книга книгой, а своим мозгом двигай!

Максим Горький (1868-1936)

In der vorliegenden 3. Auflage unseres Aufgabenbuches haben wir zunächst einmal versucht, alle durch Assistenten und Studenten bisher gefundenen Druck- und Rechenfehler auszumerzen. Es ist zu vermuten, dass trotz dieser Anstrengung nicht alle beseitigt wurden. Darüber hinaus haben wir uns sehr bemüht, neue Fehler einzubauen, denn insbesondere zu den Kapiteln über Kontinuumsmechanik und Energiemethoden sind weitere Aufgaben hinzugekommen. Folglich gilt es das obige Zitat zu beherzigen und selber zu denken, denn nur selber rechnen macht schlau, und man soll ja nicht alles glauben, was in den Büchern steht.

Für die Mitarbeit an der neuen Auflage möchten wir Assistenten und studentischen Hilfskräften danken, insbesondere den Herren Dr.-Ing. B. Emek Abali, Matti Blume, Anton Köllner, M.Eng. (Hons) und Felix Reich, M.Sc. und Herrn Dipl.-Ing. Guido Harneit für die Rechneradministration und Softwareunterstützung. Für viel Verständnis und Geduld während der Anfertigung dieses Buches ist außerdem Frau Ute Eckardt vom Hanser Verlag Dank zu sagen.

Wolfgang H. Müller und Ferdinand Ferber im Juli 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Statik	1
1.1	Grundbegriffe	1
1.1.1	Einordnung und Gliederung der Mechanik	1
1.1.2	Zum Kraftbegriff	2
1.1.3	Einteilung der Kräfte	3
1.1.4	Das Schnitt- und Wechselwirkungsprinzip	4
1.2	Kräfte in einem Angriffspunkt	4
1.2.1	Lineare Gleichungssysteme und zugehörige Lösungsverfahren	4
1.2.2	Trigonometrisches Grundwissen	9
1.2.3	Ein zentrales Kräftesystem: Pendelstützen mit im Knoten angreifenden Lasten	10
1.2.4	Zentrale Kräftegruppe: Eine Öse	13
1.2.5	Zentrale Kräftegruppe an der Umlenkrolle	14
1.2.6	Zentrale Kräftegruppe: Ozeandampfer im Schlepp	16
1.2.7	Gewichte an Pendelstützen mit angreifender Kraft	17
1.3	Allgemeine Kräftesysteme: Gleichgewicht des starren Körpers	18
1.3.1	Mehrscheibensystem unter Eigengewicht I	18
1.3.2	Mehrscheibensystem unter Eigengewicht II	20
1.3.3	Hebebühne unter äußerer Last	23
1.3.4	Dreidimensionales Stabwerk	25
1.3.5	Kräfte- und Momentengleichgewicht am Hebel	27
1.3.6	Statisch bestimmt gelagerte Platte	28
1.3.7	Hebel im mechanischen Gleichgewicht	31
1.3.8	Tetraeder unter externer Last	32
1.3.9	Allgemeine Kräftegruppe im Raum: Seiltrommel	34
1.4	Der Schwerpunkt	37
1.4.1	Grundwissen an Differenzial- und Integralrechnung	37
1.4.2	Berechnung der Schwerpunkte von Rotationskörpern mithilfe der 1. GULDINSchen Regel	42
1.4.3	Träger unter externen Lasten I	44
1.4.4	Träger unter externen Lasten II	46
1.4.5	Schwerpunkt eines asymmetrischen Trägerprofils	48
1.4.6	Berechnung der Oberfläche eines Rotationskörpers mithilfe der 2. GULDINSchen Regel	50

1.4.7	Lagerreaktionen am Balken unter Streckenlast	51
1.4.8	Tragwerk unter Dreieckslast.....	53
1.4.9	GERBER-Träger unter Punkt- und Gleichstreckenlast.....	54
1.4.10	Flächenmittelpunkt	56
1.4.11	Inhomogene Kreisscheibe mit Aussparung	58
1.4.12	Halbkreisscheibe mit rechteckiger Aussparung.....	60
1.5	Lager-, Trag- und Fachwerke	61
1.5.1	Stabkräfte in einem Baukran	61
1.5.2	Kräfte in einem Stabwerk	62
1.5.3	Belastetes Fachwerk	64
1.5.4	Fachwerkscheibe.....	67
1.5.5	Fachwerkrahmen mit an einem Seil hängender Last.....	68
1.6	Der biegesteife Träger	71
1.6.1	Schnittgrößen am eingespannten Träger unter Last I	71
1.6.2	Schnittgrößen am eingespannten Träger unter Last II.....	72
1.6.3	Schnittgrößen am gelenkig gelagerten Träger unter örtlich variabler Streckenlast I	75
1.6.4	Schnittgrößen am gelenkig gelagerten Träger unter örtlich variabler Streckenlast II.....	76
1.6.5	Schnittgrößen am abgeknickten Träger I.....	78
1.6.6	Schnittgrößen am abgeknickten Träger II	81
1.6.7	Schnittgrößen am gekrümmten Träger I.....	84
1.6.8	Balken mit Streckenlast I.....	86
1.6.9	Schnittgrößen am gekrümmten Träger II	89
1.6.10	Tragwerk mit Streckenlast I.....	90
1.6.11	Balken mit Streckenlast II	94
1.6.12	Tragwerk mit Streckenlast II	96
1.7	Reibungsphänomene	100
1.7.1	COULOMBSche Reibung zwischen Keil und Klotz.....	100
1.7.2	Reibung zwischen Leiter und Wand.....	102
1.7.3	Selbstsperrung durch Hebelwirkung.....	104
1.7.4	Malergüst	106
1.7.5	Vertikal verschiebbare Bühne zwischen zwei Wänden.....	108
1.7.6	Waschmaschinentrommel.....	109
2	Festigkeitslehre.....	112
2.1	Einführung, Begriffe	112

2.2 Zug- und Druckbeanspruchung	115
2.2.1 Parallelschaltung elastischer Stäbe.....	115
2.2.2 Verlängerung eines Drahtseils unter Eigengewicht	117
2.2.3 Zweifach eingespannter Stab	118
2.2.4 Thermospannungen in einem eingespannten Stab	119
2.2.5 Wärmespannungen in hintereinander geschalteten Stäben	120
2.2.6 Symmetrisch parallel geschaltete elastische Stäbe unter thermischer Last.....	122
2.2.7 Parallel geschaltete Stäbe unter thermischer Last.....	124
2.3 Schubbeanspruchung und HOOKEsches Gesetz	126
2.4 Biegebeanspruchung des Balkens.....	128
2.4.1 Flächenträgheitsmoment eines sechseckigen Stabquerschnitts.....	128
2.4.2 Flächenträgheitsmoment eines zusammengesetzten Trägerprofils	130
2.4.3 Spannungsnachweis eines Trägers unter schiefer Biegung.....	131
2.5 Schub infolge Querkraft beim Biegeträger	134
2.5.1 Spannungsnachweis für einen symmetrisch belasteten Träger mit Lamelle.....	134
2.5.2 Spannungsnachweis für einen Träger mit Lamelle	137
2.5.3 Spannungsnachweis für ein Kastenprofil.....	141
2.5.4 Spannungsnachweis für einen Doppel-T-Träger unter Querlast.....	144
2.5.5 Spannungsnachweis für eine Lasttraverse.....	146
2.6 Die elastische Linie des Biegeträgers (Biegelinie)	149
2.6.1 Durchbiegung des Mastes einer Windkraftanlage	149
2.6.2 Biegelinie eines beidseitig eingespannten Trägers.....	152
2.6.3 Durchbiegung eines abgestuften Trägers	156
2.7 Axiale Verdrehung/Torsion.....	159
2.7.1 Auslegung dreier Trägerprofile unter Torsion	159
2.7.2 Torsion rechteckiger Querschnitte	160
2.8 Zusammengesetzte Beanspruchung	161
2.8.1 Träger unter Biege- und Torsionsbelastung	161
2.8.2 Das Grundproblem des MOHRschen Spannungskreises.....	163
2.8.3 Scheibe im ebenen Spannungszustand.....	164
2.9 Stabilitätsprobleme	166
2.9.1 Auslegung auf gleiche Knicksicherheit.....	166
2.9.2 Gleiche Sicherheit zweier Knickstäbe.....	167
2.9.3 Auslegung auf vorgegebene Knicksicherheit.....	168

2.9.4	Hintereinandergeschaltete Knickstäbe.....	169
2.9.5	Die exakte Lösung des 1. EULER-Falls.....	171
3	Dynamik.....	176
3.1	Punktförmige Masse.....	176
3.1.1	Ein Marschflugkörper.....	176
3.1.2	Kinematik eines Massenschwerpunkts.....	178
3.1.3	Kinematik eines Zusammenstoßes.....	180
3.1.4	Kinematik kombinierter Bewegungen.....	181
3.1.5	Dynamik des Schleuderballs.....	182
3.1.6	Dynamik der Überschlagschiffschaukel.....	185
3.1.7	Die CORIOLIS-Kraft.....	188
3.1.8	Dynamik des Raketenschlittens im Looping.....	190
3.1.9	Gebremste Flugbewegung im Erdschwerefeld.....	197
3.1.10	Arbeit längs der schiefen Ebene.....	200
3.2	Die Dynamik von Massenpunktsystemen.....	206
3.2.1	Abbremsen eines Düsenjägers auf einem Flugzeugträger.....	206
3.2.2	Doppelter Flaschenzug vektoriell gerechnet.....	208
3.2.3	Fallendes Seil und fallende Kette.....	211
3.3	Die Dynamik des starren Körpers.....	214
3.3.1	Starrkörperkinematik.....	214
3.3.2	Starrkörperkinematik kommunizierender Walzen.....	216
3.3.3	Eine Hebevorrichtung.....	218
3.3.4	Eine beschwingte Schlittenfahrt.....	220
3.3.5	Ein Fallrad.....	221
3.3.6	Bewegung einer Tänzerwalze.....	222
3.3.7	Massenträgheitsmoment von Voll- und Hohlkugel.....	224
3.3.8	Die Bewegung des Rades oder die <i>Rota Aristotelis</i>	225
3.4	Schwingungen.....	230
3.4.1	Ein schwingfähiges Mehrkörpersystem.....	230
3.4.2	Das verstellbare Uhrpendel.....	231
3.4.3	Pendel mit Drehfeder.....	232
3.4.4	Passive Entstörung eines Messgeräts.....	233
3.4.5	Schwingungstilgung beim Zweimassenschwinger.....	235
3.4.6	Schwingender Starrkörper.....	236

4	Kontinuumsmechanik.....	238
4.1	Bilanzgleichungen der Masse.....	238
4.2	Bilanzgleichungen des Impulses	239
4.2.1	Spannungstensor und Fließspannung.....	239
4.2.2	Koordinatentransformationen.....	240
4.2.3	Hauptspannungen.....	242
4.2.4	Fließkriterium im Hauptspannungsraum.....	246
4.2.5	Die MOHRschen Kreise	248
4.2.6	EUKLIDische Transformationen.....	250
4.2.7	Invarianz der Bilanzgleichungen.....	254
4.3	Einfache Materialgleichungen	256
4.3.1	Die BERNOULLische Höhenformel	256
4.3.2	Kompressible Flüssigkeiten	257
4.3.3	Kompressibilität in Festkörpern.....	259
4.4	Bilanzgleichungen des Drehimpulses	260
4.4.1	Eigenschaften und Anwendungen des total antimetrischen Tensors ..	260
4.4.2	Der total antimetrische Tensor und seine Anwendung beim Spatprodukt	261
4.4.3	Der total antimetrische Tensor und seine Anwendung beim Doppelkreuzprodukt.....	262
4.4.4	Eine Anwendung des antimetrischen Tensors	263
4.5	Einführung in die lineare Elastizitätstheorie.....	265
4.5.1	Lösung der Schwingungsgleichung für eine Gitarrensaite	265
4.5.2	Balkenschwingung.....	268
4.5.3	Saitenschwingung.....	272
4.5.4	Scherung eines Klotzes aus linear-elastischem Material	274
4.6	Einführung in die Hydromechanik	276
4.6.1	Ein mit Wasser gefüllter Eimer in Rotation.....	276
4.6.2	Kommunizierende Röhren	278
4.6.3	COUETTE-Strömung.....	279
4.6.4	HAGEN-POISEUILLE-Strömung	281
5	Energiemethoden	282
5.1	Energiebilanz.....	282
5.1.1	Die Wärmeleitungsgleichung.....	282
5.1.2	Wärmeleitung in einem vorgewärmten Balken.....	283

5.1.3	Kolben im Schwerfeld	289
5.2	Entropiebilanz und zweiter Hauptsatz.....	292
5.2.1	Entropie des idealen Gases	292
5.2.2	Entropieproduktion beim fallenden Kolben	293
5.3	Die Sätze von CASTIGLIANO, BETTI und MAXWELL	295
5.3.1	Eine Anwendung des 1. Satzes von CASTIGLIANO I.....	295
5.3.2	Eine Anwendung des 1. Satzes von CASTIGLIANO II	297
5.3.3	Eine Anwendung des 1. Satzes von CASTIGLIANO III.....	299
5.3.4	Formänderungsenergie am Balken unter Querkraftsbelastung.....	301
5.3.5	Anwendung der Sätze von BETTI und MAXWELL auf statisch unbestimmte Systeme	303
5.4	Energiefunktionale und ihre Extrema.....	307
5.5	Das Prinzip der virtuellen Verschiebung (PdvV).....	310
5.5.1	Berechnung von Gleichgewichtslagen mithilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebung.....	310
5.5.2	Nürnberger Schere.....	312
5.5.3	Fachwerk.....	312
5.6	Das Prinzip der virtuellen Kräfte (PdvK).....	313
5.6.1	Anwendung des Prinzips der virtuellen Kraft in Fachwerken.....	313
5.6.2	Beispiel zum PdvK: Reine Normalkraftbelastung in Fachwerken....	315
5.6.3	Absenkung eines Punkts auf einem Balken auf zwei Stützen	317
5.6.4	Deformation in einem Viertelkreisbogen	319
5.6.5	Absenkung einer Kreiswelle.....	319
5.6.6	Behandlung eines einfach statisch unbestimmten Systems mithilfe des Prinzips der virtuellen Kraft	321
5.6.7	Zweifach statisch unbestimmter Träger unter Gleichstreckenlast....	324
5.7	Dynamische Energieprinzipie.....	326
5.7.1	Gedämpfte schwingende Walze	326
5.7.2	Gedämpftes Starrkörpersystem.....	329
5.7.3	Multistarrkörpersystem.....	331
	Stichwort- und Namensregister	334
	Hinweise zur beigefügten CD-ROM	339

1 Statik

1.1 Grundbegriffe

1.1.1 Einordnung und Gliederung der Mechanik

Problemstellung

Die Mechanik ist ein Teilgebiet der Physik, das mit der Entwicklung der Analytischen bzw. Rationalen Mechanik im letzten Jahrhundert einen gewissen Abschluss erreicht hat. Stelle die sogenannte **Analytische Mechanik** und die **ingenieurwissenschaftliche Mechanik** einander gegenüber und definiere die **Technische Mechanik**.

Lösung



Abb. 1.1.1: Die Mechanik als Teilgebiet der Physik.



Abb. 1.1.2: Fachliche Gliederung der Mechanik.

Einordnung und Gliederung der Mechanik

Aspekte einer technischen Konstruktion

Auswahl der verwendeten Materialien

z.B. Holz bricht leichter als Stahl
 Aluminium ist leichter als Eisen
 Kupfer verformt sich plastisch, Glas verformt sich kaum

Wichtig für den Ingenieur:
 Beurteilung des individuellen Charakters des
 verwendeten Werkstoffs

Solche Fragen behandelt die

Festigkeitslehre

hierbei werden die aus der Statik und Dynamik ermittelten
 Kräfte, in sogenannte Schnittkräfte, Spannungen und
 Verformungen eines Bauteils umgerechnet und mit
 kritischen Werkstoffkenngrößen verglichen

Abb. 1.1.3: Aspekte einer technischen Konstruktion.

1.1.2 Zum Kraftbegriff

Problemstellung

Die Kraft ist eine sogenannte primitive, d. h. ursprüngliche Größe. Erläutere anhand geeigneter Beispiele diese Behauptung.

Lösung

- Kraft ist das Resultat geistiger Abstraktion, basierend auf unserer täglichen Erfahrung.
- Kräfte lassen sich nicht unmittelbar beobachten.
- Die Wirkung der Kräfte lässt auf ihre Existenz schließen.



Abb. 1.1.4: Erfahrung und geistige Abstraktion lassen das Gefühl der Kraftwirkung aufkommen.



Abb. 1.1.5: Man kann Kräfte fühlen.



Abb. 1.1.6: Man kann Kräfte aufprägen.

1.1.3 Einteilung der Kräfte

Problemstellung

Wir teilen die Kräfte in die sogenannten **Einzelkräfte**, in **Linienkräfte** oder **Streckenlasten**, in **Volumenkräfte**, in **Oberflächenkräfte** und **eingeprägte Kräfte** ein. Erläutere diese Klassifikation anhand geeigneter Beispiele.

Lösung

Die folgenden Beispiele zeigen jeweils typische technische Problemstellungen, zu deren mathematischer Behandlung die genannten Kräftearten verwendet werden.

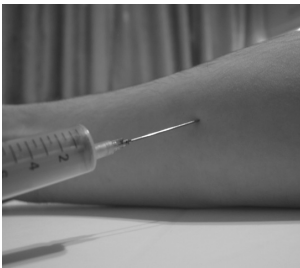


Abb. 1.1.7: Einzelkraft.



Abb. 1.1.8: Linienkraft oder Streckenlast.



Abb. 1.1.9: Volumenkraft.



Abb. 1.1.10: Oberflächenkraft (nach <http://www.talsperrenleitzentrale-ruhr.de>).

1.1.4 Das Schnitt- und Wechselwirkungsprinzip

Problemstellung

Freimachen bzw. Freischneiden bedeutet, dass die Reaktionskräfte in einem Körper dadurch sichtbar gemacht werden, dass man den Körper von seinen geometrischen Bindungen löst. Erläutere dieses Konzept anhand einfacher Beispiele.

Lösung

Die in der Mechanik überaus wichtige Technik des Freischnitts wird am folgenden Beispiel von Wilhelm BUSCH auf amüsante Weise verdeutlicht. Man beachte, dass BUSCH sich in seiner Jugend in Hannover als Maschinenbaustudent eingeschrieben hatte, diese Tätigkeit jedoch bald aufgab, um sich der Malerei und Dichtkunst zuzuwenden. Offenbar war der Freischnitt ihm zu diesem Zeitpunkt jedoch bereits vermittelt worden.

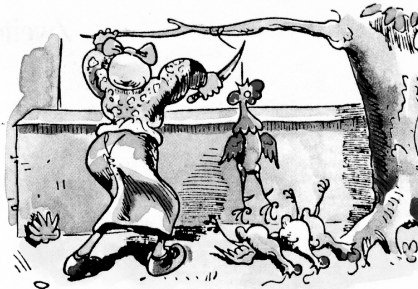


Abb. 1.1.11: Der Freischnitt.

1.2 Kräfte in einem Angriffspunkt

1.2.1 Lineare Gleichungssysteme und zugehörige Lösungsverfahren

Problemstellung

Benenne und diskutiere wichtige Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme und zeige ihre Bedeutung in der Technischen Mechanik anhand einfacher Beispiele auf.

Lösung

Bei der Bestimmung von Schnittgrößen (z. B. Lagerkräften und -momenten) ist es oft notwendig, lineare Gleichungssysteme zu lösen. Anders ausgedrückt sind besagte Schnittgrößen die Unbekannten, die als Funktion gegebener mechanischer Größen, wie eingepprägter Kräfte, Drehmomente oder Abmessungen, berechnet werden sollen. In dieser Übersichtsaufgabe wird an die gängigen Verfahren zum Lösen solcher linearen Gleichungssysteme erinnert. Für ein tiefer gehendes Studium bzw. für einen Beweis sei auf die einschlägigen Kapitel in Mathematiklehrbüchern verwiesen.

Zur allgemeinen Struktur eines linearen Gleichungssystems für zwei Unbekannte ist folgendes zu sagen. Gegeben sind die Größen a, b, c, d, A, B und gesucht sind x, y in den folgenden zwei Gleichungen:

$$ax + by = A, \quad cx + dy = B. \quad (1.2.1)$$

Gemäß den Regeln für das Rechnen mit Matrizen, kann man hierfür alternativ auch schreiben:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \quad (1.2.2)$$

Diese Darstellung hat den Vorteil, dass sie die gegebenen Größen, nämlich die aus den gegebenen Größen a, b, c, d bestehende 2×2 -**Koeffizientenmatrix**, die Spalte der **Unbekannten** x, y und die wiederum gegebene, aus A, B bestehende, sogenannte **rechte Seite**, sehr klar auseinander hält. Sie hat auch noch den weiteren Vorteil, dass das zugehörige Lösungsschema sich formal sehr einfach auf eine größere Anzahl von Unbekannten übertragen lässt. Doch davon gleich mehr. Wenn man weiß, wie man (zweireihige) Determinanten berechnet, dann findet man aus (1.2.2) sofort die Lösung:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} A & b \\ B & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{Ad - Bb}{ad - bc}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & A \\ c & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{Ba - Ac}{ad - bc}. \quad (1.2.3)$$

Die Determinante der Koeffizientenmatrix steht also jeweils im Nenner, und im Zähler wurde zur Bestimmung der n -ten Unbekannten in der n -ten Spalte der Koeffizientenmatrix die rechte Seite eingesetzt. Für diejenigen, die sich in der Berechnung von Determinanten noch nicht gut auskennen, ist die explizite Lösung in obiger Gleichung ebenfalls mit angegeben. Die Verallgemeinerung auf mehr als zwei Unbekannte $x_i, i=1, \dots, N$, $N=1, 2, 3, \dots$ gelingt wie folgt:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j = A_i, \quad i=1, \dots, N \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix}, \quad (1.2.4)$$

wobei das quadratische Zahlenschema a_{ij} sowie die rechte Seite A_i gegeben sind und alle x_j durch eben diese Größen berechnet werden sollen. Die Lösung ausgedrückt durch n -reihige Determinanten lautet:

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & A_1 & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & \dots & A_2 & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & \dots & A_N & \dots & a_{NN} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{Nj} & \dots & a_{NN} \end{vmatrix}}, \quad j=1, \dots, N. \quad (1.2.5)$$

Man muss zur Bestimmung der j -ten Unbekannten also lediglich in der Determinante der Koeffizientenmatrix an der gleichnamigen Spalte die rechte Seite einsetzen und danach durch die Determinante besagter Koeffizientenmatrix teilen. Dies ist die sogenannte

CRAMERSche Regel. Bevor wir uns mit alternativen Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme beschäftigen, soll die angegebene allgemeine Lösungsmethode am Beispiel eines einfachen Stabwerkes illustriert werden. Für das in Abb. 1.2.1 gezeichnete Stabwerk ist die allgemeine Lösung für die Stabkräfte mithilfe einer zweireihigen Determinante gesucht. Zuerst werden die Gleichgewichtsbedingungen in Bezug auf das dargestellte kartesische Koordinatensystem aufgestellt:

$$\sum F_x = 0: F_{Ax} + F_{Bx} + F = 0, \quad \sum F_y = 0: F_{Ay} - F_{By} = 0. \quad (1.2.6)$$

Auf den ersten Blick scheint es so, als ob vier unbekannte Kraftgrößen zu bestimmen sind. Dies täuscht jedoch, denn die Stabkräfte müssen in Richtung der Stabachsen wirken, d. h., ihre Komponenten sind nicht unabhängig, und es gilt:

$$F_{Ax} = F_A \cos(\alpha), \quad F_{Ay} = F_A \sin(\alpha), \quad F_{Bx} = F_B \cos(\beta), \quad F_{By} = F_B \sin(\beta). \quad (1.2.7)$$

Damit lässt sich unser Gleichungssystem wie folgt umschreiben:

$$F_A \cos(\alpha) + F_B \cos(\beta) = -F, \quad F_A \sin(\alpha) - F_B \sin(\beta) = 0. \quad (1.2.8)$$

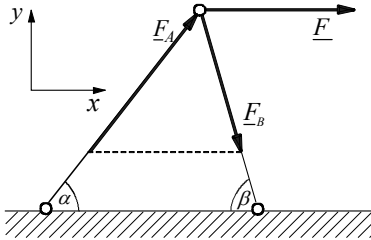


Abb. 1.2.1: Pendelstützensystem unter äußerer Last.

Einsetzen des linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten in die Lösung (1.2.3) führt auf die gesuchten Stabkräfte:

$$F_A = \frac{\begin{vmatrix} -F & \cos(\beta) \\ 0 & -\sin(\beta) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\beta) \\ \sin(\alpha) & -\sin(\beta) \end{vmatrix}} = -\frac{F \sin(\beta)}{\cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta)}, \quad (1.2.9)$$

$$F_B = \frac{\begin{vmatrix} \cos(\alpha) & -F \\ \sin(\alpha) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\beta) \\ \sin(\alpha) & -\sin(\beta) \end{vmatrix}} = -\frac{F \sin(\alpha)}{\cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta)}.$$

Die CRAMERSche Formel hat den Nachteil, etwas abstrakt zu sein, und setzt die Kenntnis von Determinanten voraus. Man muss sie jedoch nicht zwingend zur Lösung von linearen Gleichungen verwenden. Alternativ sind folgende **Lösungsmethoden** für lineare Gleichungssysteme zu nennen:

- Additionsverfahren
- Einsetzverfahren
- Gleichsetzungsverfahren
- Graphische Verfahren

In unserem Überblick beginnen wir mit dem **Additionsverfahren**, das wiederum am einfachsten Fall des Systems (1.2.1/2) erläutert wird. Der Trick besteht darin, durch Multipli-

kation einer Gleichung mit einem geeigneten Faktor und anschließender Addition beider Gleichungen, eine der Unbekannten zu eliminieren:

$$\left. \begin{array}{l} a x + b y = A \\ c x + d y = B \end{array} \right\} \cdot \left(-\frac{a}{c} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a x + b y = A \\ -a x - \frac{d a}{c} y = -\frac{a B}{c} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad (1.2.10)$$

$$y \left(b - \frac{d a}{c} \right) = A - \frac{a B}{c} \Rightarrow y = \frac{A c - B a}{b c - a d}.$$

Man setzt diese Lösung nun in eine der beiden ursprünglichen Gleichungen ein und ermittelt die verbliebene Unbekannte:

$$x = \frac{1}{a} (A - b y) = \frac{1}{a} \left(A - \frac{A b c - B a b}{b c - a d} \right) = \frac{B b - A d}{b c - a d}. \quad (1.2.11)$$

Als Nächstes diskutieren wir eine beliebige „Fußgängermethode“ zur Lösung linearer Gleichungssysteme, das **Einsetzverfahren**, bei dem eine Gleichung nach einer Unbekannten aufgelöst wird, die man dann in die verbliebenen Gleichungen einsetzt, und dies so lange wiederholt, bis nur noch eine Unbekannte übrigbleibt, nach der man umstellt:

$$a x + b y = A \Rightarrow x = \frac{1}{a} (A - b y), \quad (1.2.12)$$

$$c x + d y = B \Rightarrow \frac{c}{a} (A - b y) + d y = B \Rightarrow y = \frac{B a - A c}{a d - b c}, \quad x = \frac{B a - A c}{a d - b c}.$$

Es folgt das **Gleichsetzungsverfahren**, bei dem zunächst beide Gleichungen nach derselben Unbekannten aufgelöst werden. Beide Ergebnisse setzt man dann gleich, um daraus dann die verbliebene Unbekannte zu ermitteln. Bei mehr als zwei Unbekannten ist dies entsprechend zu wiederholen:

$$\left. \begin{array}{l} a x + b y = A \\ c x + d y = B \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{1}{a} (A - b y) \\ x = \frac{1}{c} (B - d y) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{a} (A - b y) = \frac{1}{c} (B - d y) \Rightarrow \quad (1.2.13)$$

$$y = \frac{B a - A c}{a d - b c}, \quad x = \frac{B a - A c}{a d - b c}.$$

Zum Schluss folgen **graphische Verfahren**, die eine recht anschauliche Interpretation der Lösung von Gleichungssystemen zulassen, allerdings nur in zwei Dimensionen, d.h. nur für zwei Unbekannte praktisch durchgeführt werden können. Man interpretiert die Gleichungen (1.2.1/2) einfach als Geradengleichungen in der Ebene:

$$\left. \begin{array}{l} a x + b y = A \\ c x + d y = B \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = -\frac{a}{b} x + \frac{A}{b} \\ y = -\frac{c}{d} x + \frac{B}{d} \end{array} \right\} \quad (1.2.14)$$

Je nach Größenverhältnissen der Steigungen a/b , c/d und der Achsenabschnitte A/b , B/d kann es nun geschehen, dass beide Geraden sich in einem Punkt schneiden (Abb. 1.2.2, erste und dritte Skizze), zusammenfallen (vierte Skizze) oder parallel zueinander sind (zweite Skizze), d. h., dass eine eindeutige, unendlich viele, oder keine Lösung existieren.

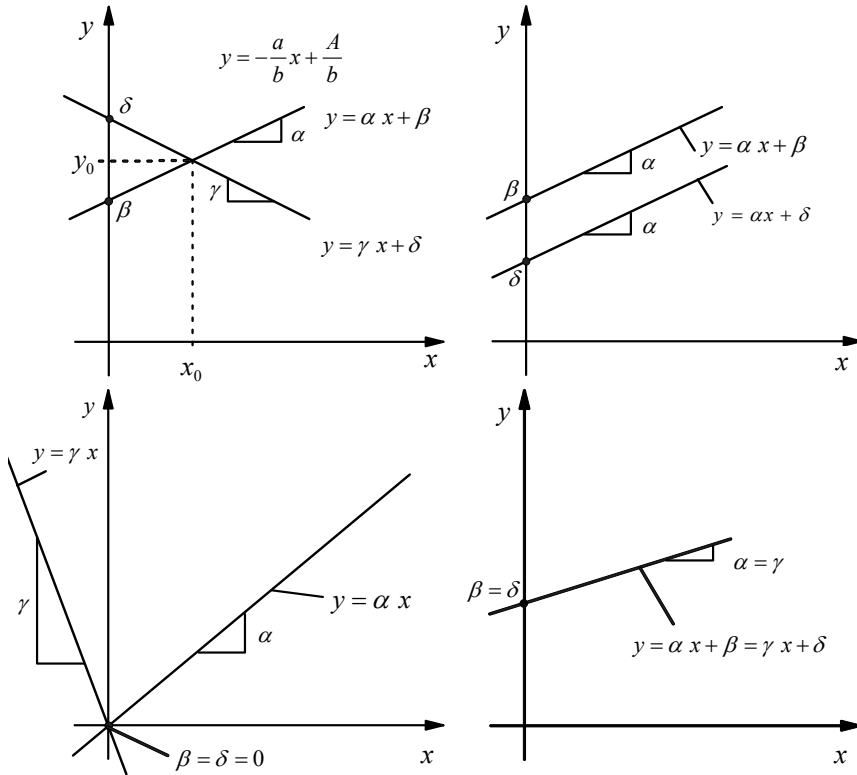


Abb. 1.2.2: Zur zeichnerischen Interpretation der Lösungsmenge zweier linearer Gleichungen.

Anders gesagt: Das lineare Gleichungssystem für zwei Unbekannte lässt sich anschaulich als Schnitt zweier Geraden in der (x, y) -Ebene interpretieren, die

- sich in einem Punkt schneiden (der Schnittpunkt repräsentiert die gesuchte Lösung (x_0, y_0));
- parallel zueinander sind (dann existiert keine Lösung);
- sich im Koordinatenursprung schneiden (in diesem Fall existiert nur die triviale Lösung $(x_0 = 0, y_0 = 0)$);
- aufeinander fallen. Dann existieren unendlich viele Lösungen und man spricht von linear abhängigen Gleichungen, die vielfache voneinander sind.

Damit wären wir bei einem weiteren Thema, nämlich der Existenz von Lösungen und der Eindeutigkeit derselben, wenn es sich um mehr als zwei Unbekannte handelt. Man kann zeigen, dass diese Frage mit dem Verschwinden der Nennerdeterminante aus der allgemeinen Lösung (1.2.5) zusammenhängt, denn möglicherweise wird die Lösung für verschwindenden Nenner singular. Zur genauen Beantwortung dieses Problems sei jedoch auf die mathematische Literatur verwiesen.

1.2.2 Trigonometrisches Grundwissen

Problemstellung

Wie sind die trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck definiert? Wie lautet der Sinus- und der Kosinussatz und wozu lassen sich beide vorzugsweise verwenden?

Lösung

Da es in der Technischen Mechanik um die zuverlässige Auslegung von Konstruktionen geht, spielt die Geometrie derselben eine wesentliche Rolle. Aber auch die Grundgröße der Mechanik, nämlich die Kraft, wird oft in bestimmten Richtungen in ihre Komponenten zerlegt. Bei der Rechnung wird daher immer wieder von geometrischen Grundregeln Gebrauch gemacht, die hier zusammengestellt werden. Wir betrachten zunächst den Fall eines rechtwinkligen Dreiecks (vgl. Abb. 1.2.3) und erinnern an Gleichungen wie den Lehrsatz des PYTHAGORAS:

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad (1.2.15)$$

an die Formel für die Fläche des **rechtwinkligen** Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} a b \quad (1.2.16)$$

und an die Definitionsgleichungen für die trigonometrischen Funktionen:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}, \quad \cos(\alpha) = \frac{b}{c}, \quad \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{b}. \quad (1.2.17)$$

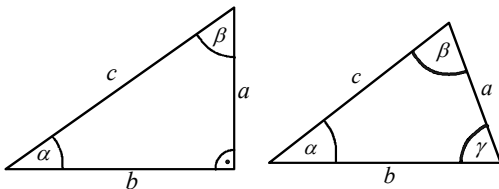


Abb. 1.2.3: Rechtwinkliges und beliebiges Dreieck mit Bezeichnungen.

Als Nächstes interessieren Beziehungen, die für ein **beliebiges** Dreieck gelten, wie der **Sinussatz**:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \quad (1.2.18)$$

und der **Kosinussatz**:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 a b \cos(\gamma). \quad (1.2.19)$$

Die Frage ist, wann der Sinus- und wann der Kosinussatz nutzbringend eingesetzt werden sollten. Aus Gleichung (1.2.19) erkennt man, dass der Kosinussatz von Vorteil ist, falls drei Seiten gegeben sind und ein Winkel gesucht ist, was in Abb. 1.2.4 links angedeutet ist:

$$\gamma = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 a b}\right). \quad (1.2.20)$$

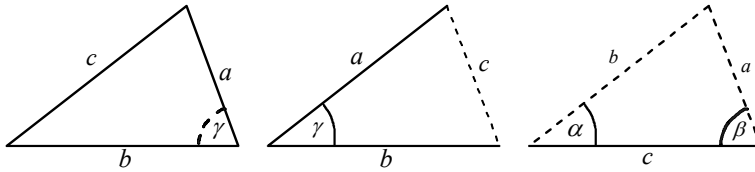


Abb. 1.2.4: Anwendungen des Sinus- und Kosinussatzes.

Auch hilft er weiter, wenn zwei Seiten zwischen einem Winkel gegeben sind und die dritte Seite gesucht ist (Abb. 1.2.4, Mitte):

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)}. \quad (1.2.21)$$

Hingegen ist der Sinussatz (1.2.18) von Vorteil, wenn eine Seite und zwei Winkel gegeben sind und die beiden anderen Seiten gesucht sind (Abb. 1.2.4, rechts):

$$a = c \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}, \quad b = c \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)}, \quad \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta. \quad (1.2.22)$$

1.2.3 Ein zentrales Kräftesystem: Pendelstützen mit im Knoten angreifenden Lasten

Problemstellung

Zwei Pendelstäbe werden im gemeinsamen Knoten durch die Kräfte F_1 bis F_4 , wie in der Abb. 1.2.5 dargestellt, belastet. Ermittle mithilfe der angegebenen Werte die in den Stäben wirkenden Kräfte. Dabei sind zeichnerische und rechnerische Lösungswege (Polygonzugsverfahren mit Dreiecksberechnung sowie Aufspalten der Kraftkomponenten in einem rechtwinkligen kartesischen System) zu üben. Gegeben sind: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 40^\circ$, $\delta = 60^\circ$, $\varepsilon = 30^\circ$, $|F_1| = 40 \text{ kN}$, $|F_2| = 30 \text{ kN}$, $|F_3| = 50 \text{ kN}$ und $|F_4| = 20 \text{ kN}$.

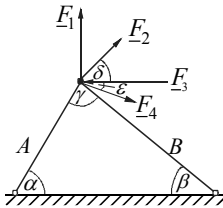


Abb. 1.2.5: Pendelstäbe unter am Knoten angreifenden Lasten.

Lösung

Bevor an die eigentliche Lösung des Problems gegangen wird, sei bemerkt, dass sich der noch fehlende Winkel γ aus der Winkelsumme am Dreieck bestimmen lässt:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 80^\circ. \quad (1.2.23)$$

Wir erläutern zuerst die **rein zeichnerische Lösung**, bei der es sich empfiehlt, das folgende Schema einzuhalten. Gemäß der Additionsregel für Vektoren bestimmt man als Erstes die Resultierende der Kräfte $F_1 - F_4$. Dies ist in Abb. 1.2.6 (links) qualitativ erläutert. Beachte, dass, wenn man sich einen Kräftemaßstab definiert und die vorgegebenen Kräfte und Winkel mit Geodreieck sauber einträgt, es ohne große Rechnung gelingt, die gesuch-

ten Stabkräfte abzulesen. Dabei ist wesentlich, die Resultierende \underline{F}_R in Richtung der Stabachsen A und B korrekt zu zerlegen. Das resultierende Kräfteck muss geschlossen sein (Kräftegleichgewicht). Hieraus lassen sich die Richtung und die Größe der Kräfte in den Stäben, also \underline{F}_A und \underline{F}_B , bestimmen (vom Knoten weg zeigende Kraft = Zugkraft, in den Knoten hinein zeigende Kraft = Druckkraft). Auch dies ist qualitativ in Abb. 1.2.6 (rechts) dargestellt.

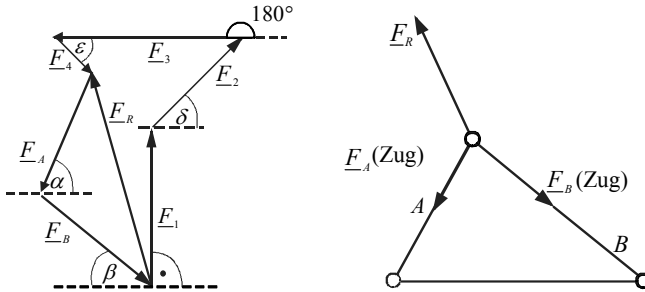


Abb. 1.2.6: Zur zeichnerischen Lösung des Problems.

Ein bei vielen angreifenden Kräften etwas mühseliger anzuwendendes rechnerisches Verfahren ist das **Polygonzugsverfahren**. Hierbei werden die Kräfte sukzessive zueinander addiert. Bei jedem Schritt wird also eine neue Dreiecksberechnung nötig. Im vorliegenden Fall ist wie folgt vorzugehen. Zunächst wird die aus den Kräften \underline{F}_1 und \underline{F}_2 resultierende Kraft \underline{F}_{12} bestimmt: Abb. 1.2.7 (erstes Bild).

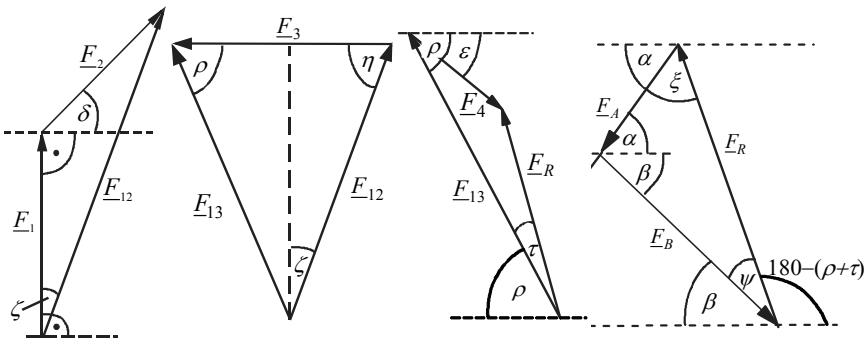


Abb. 1.2.7: Berechnung von Kraftgrößen per Dreieckskonstruktion.

Mit dem Kosinussatz ermittelt man ihre Länge:

$$|\underline{F}_{12}| = \sqrt{|\underline{F}_1|^2 + |\underline{F}_2|^2 - 2|\underline{F}_1||\underline{F}_2| \cos(90^\circ + \delta)} = 67,7 \text{ kN}, \quad (1.2.24)$$

und der Sinussatz hilft, den Richtungswinkel festzulegen:

$$\frac{|\underline{F}_2|}{\sin(\zeta)} = \frac{|\underline{F}_{12}|}{\sin(90^\circ + \delta)} \Rightarrow \sin(\zeta) = \frac{|\underline{F}_2|}{|\underline{F}_{12}|} \sin(90^\circ + \delta) \Rightarrow \zeta = 12,8^\circ. \quad (1.2.25)$$

Nun wird die resultierende Kraft \underline{F}_{13} aus den Kräften \underline{F}_{12} und \underline{F}_3 ermittelt: Abb. 1.2.7 (zweites Bild). Mit dem Kosinussatz ermittelt man wieder die Länge:

$$|\underline{F}_{13}| = \sqrt{|\underline{F}_{12}|^2 + |\underline{F}_3|^2 - 2|\underline{F}_{12}||\underline{F}_3| \cos(90^\circ - \zeta)} = 74,7 \text{ kN}, \quad (1.2.26)$$

und der Sinussatz hilft auch diesmal, den Richtungswinkel festzulegen:

$$\frac{|F_{13}|}{\sin(\eta)} = \frac{|F_{12}|}{\sin(\rho)} \Rightarrow \sin(\rho) = \frac{|F_{12}|}{|F_{13}|} \sin(90^\circ - \zeta) = 0,884 \Rightarrow \rho = 62,1^\circ. \quad (1.2.27)$$

Nun wird die Gesamterresultierende F_R ermittelt (vgl. Abb. 1.2.7, drittes Bild) und zwar wieder mit dem Kosinussatz:

$$|F_R| = \sqrt{|F_{13}|^2 + |F_4|^2 - 2|F_{13}||F_4| \cos(\rho - \varepsilon)} = 58,7 \text{ kN} \quad (1.2.28)$$

und dem Sinussatz:

$$\frac{|F_4|}{\sin(\tau)} = \frac{|F_R|}{\sin(\rho - \varepsilon)} \Rightarrow \sin(\tau) = \frac{|F_4|}{|F_R|} \sin(\rho - \varepsilon) \Rightarrow \tau = 10,4^\circ. \quad (1.2.29)$$

Nun werden in einem letzten Schritt die gesuchten Stabkräfte F_A und F_B ermittelt: Abb. 1.2.7 (viertes Bild). Es muss sich ein geschlossenes Kräfteck zwischen F_A , F_B und F_R ergeben, um Gleichgewicht zu garantieren. Das erklärt die gewählte Pfeilspitzenrichtung bei F_A und F_B . Zweimalige Anwendung des Sinussatzes liefert:

$$|F_A| = \frac{\sin(\psi)}{\sin(\alpha + \beta)} |F_R| = 32,0 \text{ kN}, \quad |F_B| = \frac{\sin(\xi)}{\sin(\alpha + \beta)} |F_R| = 43,9 \text{ kN}. \quad (1.2.30)$$

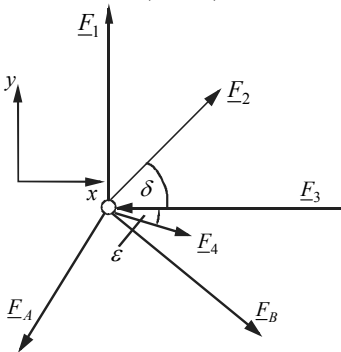


Abb. 1.2.8: Berechnung von Kraftgrößen mithilfe eines kartesischen Koordinatensystems.

Die wohl schlagkräftigste Methode zur rechnerischen Bestimmung von Kräften ist die Berechnung mithilfe eines kartesischen Koordinatensystems. Hierzu schneiden wir am Knoten frei, indem wir die beiden unbekanntes Stabkräfte F_A und F_B zusätzlich zu den vorgegebenen Kräften, wie in Abb. 1.2.8 gezeigt, ansetzen. Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen in x - und y -Richtung ergibt:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & F_2 \cos(\delta) + F_4 \cos(\varepsilon) - F_3 + F_B \cos(\beta) - F_A \cos(\alpha) = 0, \\ \sum F_y = 0: & F_2 \sin(\delta) - F_4 \sin(\varepsilon) + F_1 - F_B \sin(\beta) - F_A \sin(\alpha) = 0. \end{aligned} \quad (1.2.31)$$

Dies sind zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten, die wir per Einsetzungsverfahren auflösen, um folgendes Endergebnis zu erhalten:

$$F_A = 32,00 \text{ kN}, \quad F_B = 43,97 \text{ kN}. \quad (1.2.32)$$

1.2.4 Zentrale Kräftegruppe: Eine Öse

Problemstellung

An einer Öse greifen die Kräfte $F_1 = 2,5 \text{ kN}$ und $F_2 = 2,0 \text{ kN}$ an. Die Wirkungsrichtung der Kraft F_2 wird durch den Winkel $\beta = 30^\circ$ beschrieben. In welcher Richtung α muss die Kraft F_1 an der Öse angreifen, damit an der Belastungsstelle nur eine vertikale Kraft wirkt? Wie groß sind die Reaktionskräfte in der Öse?

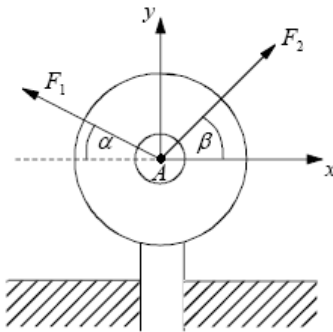


Abb. 1.2.9: Öse in der Wand.

Lösung

Die Lösung erfolgt in mehreren Schritten. Zunächst der Freischnitt. Er ist in Abb. 1.2.10 zu sehen. Die Öse wurde als zweiwertiges Lager interpretiert, und die dazugehörigen Freischnittkräfte wurden in ihrer Richtung willkürlich im Punkt A angetragen. Es handelt sich also in toto um eine zentrale Kräftegruppe, d. h. alle Kräfte gehen durch einen Punkt, und es gibt keine Momentenwirkung. Als nächstes wird der Freischnitt formelmäßig ausgewertet. Es muss Kräftegleichgewicht herrschen und die Summe aller Kräfte in horizontaler bzw. in vertikaler Richtung verschwinden:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & -F_1 \cos(\alpha) + F_2 \cos(\beta) + F_{Ax} = 0, \\ \sum F_y = 0: & F_1 \sin(\alpha) + F_2 \sin(\beta) - F_{Ay} = 0. \end{aligned} \quad (1.2.33)$$

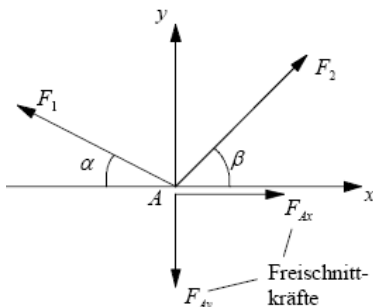


Abb. 1.2.10: Freischnitt.

Laut Aufgabenstellung ist gefordert, dass als Reaktion in der Öse nur vertikale Kräfte (also Kräfte in y -Richtung) wirken sollen, also:

$$F_{Ax} = 0. \quad (1.2.34)$$

Mithin folgt aus Gleichung (1.2.33)₁:

$$-F_1 \cos(\alpha) + F_2 \cos(\beta) = 0. \quad (1.2.35)$$

Wir berechnen nun den Neigungswinkel wie folgt (auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet):

$$\cos(\alpha) = \frac{F_2}{F_1} \cos(\beta) \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{F_2}{F_1} \cos(\beta)\right). \quad (1.2.36)$$

Hieraus ermitteln wir den Winkel im Bogenmaß sowie in Grad:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2\text{kN}}{2,5\text{kN}} \cos(30^\circ)\right) = \cos^{-1}(0,69) \approx 0,81 = 0,81 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 46^\circ. \quad (1.2.37)$$

Zum Abschluss wird noch die Reaktionskraft in y -Richtung mithilfe von Gleichung (1.2.33)₂ ermittelt:

$$F_{Ay} = F_1 \sin(\alpha) + F_2 \sin(\beta) = [2,5 \sin(46^\circ) + 2 \sin(30^\circ)] \text{ kN} = 2,8 \text{ kN}. \quad (1.2.38)$$

1.2.5 Zentrale Kräftegruppe an der Umlenkrolle

Problemstellung

Wie in der Abb. 1.2.11 zu sehen, wird ein Gewicht $G = 1 \text{ kN}$ an einem über eine Rolle gelegten Seil und zwei Pendelstützen (1 und 2) im Gleichgewicht gehalten. Mithilfe geeigneter Freischnitte und Gleichgewichtsbedingungen sind die Kräfte im Seil und in den Pendelstützen zu ermitteln. Die Gewichte der Rolle, der Stäbe und des Seils sollen in der Analyse vernachlässigt werden.

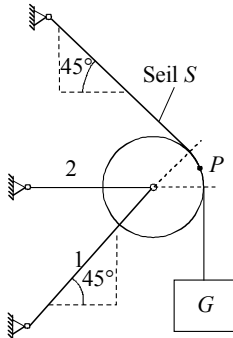


Abb. 1.2.11: Gewicht mit Seil über durch Pendelstützen gehaltener Umlenkrolle.

Lösung

Es werden zuerst sukzessive das Gewicht, das aufliegende Seil und die Rolle freigeschnitten: Abb. 1.2.12. Beim Seil ist zu beachten, dass die senkrecht zum Rollenrand stehenden Druckkräfte symmetrisch sind und im Punkte P zu einer dem Winkel $\alpha/2 = 45^\circ/2 = 22,5^\circ$ stehenden Gesamtnormalkraft zusammengefasst werden können: $\int_S p_N(s) ds = F_N$. Wäre

die Druckkraftverteilung nämlich nicht symmetrisch, so ergäbe sich ein Drehmoment, das die Rolle zum Drehen anregt, und gerade dieses soll ja nicht geschehen. Beim Freischnitt der Pendelstützen wurde angenommen, dass sie unter Zug stehen. Ob das so ist, wird die sich nun anschließende Rechnung über die Gleichgewichtsbedingungen zeigen. Da es sich bei allen drei freigeschnittenen Teilsystemen um zentrale Kräftegruppen handelt, genügt es, lediglich das Kräftegleichgewicht zu betrachten. Für das freigeschnittene Seil mit angehängtem Gewicht ergibt sich:

$$\sum F_y = 0: S - G = 0 \Rightarrow S = G. \quad (1.2.39)$$

Beim freigeschnittenen Seil gibt es zwei unabhängige Krafrichtungen:

$$\sum F_x = 0: -S' \cos(\alpha) + F_N \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0, \quad (1.2.40)$$

$$\sum F_y = 0: S' \sin(\alpha) + F_N \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - S = 0.$$

Wir multiplizieren die erste dieser Gleichungen mit $\sin(\alpha)$ und die zweite mit $\cos(\alpha)$. So dann werden beide Ergebnisse addiert, womit es gelingt, S' zu eliminieren. Es verbleibt:

$$F_N \left[\sin(\alpha) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos(\alpha) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] = S \cos(\alpha), \quad (1.2.41)$$

wofür man mit dem Additionstheorem:

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) = \sin(\alpha + \beta) \quad (1.2.42)$$

auch schreiben darf:

$$F_N = S \frac{\cos(\alpha)}{\sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right)} = G \frac{\cos(\alpha)}{\sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right)} = 0,765 G. \quad (1.2.43)$$

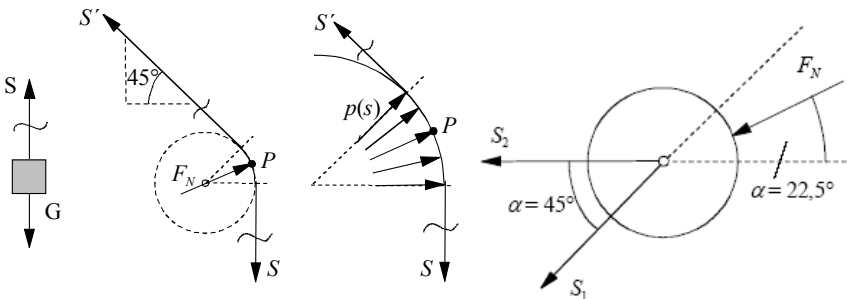


Abb. 1.2.12: Freischnitte am Gewicht, am Seil und an der Rolle.

Dieses Ergebnis wird nun in Gleichung (1.2.40)₁ eingesetzt, um die noch unbekannt Seilkraft S' zu errechnen. Man beachte, dass diese nicht gleich S angesetzt wurde. Dieses kommt nun heraus, und man darf sagen, dass an der reibungsfreien Rolle das Seil die Kraft einfach umlenkt:

$$S' = S \frac{\cos(\alpha) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right) \cos(\alpha)} = S. \quad (1.2.44)$$

Nun wenden wir uns noch der freigeschnittenen Rolle zu und finden, dass:

$$\sum F_x = 0: -S_2 - F_N \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - S_1 \cos(\alpha) = 0,$$

$$\sum F_y = 0: -S_1 \sin(\alpha) - F_N \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0. \quad (1.2.45)$$

Es gelingt hieraus, die Kräfte in den Pendelstützen zu ermitteln: