Martin Aigner · Ehrhard Behrends *Hrsg.*

Alles Mathematik

Von Pythagoras zu Big Data

4. Auflage

Springer Spektrum

Alles Mathematik

Martin Aigner · Ehrhard Behrends
Herausgeber

Alles Mathematik

Von Pythagoras zu Big Data

4., erweiterte Auflage

Springer Spektrum

Martin Aigner
Freie Universität Berlin
Berlin, Deutschland

Ehrhard Behrends
Freie Universität Berlin
Berlin, Deutschland

ISBN 978-3-658-09989-3 ISBN 978-3-658-09990-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-09990-9

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Einbandabbildung: Tobias Höllerer
Planung: Ulrike Schmickler-Hirzebruch
Textgestaltung: Christoph Eyrich

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Einleitung

Ein Blick in das Frühjahrsprogramm 1990 der Urania genügte, um festzustellen, dass diese traditionsreiche Berliner Bildungsstätte eine erstaunliche Breite an Themen aufwies: Frühgeschichte und aktuelle Politik, Geistes- und Naturwissenschaften, Dia-Vorträge über den Hindukusch und medizinische Vorsorgetipps – alle Gebiete waren vertreten. Alle bis auf eines: Es gab keinen einzigen Vortrag über Mathematik. Als wir im Mai 1990 mit dem Direktor der Urania darüber sprachen, wollten wir genau dies ändern und mit den gängigen Vorurteilen aufräumen: zu schwer, zu trocken, zu abstrakt, zu abgehoben. Ob uns dies gelungen ist, müssen die Zuhörer der mehr als 50 Urania-Vorträge über Mathematik seit dem Herbst 1990 entscheiden, und natürlich auch die Leser der Auswahl, die wir hier zusammengefasst haben.

In der Gliederung dieses Bandes haben uns zwei einfache Grundthesen geleitet. Erstens: Mathematik ist überall, ganz einfach, weil sie in vielen Fällen das (oft einzige) Mittel ist, die Probleme zu analysieren und zu verstehen. Vom CD-Player zur Börse, von der Computertomographie zur Verkehrsplanung – alles (auch) Mathematik. Zweitens ist Mathematik wie keine andere Wissenschaft zwei Seiten einer Medaille: einmal die reinste Wissenschaft – Denken als Kunst –, und andererseits die denkbar angewandteste und nützlichste. Das klingt nun ganz anders als das eingangs erwähnte Attribut: abstrakt und abgehoben. Aber hätten Sie gedacht, dass die Primzahlen, diese mysteriösen Zahlen, die seit der Antike die Mathematiker beschäftigt haben, heute ganz wesentlich zu unser aller Datensicherheit beitragen?

Diese beiden Aspekte entsprechen in unserem Buch den Teilen *Fallstudien* und *Der rote Faden*. Drittens wollten wir natürlich auch einige „heiße“ Themen und ganz aktuelle Entwicklungen wie die Lösung des Fermatschen Problemes aufnehmen oder die Börsenformel, für die es einen Nobelpreis gab. Und zusätzlich finden Sie zwei Beiträge über Mathematik und Musik, einen Prolog, geschrieben von einem Wissenschaftsjournalisten, und einen Epilog von einem Mathematiker-Philosophen.

Unser herzlicher Dank gilt allen Autoren für ihre Bereitschaft, einen mündlichen Vortrag auch noch in Schriftform zu bringen, was bekanntlich schwieriger ist als man anfangs glaubt. Dank auch an Frau Schmickler-Hirzebruch vom Vieweg-Verlag für das Interesse und die Unterstützung dieses Projektes, und vor allem an Christoph Eyrich für die kompetente technische Gestaltung des Buches. Uns haben die Vorträge und jetzt auch das Verfassen dieses Bandes Freude bereitet – genau dies wünschen wir auch unseren Lesern.

Berlin, im Juli 2000 *Martin Aigner · Ehrhard Behrends*

Einleitung zur zweiten Auflage

Die erste Auflage dieses Buches wurde sehr freundlich aufgenommen, und wir haben eine ganze Reihe von Kommentaren und Vorschlägen erhalten. In der jetzt vorliegenden Fassung haben wir die bisherigen Texte gründlich überarbeitet und außerdem drei neue Beiträge zu aktuellen Themen aufgenommen: Intelligente Materialien, Diskrete Tomographie und Spieltheorie.

Wir sind sicher, dass in diesen Kapiteln wieder Interessantes, Wissenswertes und vielleicht Überraschendes zu finden sein wird. Wir hoffen, dass unser Panorama aus klassischen und aktuellen Themen auch weiterhin die Leser davon überzeugen wird, dass (fast) „Alles Mathematik“ ist.

Berlin, im Juli 2002 *Martin Aigner · Ehrhard Behrends*

Einleitung zur dritten Auflage

Zum *Jahr der Mathematik 2008* gibt es die dritte Auflage von „Alles Mathematik“. Seit dem Erscheinen der zweiten Auflage sind viele weitere interessante Mathematikvorträge an der Urania gehalten worden, und einige haben wir ausgewählt, um das Spektrum der in diesem Buch behandelten Themen zu erweitern. Man kann sich nun auch über Klimamodelle (ein Artikel von R. Klein), die Poincarévermutung (K. Ecker), die Mathematik der Spiegelungen (J. Richter-Gebert) und den Zufall (E. Behrends) informieren, und Gero von Randow hat einen neuen Prolog beigesteuert. Bei der Gelegenheit haben wir außerdem die Autoren der schon in den früheren Auflagen enthaltenen Beiträge gebeten, ihre Artikel zu aktualisieren.

Wir wünschen unseren Lesern wieder viele spannende Stunden beim Entdecken der verschiedenen Facetten der Mathematik.

Berlin, im August 2008 *Martin Aigner · Ehrhard Behrends*

Einleitung zur vierten Auflage

Es ist nun schon 15 Jahre her, dass wir das Projekt „Alles Mathematik“ mit einer Sammlung von Vorträgen in der Berliner Urania starteten. Inzwischen ist es mit zwei weiteren Auflagen, einer Übersetzung ins Englische, vielen Vorschlägen und Zuschriften, freundlichen Rezensionen und weiteren interessanten Beiträgen ein Teil unseres mathematischen Lebens geworden. In der nun vorliegenden vierten Auflage gibt es neben Verbesserungen und Ergänzungen wieder eine Reihe von neuen Aufsätzen zu aktuellen Themen, die, wie wir hoffen, das Interesse der Leser finden werden. Zwei Beiträge, von Gitta Kutyniok und Tim Conrad, beschäftigen sich mit verschiedenen Aspekten von Big Data, und wie wir die Datenflut in den Griff bekommen können. Martin Henk und Günter Ziegler bzw. John Sullivan berichten über gelöste und (viele) ungelöste geometrische Probleme, die sich aus dem Studium von Packungen und der Kepler Vermutung bzw. von Clustern von Seifenkugeln ergeben. Ehrhard Behrends geht den Schwierigkeiten nach, ein allseits gerechtes Wahlverfahren (durch Mathematik) zu finden. Und schließlich ist es uns eine große Freude, zwei Gastbeiträge von Doron Zeilberger und Zvi Artstein zu präsentieren, die zum Nachdenken über die Zukunft der Mathematik in einer computerisierten Welt anregen wollen.

Mit herzlichem Dank an alle Autoren wünschen wir viele anregende Stunden und Vergnügen beim Lesen.

Berlin, im September 2015 *Martin Aigner · Ehrhard Behrends*

Inhalt

Prolog

Mathe wird Kult – Beschreibung einer Hoffnung

Gero von Randow

Es hat sich etwas geändert. Seit der vorigen Auflage dieses Buches wird die Mathematik populär. Kein peinliches Schweigen mehr, wenn jemand auf einer Party sagt, er sei Mathematiker, stattdessen Bewunderung. Das Kokettieren damit, von Mathe keine Ahnung zu haben, ist auch nicht mehr en vogue. Und dass Mathematiker verschrobene Käuze seien, dieses Vorurteil befindet gleichfalls auf dem Rückzug.

Woran mag das liegen?

Die Auseinandersetzung um PISA und die Folgen dürften dazu beigetragen haben. Die Erkenntnis greift um sich, dass all' die neuen Ideen und Dinge, unsere Gesellschaft zu einer Wissenschaftsgesellschaft machen, eine mathematische Seele haben, von der Klimasimulation über Internetsoftware bis zur Biotechnologie; ja, dass sogar die Globalisierung ein mathematisch getriebenes Phänomen ist, denn ihr Kern ist die Auflösung von Zeit und Raum durch computervermittelten Informations- und Kapitalverkehr.

Und zugleich haben es die Mathematiker selbst verstanden, unterstützt von journalistischen Sympathisanten, ihre Wissenschaft dem Publikum näher zu bringen. Mittlerweile geht kein anderer Forschungszweig so offensiv, gut gelaunt und ideenreich an die Öffentlichkeit wie die Mathematik. Und das ist vielleicht noch wichtiger als die Pisadebatte. Denn die Bürger sollen nicht nur begreifen, dass Mathematik nötig ist, sondern dass sie Freude macht. Die Angewandte Mathematik, weil sie eine kreative Beschäftigung mit interessanten Problemen der Welt ist, und die Reine Mathematik, weil sie eine kreative Beschäftigung mit interessanten Problemen des Geistes ist.

Mit anderen Worten: Mathematik, das ist nicht nur Notwendigkeit, sondern auch Freiheit.

Mathematiker sind in gewisser Hinsicht freier als andere Wissenschaftler. Sie dürfen, ja sie müssen unausgesetzt ihre Kalküle verändern. Heute bauen sie diese Struktur, morgen jene. Heute legen sie diese Annahme zugrunde, morgen jene.

Sie dürfen das Unmögliche möglich machen. Sie erfinden beispielsweise eine Geometrie, in der es zu einer Geraden mehrere Parallelen gibt, die alle durch den gleichen Punkt gehen. Oder einen vier-, einen fünf-, einen 100- oder einen n-dimensionalen Raum. Theologen, die in ihrer Disziplin Ähnliches tun wollten, müssten mit Schwierigkeiten rechnen.

Mathematiker können sich Unvorstellbares ausdenken, weil sie von Vorstellungen abstrahieren, weil sie formalisieren. Dazu eine kleine Anekdote. Ein Ingenieur und ein Mathematiker besuchen eine Physikvorlesung, in der von Räumen mit elf Dimensionen die Rede ist. Zum Schluss sagt der Ingenieur: Das ist mir zu hoch, ein elfdimensionaler Raum. Darauf der Mathematiker: Ist doch ganz ein-

M. Aigner, E. Behrends (Hrsg.), *Alles Mathematik*, DOI 10.1007/978-3-658-09990-9_1

fach. Sie denken sich einen n-dimensionalen Raum, und dann setzen Sie n gleich elf.

Ich will nicht übertreiben. Theoretische Abstraktion und Gedankenfreiheit sind in jeder Disziplin notwendig, von der Theologie bis zur Physik. Und es ist auch nicht so, dass Mathematiker willkürlich mit ihren Axiomen oder Grundregeln herumspielen. Nicht jede frei gewählte Notation, Annahme oder Umwandlungsregel ergibt etwas Sinnvolles, etwas Interessantes, etwas Praktisches, und auch nicht unbedingt einen Forschungsauftrag. Die mathematische Freiheit ist eine Idee, die nie rein umgesetzt wird. Aber sie gibt der Disziplin Kraft.

„Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit“, schrieb Georg Cantor, der große Mathematiker. Es ist dem deutschen Schul- und Hochschulunterricht zu wünschen, dass er diese Freiheit anschaulich werden lässt. Sie ist nicht zu haben ohne formale Strenge, und auch nicht ohne konzentriertes Lernen, von mir aus Büffeln. Aber der kreative Geist der Mathematiker, der darf nicht davongepaukt werden.

Wer sich der Mathematik verschreibt, als Schüler im Leistungskurs, Student oder auch als Späteinsteiger, dem winken viele schöne Preise. Die Fähigkeit, Probleme kreativ zu lösen – kein Zufall, dass Personalabteilungen von Unternehmen an Bewerbungen von Mathematikern (und Physikern) so interessiert sind. Oder die Fähigkeit, die Plausibilität von Behauptungen und Rechnungen abzuschätzen. Ebenso erlernt man das Vermögen, sich geistig zu konzentrieren. Und wer die wichtigsten Methoden der Mathematik kennt, arbeitet sich schnell in neue Wissensgebiete ein.

Außerdem ist es mittlerweile cool, Mathematiker zu sein. Ich beneide jeden darum, gerade auch aus diesem Grund.

Konkrete Fallstudien

Die Mathematik der Compact Disc

Jack H. van Lint

Jeder verwendet heute ganz selbstverständlich Compact Discs. Warum ist aber die Musikübertragung auf einer CD reiner als auf einer herkömmlichen Schallplatte? Die Antwort lautet, um einen populären Slogan abzuwandeln: There is mathematics inside! Genauer gesagt, ein Zweig der Diskreten Mathematik, nämlich die Theorie der Fehler-korrigierenden Codes. In diesem Artikel soll über die Anwendung solcher Codes auf den Design des Compact-Disc-Audio-Systems berichtet werden, das von Philips Electronics und Sony entwickelt wurde.

Wörter und Codes

Wir werden das folgende leicht verständliche mathematische Konzept verwenden. Betrachten wir zwei n-Tupel $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, wobei die a_i und b_i aus einer Menge Q, genannt das *Alphabet*, stammen. Der *Hamming-Abstand* von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ist definiert durch

$$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \text{ Anzahl der } i \text{ mit } a_i \neq b_i.$$

Wir nennen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ *Wörter der Länge n* über dem Alphabet Q.

Die Analogie dieses Begriffes „Wörter“ zur gewöhnlichen Sprache ist absichtlich. Nehmen wir an, wir lesen ein Wort (sagen wir, in einem Buch auf Englisch) und bemerken, dass das Wort zwei Druckfehler enthält. Dann heißt das in unserer Terminologie, dass das gedruckte Wort Hamming Abstand 2 zum korrekten Wort hat. Der Grund, warum wir die 2 Druckfehler erkennen, liegt darin, dass in der englischen Sprache nur ein einziges Wort mit so einem kleinen Abstand zum gedruckten (fehlerhaften) Wort existiert. Das ist auch schon das grundlegende Prinzip der Fehler-korrigierenden Codes: Entwirf eine Sprache (genannt *Code*) von Wörtern einer festen Länge über einem Alphabet Q, so dass je zwei Codewörter mindestens Abstand $2e + 1$ haben. Diese Größe $2e + 1$ heißt dann der Minimalabstand des Codes. Offensichtlich ist ein Wort, das höchstens e Fehler enthält, näher zum korrekten Wort als zu jedem anderen Codewort.

Ein einfaches Beispiel

Ein Beispiel solch codierter Information ist jedem von uns geläufig: Es sind die *Strich-Codes*, mit denen heute die meisten Produkte versehen sind. Zunächst wird jedes Produkt mit einer Folge von 12 Zahlen (aus 0 bis 9) indentifiziert. Jede Zahl

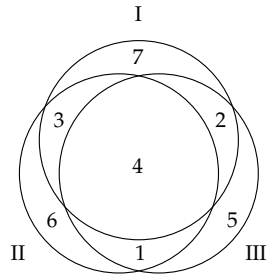
M. Aigner, E. Behrends (Hrsg.), *Alles Mathematik*, DOI 10.1007/978-3-658-09990-9_2

Abbildung 1. Strich-Code und Viking-Aufnahme vom Mars (Jet Propulsion Laboratory of the California Institute of Technology)

wird ersetzt durch ein Codewort mit sieben 0'en und 1'en. Auf dem Produkt werden 0 und 1 durch einen dünnen Strich dargestellt: 0 durch einen weißen Strich und 1 durch einen schwarzen Strich. Zum Beispiel wird 5 codiert durch 0110001, so dass auf dem Produkt ein weißer Strich erscheint, eine Einheit breit, gefolgt von einem schwarzen Strich, zwei Einheiten breit, einem weißen Strich, drei Einheiten breit, und einem abschließenden schwarzen Strich. Wird nun das Produkt an der Kasse des Supermarktes gescannt, so kann es passieren, dass ein Bit (d. h. eine 0 oder 1) falsch gelesen wird. Die Codewörter für die Zahlen und für die Produkte sind so gewählt, dass der Scanner den Fehler entdeckt und der Kassiererin ein Signal gibt, den Scanning Vorgang zu wiederholen. Jeder von uns hat dies sicher schon des öfteren erlebt.

Einer der frühesten Erfolge von Fehler-korrigierenden Codes war die Qualität der Bilder von Satelliten, z. B. vom Mars. Wären diese Bilder ohne die Verwendung von Codes zur Erde übertragen worden, so wäre überhaupt nichts zu erkennen gewesen. Die Kontrollstationen hätten nur einen unverständlichen Bildsalat erhalten (in der Fachsprache: random noise).

Der erste effiziente Fehler-korrigierende Code wurde von R. W. Hamming 1948 in den Bell Laboratories entworfen. Eine binäre Folge (d. h. eine Folge von 0 und 1) wurde in Blöcke zu je 4 Bits zerlegt. Hammings Idee war es, jedem 4-Block drei *Korrekturbits* anzuhängen, mit Hilfe der folgenden Regel. Betrachten wir das folgende Diagramm:



Die 4 Bits (z. B. 1101) werden in die Teile mit den Nummern 1 bis 4 geschrieben. Die Korrekturbits kommen von den Teilen 5 bis 7. Die Regel ist, dass jeder Kreis eine *gerade* Anzahl von 1'en enthalten muss. Eine Konfiguration von 7 Bits, welche *einen* Fehler enthält, ergibt einen oder mehrere Kreise mit einer ungeraden Anzahl von 1'en. Das Bit, welches in all diesen Kreisen mit ungerader Parität enthalten ist, aber nicht in jener mit gerader Parität, muss dann das fehlerhafte Bit sein.

Wir sehen in diesem Beispiel, dass jedes Wort der Länge 7 genau 4 Informationsbits enthält. Daher sagen wir, dass der Hamming Code ein binärer $[7,4]$-Code ist mit *Informationsrate* $\frac{4}{7}$. Wir bemerken, dass die einfache Wiederholung der 4 Informationsbits einen $[8,4]$-Code ergibt, also einen Code mit Informationsrate $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ (schlechter als im Hamming Code). Und dieser Code kann zwar einen Fehler entdecken, aber nicht korrigieren.

Von Musik zu Audiobits

Bevor wir uns den Codes zuwenden, wollen wir besprechen, wie Musik in eine Folge sogenannter Audiobits umgewandelt wird. Im CD-System wird das Analogsignal 44100 Mal pro Sekunde bemustert (in der Fachsprache „sampled"). Diese Rate von 44,1 kHz ist ausreichend, um Frequenzen bis zu 20000 Hz hören zu können. Die Muster werden uniform in 16 Bits zerlegt, und da wir Stereo-Musik empfangen wollen, so entspricht jedes Muster einer Folge von 32 Bits. So eine Folge von 32 Bits wird aufgefasst als 4 aufeinanderfolgende Bytes (ein Byte ist eine Folge von 8 Bits). Für den Codierungsvorgang werden diese Bytes als Elemente das Körpers $\mathbb{F}_{2^8}$ aufgefasst. Wer nicht weiß, was ein (mathematischer) Körper ist: In einem Körper gelten die üblichen Rechenregeln, d. h. wir können Bytes addieren, multiplizieren und dividieren, wie wir es gewohnt sind.

Genauso wie bei den Hamming-Codes wird die Folge der Bytes in Gruppen fester Länge zerlegt, an die dann Korrekturbytes angehängt werden. Im CD-System wird eine Folge von 24 Bytes in zwei Schritten zu einem Codewort der Länge 32 Bytes verwandelt. Die dabei verwendeten Codes sind sogenannte *Reed–Solomon-Codes* vom Typ [28,24] bzw. [32,28], die im nächsten Abschnitt erklärt werden. Schließlich wird noch ein Extrabyte hinzugefügt, welches die Kontroll- und Anzeigeinformation enthält. So kann der CD-Player (und der Hörer) erken-

nen, auf welcher Spur sich die CD gerade befindet. Also: Sechs Muster führen zu 33 Datenbytes, von denen jedes aus 8 Bits besteht.

Wie später erklärt wird, können diese Datenbytes noch nicht direkt auf die CD übertragen werden. Die Transformation in die Sequenz von Kanalbits (welche dann die Tonspur ergeben) wandelt 8 Datenbits in 17 Kanalbits um, und nach jeder Folge von 33 mal 17 Kanalbits wird eine Sequenz von 27 Synchronisationsbits eingefügt. Diese Synchronisationsbits identifizieren den Beginn der nächsten Codesequenz. Die Synchronisationszeichen sind natürlich so gewählt, dass sie auf keinen Fall in einer Codesequenz auftreten können, eine Verwechslung also unmöglich ist.

Nehmen wir alles zusammen, so erhalten wir folgendes Schema:

6 Muster $\longrightarrow 33 \times 8 = 264$ Datenbits $\longrightarrow 264 \times \frac{33\times 17+27}{33\times 8} = 588$ Kanalbits.

Eine Sekunde Musik führt also zu einer Folge von 4321800 Bits auf der Tonspur. Falls der CD-Player ein Bit mit der sehr kleinen Wahrscheinlichkeit von 10^{-4} falsch interpretieren würde, so würden immer noch hunderte Fehler pro Sekunde passieren!

Es gibt mehrere Gründe für Fehler auf einer CD. Es könnte Schmutz auf der CD sein, Luftblasen im Plastikmaterial, Ungenauigkeiten beim Druck, Fingerabdrücke, Kratzer, Oberflächenfehler. Es sei angemerkt, dass Fehler hauptsächlich hintereinander auftreten (sogenannte „burst errors“). Da wir Codes verwenden, die *zufällige* Fehler korrigieren, so erfordert dies ein systematisches Austauschen von Bytes, damit Bytes, die in den Codewörtern aufeinanderfolgen, nicht mehr benachbart sind auf der CD.

Reed–Solomon-Codes

Das Codierungssystem, das auf einer Compact Disc verwendet wird, hat den Fachnamen CIRC (Cross-Interleaved Reed–Solomon-Code). Der Inhalt dieses Abschnittes sind die mathematischen Prinzipien, die in der Fehlerkorrektur auf CDs eine Rolle spielen. Wie wir gesehen haben, besteht das Code-Alphabet auf der CD aus $2^8 = 256$ Buchstaben, welche den Körper $\mathbb{F}_{2^8}$ bilden. Um die etwas komplizierten Rechnungen in $\mathbb{F}_{2^8}$ zu vermeiden, illustrieren wir die Arbeitsweise der Reed–Solomon-Codes an einem Beispiel über einem Alphabet mit 31 Elementen, d. h. über dem Körper $\mathbb{F}_{31}$. Die Elemente von $\mathbb{F}_{31}$ sind $0, 1, 2, \ldots, 30$ und die Rechenoperationen werden wie üblich ausgeführt, wobei das Ergebnis jeweils modulo 31 reduziert wird. Das heißt: Wollen wir z.B. 6 und 9 multiplizieren, so erhalten wir $6 \times 9 = 54$ und dividieren anschließend das Resultat durch 31. Das „Produkt“ 6×9 in F_{31} ist dann der Rest 23

$$6 \times 9 = 54 = 31 + 23.$$

Wir schreiben kurz: $6 \times 9 = 23$ (modulo 31).

Als ein Beispiel betrachten wir ein Buch mit 200 Seiten, das beschrieben werden soll mit einer Druckgröße, die 3000 Symbole pro Seite erlaubt. Wir identifizie-

ren die Buchstaben a bis z mit den Zahlen 1 bis 26, den Zwischenraum mit 0, und benutzen 27 bis 30 für Punkt, Komma, Strichpunkt und ein weiteres Symbol.

Wir werden vom Drucker informiert, dass die Technik, die er benutzt, nicht allzu gut ist. Tatsächlich ist sie so schlecht, dass jedes Symbol auf einer Seite mit Wahrscheinlichkeit 0,1% inkorrekt ist. Das bedeutet, dass im Durchschnitt 3 Druckfehler pro Seite passieren, was eindeutig zu viel ist. Man bedenke nur, wie lästig schon ein gelegentliches Klopfen auf der Schallplatte ist. Um die Situation zu verbessern, verwenden wir Ideen aus der Codierungstheorie.

In einem ersten Ansatz zerlegen wir die Folge der Symbole in Gruppen zu je 4. Vor jeder Gruppe von 4 Symbolen werden zwei 2 Korrektursymbole eingefügt. Wir bezeichnen das resultierende Codewort mit $\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_5)$, wobei a_0 und a_1 die Korrektursymbole und a_2, a_3, a_4, a_5 die 4 Informationssymbole sind (alles in $\mathbb{F}_{31}$).

Betrachten wir das Word CODE. Dieses Wort korrespondiert zu $(a_2, a_3, a_4, a_5) = (3, 15, 4, 5)$. Die Codierungsregeln, um a_0 und a_1 zu berechnen, sind nun:

(i) $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$ (modulo 31)

(ii) $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 = 0$ (modulo 31).

Daraus erhalten wir $a_0 = 3$ und $a_1 = 1$, so dass CODE als CACODE codiert wird.

Gehen wir zum anderen Ende und nehmen wir an, wir erhalten EPGOOF. Wenn wir die Korrektursymbole auslassen, so würde GOOF als gesendetes Word resultieren. Aber wir sehen sofort, dass ein Fehler passiert sein muß, denn EPGOOF korrespondiert zu $(a_0, a_1, \ldots, a_5) = (5, 16, 7, 15, 15, 6)$ und die Summe der a_i ist

$$5 + 16 + \ldots + 6 = 64 = 2 \quad \text{(modulo 31)},$$

was unserer Codierungsregel widerspricht. Wir vermuten, dass wahrscheinlich eines der Symbole a_i durch $a_i + 2$ ersetzt wurde. Der Wert des Fehler in a_i ist 2, das heißt wir werden $2i$ als Fehlerwert erhalten, wenn wir $a_0, \ldots, a_5$ in Gleichung (ii) einsetzen. Einsetzen ergibt

$$a_1 + 2a_2 + \ldots + 5a_5 = 16 + 14 + 45 + 60 + 30 = 165 = 10 \quad \text{(modulo 31)},$$

also ist $i = \frac{10}{2} = 5$, das heißt der Fehler passierte in der fünften Position. Anstelle von 6 sollte 4 stehen – und wir decodieren EPGOOF in GOOD! Wie schon gesagt, die arithmetischen Operationen in $\mathbb{F}_{2^8}$ sind ein wenig komplizierter, aber alle Reed–Solomon-Codes verwenden Codierungs- and Decodierungsregeln wie die Gleichungen (i) und (ii).

Wenn wir nun auch wissen, dass dieser Code einen Fehler in einer 6-Gruppe korrigieren kann, so müssen wir ehrlicherweise auf ein Problem eingehen, das auch auf der CD auftritt. Der Code hat eine Informationsrate von $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Da wir dieselbe Anzahl von Seiten derselben Größe benutzen wollen, so müssen wir also $1\frac{1}{2}$-mal so viele Symbole pro Seite unterbringen. Zu unserer Ernüchterung teilt uns aber der Drucker mit, dass die Druckfehlerwahrscheinlichkeit der $1\frac{1}{2}$-mal kleineren Druckgröße *doppelt so hoch* ist! Mit anderen Worten: Mit dem kleineren Font müssen wir im Durchschnitt 9 Fehler pro Seite *vor der Fehlerkorrektur* in Kauf

nehmen. Und nach der Korrektur? Ein Wort mit 6 Symbolen wird korrekt decodiert, falls es höchstens einen Fehler enthält. Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als ein Fehler passiert ist

$$\sum_{i=2}^{6} \binom{6}{i} (0.002)^i (0.998)^{6-i} \approx 0.00006\,.$$

Im Buch wird es einige Wörter geben, die zwei oder mehr Druckfehler enthalten, aber es werden im Schnitt nicht mehr als 10 Wörter im gesamten Buch sein – eine bemerkenswerte Verbesserung!.

Mit einer geringfügigen Veränderung wird die Situation dramatisch besser. Dazu verwenden wir einen etwas komplizierteren Reed–Solomon Code. Wir zerlegen die Symbole in Gruppen von 8, die wir mit $(a_4, a_5, \ldots, a_{11})$ bezeichnen. Davor fügen wir 4 Korrekturzeichen hinzu nach den folgenden Regeln:

(i) $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{11} = 0$ (modulo 31)

(ii) $a_1 + 2^k a_2 + 3^k a_3 + \ldots + 11^k a_{11} = 0$ (modulo 31) $(k = 1, 2, 3)$.

Die Codierung besteht also aus der Lösung von 4 Gleichungen mit den 4 Unbekannten a_0, a_1, a_2, a_3. Der Leser kann sich sofort wie oben überlegen, wie ein Fehler korrigiert wird. Nehmen wir an, es passierten zwei Fehler, mit den Abweichungen e_1 und e_2 in Positionen i und j. Einsetzen in die Gleichungen (i) und (ii) ergibt sofort

$$e_1 + e_2 \text{ und } i^k e_1 + j^k e_2 \quad (k = 1, 2, 3).$$

Daraus können wir e_1 und e_2 eliminieren und erhalten eine quadratische Gleichung mit i und j als Lösungen. Danach können wir e_1 und e_2 ermitteln und die beiden Fehler korrigieren. Der neue Code ist also ein 2-fehlerkorrigierender Code.

Glücklicherweise ergibt das kein neues Problem beim Drucken. Dieser neue Reed–Solomon-Code hat wiederum Informationsrate $\frac{2}{3}$ $(= \frac{8}{12})$ wie der vorige, so dass die Druckfehlerwahrscheinlichkeit wieder $= 0,2\%$ pro Symbol ist. Die Decodierung wird nur versagen, wenn ein gedrucktes Wort von 12 Symbolen mehr als zwei Fehler enthält. Die Wahrscheinlichkeit, dass dies passiert, ist

$$\sum_{i=3}^{12} \binom{12}{i} (0.002)^i (0.998)^{12-i} < 0.000002.$$

Das gesamte Buch hat 600.000 Symbole, also 75.000 Wörter der Länge 8. Da $75000 \times 0.000002 = 0,15$ ist, so ist es unwahrscheinlich, dass überhaupt ein Druckfehler auftritt! Das ist nun tatsächlich eine eindrucksvolle Verbesserung!

Auf einer CD ist die Informationsrate, wie im letzten Abschnitt erwähnt, $\frac{24}{32} = \frac{3}{4}$. Wie eben erläutert (am Beipiel des kleineren Fonts) wird die Fehlerwahrscheinlichkeit für ein Bit dadurch erhöht im Vergleich zur Situation, wenn keine Korrektur durchgeführt wird. Wie wir schon erwähnt haben, kann eine CD ohne

weiteres 500.000 Bitfehler enthalten. Allerdings passieren diese Fehler nicht zufällig (wie in unserem Beispiel des Buches), sondern meistens in „bursts“ (hintereinander). Es kann vorkommen, dass einige 1000 aufeinanderfolgende Symbole (z. B. durch einen Kratzer) fehlerhaft sind. Dem wird entgegengewirkt, indem benachbarte Informationssymbole in *verschiedenen* Codewörtern aufscheinen (genannt „Interleaving“). Eines muss man sich außerdem bei Design eines CD-Systems vor Augen halten: Der Speicher, der für die Bits zur Verfügung steht, kann nicht zu groß sein. Das impliziert natürlich Beschränkungen bei der Länge der Codewörter und beim Interleaving. Alle Berechnungen, die zur Fehlerkorrektur benötigt werden, passieren im Bruchteil einer Sekunde, und das ist der Grund, warum wir Musik hören, praktisch unmittelbar, nachdem der CD-Player eingeschaltet wird. In dem Buch-Beispiel sahen wir, dass ein längerer Code zwar bessere Korrekturleistung bringt, aber auch mehr Berechnungen benötigt.

Wie wir im letzten Abschnitt erwähnt haben, wird die Codierung auf der CD in zwei Schritten mit Hilfe eines [28,24]-Codes C_1 und eines [32,28]-Codes C_2 ausgeführt. Diese Codes sind ziemlich kurz und nicht besonders leistungsstark. Einer der Hauptgründe für die Effizienz dieses Codierungsschemas besteht darin, dass die beiden Codes *zusammenarbeiten*. Anstelle des tatsächlichen Schemas, das auf der CD benutzt wird, beschreiben wir eine sehr ähnliche Situation, in der zwei Codes C_1 und C_2 zusammenarbeiten – mit bemerkenswerten Ergebnissen. Die Idee ist, ein *Produkt* von Codes einzuführen. Angenommen, 24×28 Informationssymbole werden in einer rechteckigen Matrix mit 24 Zeilen und 28 Spalten hingeschrieben. Diese 24×28-Matrix wird als der linke obere Teil einer 28×32-Matrix A aufgefasst. Die verbleibenden Stellen von A werden definiert, indem man fordert, dass jede Spalte von A (Länge 28) im Code C_1 ist und jede Zeile von A (Länge 32) im Code C_2 ist. Aus den Rechenregeln folgt, dass dies möglich ist.

Es ist nicht schwer sich zu überlegen, dass dieser „Produkt-Code“ Minimalabstand 25 hat und daher bis zu 12 Fehler in dem Codewort (welches jetzt eine 28×32-Matrix ist) korrigieren kann. Betrachten wir eine besonders schlechte Situation: Es treten 21 Fehler auf, und zwar 12 Spalten mit 1 Fehler, 1 Spalte mit 2 Fehlern, 1 Spalte mit 3 Fehlern, und eine Spalte mit 4 Fehlern. Wir können nicht erwarten, dass wir diese Situation in den Griff bekommen und tatsächlich ist die Decodierung der Spalten nicht möglich. Wir entscheiden uns, C_1 zu benutzen, um nur *einen* Fehler zu korrigieren. Das hat nun den Effekt, dass wir die beiden Spalten *erkennen*, welche zwei oder drei Fehler enthalten, da sie Abstand mindestens 2 zum nächsten Codewort in C_1 haben. Im Fall der Spalte mit 4 Fehlern ist es allerdings durchaus möglich, dass der Korrektur-Algorithmus glaubt, er hätte einen Fehler korrigiert, während in Wirklichkeit ein fünfter Fehler eingeführt wurde! Hier ist der Trick, der dies umgeht: Wir korrigieren die Spalten und erklären die zwei Spalten (mit 2 oder 3 Fehlern) als *gelöscht*. Das bedeutet, dass nach der Korrektur aller Spalten, 29 Spalten korrekt, 2 gelöscht sind und eine Spalte 5 Fehler hat. Nun betrachten wir die Zeilen, welche ja von C_2 herkommen. In jeder Zeile gibt es zwei gelöschte Stellen und in fünf der Zeilen ist ein Fehler. Da C_2 Minimalabstand 5 hat, können alle Zeilen richtig decodiert werden.

Die Compact Disc

Die Musik wird auf einer Compact Disc in Digitalform als eine 5 km lange spiralförmige Spur aufgezeichnet, welche aus einer Folge von sogenannten *Pits* besteht. Die Teile zwischen aufeinanderfolgenden Pits heißen *Lands*. Die Steigung der Spur ist 1,6μm, die Breite ist 0,6μm und die Tiefe der Pits ist 0,12μm. Die Abbildung zeigt eine Vergrößerung mehrerer paralleler Spuren.

Die Spur wird optisch von einem Laserstrahl gescannt. Jeder Land/Pit oder Pit/Land Übergang wird als 1 interpretiert, und alle anderen Bits als 0. Ein Kanalbit auf der Spur hat Länge 0,3 μm. So wird z. B. ein Pit der Länge 1,8 μm gefolgt von einem Land der Länge 0.9 μm übersetzt in die Folge 100000100. Der Durchmesser des Lichtstrahls ist ungefähr 1 μm. Wenn er auf ein Land fällt, so wird er fast völlig reflektiert. Da die Tiefe eines Pits ungefähr 1/4 der Wellenlänge des Lichtes im Material der Disc ist, so bewirkt Interferenz, dass weniger Licht von den Pits in die Öffnung des Objektives reflektiert wird.

Es gibt mehrere Anforderungen an die Folge der Bits, die in der CD beachtet werden müssen. Jedes Pit oder Land muss mindestens 3 Bits lang sein. Das wird gefordert, um zu vermeiden, dass der Lichtstrahl zwei aufeinanderfolgende Übergänge zwischen Pits und Lands gleichzeitig registriert, was eine sogenannte Intersymbol-Interferenz bewirken würde. Jedesmal wenn ein Übergang auftritt, wird die „Bit-Uhr“ im CD-Player synchronisiert. Da dies so rechtzeitig erfolgen muß, um einen Verlust an Synchronisation zu vermeiden, darf kein Pit oder Land länger als 3,3μm sein, d. h. zwei 1'en in der Sequenz sind durch höchstens 10 0'en getrennt. Die Einschränkung an die maximale Landlänge ist außerdem notwendig für den Mechanismus, der den Laser auf der Spur hält. Eine letzte Anforderung ist, dass der Niedrig-Frequenz Anteil des Signals auf ein Minimum beschränkt ist. Dies bedingt, dass die Gesamtlänge der Pits und Lands, von Beginn der Spur an, ungefähr gleich ist. Diese Bedingung wird für den Mechanismus benötigt, der entscheidet, ob etwas „hell“ oder „dunkel“ ist. (Das vermindert auch den negativen Effekt eines Fingerabdruckes auf der CD.) Als letztes betrachten wir nun die Konversion der Bytes (welche die Symbole in unseren Codewörtern sind) in die Sequenzen, welche endgültig auf die Disc übertragen werden. Diese Konversion wird EFM bezeichnet (= Eight-to-Fourteen-Modulation). Warum 14? Klarerweise

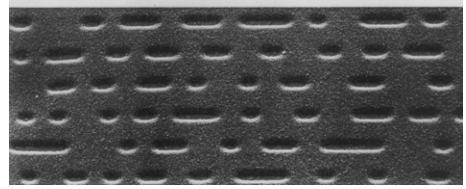


Abbildung 2. Vergrößerung mehrerer paralleler Spuren einer CD

wird eine Zahl benötigt, die den obigen Anforderungen genügt und so klein wie möglich ist.

Ein altbekanntes Problem in der Kombinatorik ist die Bestimmung der Anzahl der Folgen von 0 und 1 der Länge n, so dass keine zwei aufeinanderfolgenden 1'en auftreten. Nennen wir diese Zahl F_n. Eine Folge, die mit 1 endet, muß eine 0 an vorletzter Stelle haben. Davor kann jede Folge mit $n-2$ Symbolen sein (ohne aufeinanderfolgende 1'en). Endet aber die Folge in 0, so kann jede zulässige $(n-1)$–Folge davor auftreten. Wir erhalten somit

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Da $F_0 = 1$, $F_1 = 2$, so erhalten wir $F_2 = 3$, $F_3 = 5$, $F_4 = 8$ und allgemein die berühmte Folge der *Fibonacci-Zahlen*.

In unserem Fall ist die Sache nur unwesentlich schwieriger. Es sei $a(n)$ die Anzahl der Folgen von 0 und 1 der Länge n, in denen zwischen zwei 1'en mindestens zwei 0'en auftreten, aber niemals mehr als 10 aufeinanderfolgende 0'en. Für diese Größe $a(n)$ kann eine ähnliche Rekursion wie für die Fibonacci Zahlen aufgestellt werden. Wir müssen nun die $2^8 = 256$ möglichen Bytes (0,1-Wörter der Länge 8) in Folgen übersetzen, welche den technischen Anforderungen, wie eben geschildert, genügen. Es ergibt sich, dass $n = 14$ der kleinste Wert ist, für den $a(n) > 256$ ist, nämlich $a(14) = 267$.

Wir müssen noch ein letztes Problem meistern. Falls zwei Folgen der Länge 14 (welche beide den Anforderungen genügen) aneinanderhängen, so kann es passieren, dass die Folge der 28 Symbole die Bedingungen verletzt. Nach Entfernung der 11 schwierigsten Folgen aus den 267 ergibt sich, dass es möglich ist, zwei 14-er Sequenzen mit Hilfe von 3 „Merging Bits" zu vereinigen, wobei wir einige Freiheit in der Wahl dieser 3 Bits haben. Diese werden dann so gewählt, dass die Gesamtlänge der Pits und Lands wie gefordert ungefähr gleich ist.

Wir haben gezeigt, dass jedes Byte in einem Codewort in 17 Kanalbits auf der CD umgewandelt wird. Wenn die CD gelesen wird, so werden diese Bits zurück verwandelt in Bytes. Dann folgt De-Interleaving, Fehlerkorrektur, Digital-zu-Analog Konversion und schließlich hören wir Musik, mit Dank an Mozart und anderen – und an *Mathematik*.

Literatur

Die Fachliteratur ist für Laien nur schwer zugänglich. Eine Einführung in die Codierungstheorie findet sich im folgenden Band:

Ralph-Hardo Schulz: *Codierungstheorie – eine Einführung*. Vieweg Verlag 1991, 2. Auflage 2003.

Therapieplanung an virtuellen Krebspatienten

Peter Deuflhard

Medizintechnik dominiert heutzutage immer mehr medizinische Behandlungsformen, insbesondere in der Krebstherapie. Viele Menschen sehen in diesem Trend vorrangig den Aspekt der Entfremdung von Arzt und Patient. Parallel dazu hat sich jedoch, gerade wegen dieser Technisierung, eine methodisch extrem sorgfältige Therapieplanung als zwingende Notwendigkeit ergeben. Geplant wird eine auf den einzelnen Patienten präzise zugeschnittene Behandlung – der einzelne Mensch steht also mehr denn je im Blickpunkt des ärztlichen Interesses, wenn auch in einer abstrakteren Form. Sorgfältige und verlässliche Therapieplanung für jeden einzelnen Patienten verlangt in der Regel eine enge Kooperation der Medizin mit Mathematik und Informatik. Die Arbeitsgruppe des Autors am Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik (ZIB) ist in zahlreiche mathematisch-informatische Projekte mit der Medizin eingebunden. Der folgende Beitrag gibt einen Einblick in die Therapieplanung am ausgewählten Beispiel der Krebstherapie Hyperthermie.

Hyperthermie, eine neue Krebstherapie

Bereits in den siebziger Jahren hat Manfred von Ardenne in Dresden versucht, Krebspatienten mit einer Therapie der Überwärmung, der sogenannten Hyperthermie, zu behandeln. Seine Patienten wurden dabei in eine Badewanne mit heißem Wasser gelegt, also am ganzen Körper erwärmt. Diese Ganzkörperhyperthermie wird inzwischen eher selten angewandt – allenfalls bei der Behandlung von sogenannten Mikrometastasen, die auch durch moderne bildgebende Verfahren der Medizin nicht erkennbar sind.

Stattdessen richtet sich die medizinische Aufmerksamkeit heute mehr und mehr auf die sogenannte regionale Hyperthermie (RH), bei der nur die Krebsgeschwulst, also der Tumor, örtlich begrenzt erwärmt werden soll. Sie bietet vielfache Anwendungsmöglichkeiten nicht nur in der Krebstherapie, sondern auch bei anderen Erkrankungen. RH wird derzeit meist nicht als alleinige Therapieform eingesetzt, sondern in Verbindung mit Strahlentherapie oder Chemotherapie oder beiden. Bei Temperaturen von 40,5–44 °C findet noch keine Zerstörung von Tumorzellen in größerem Maßstab statt; vielmehr wirkt RH über biochemische Reaktionen innerhalb der Zellen, die erst in jüngster Zeit verstanden worden sind: Wir wissen heute, dass durch RH in gesunden wie kranken Zellen massenhaft chemische Substanzen produziert werden (für Interessierte: sogenannte Hitzeschock-Proteine), die in menschlichen Tumorzellen bestimmte Immunvorgänge auslösen. Die RH funktioniert wie ein örtlicher Schalter, der im natürlichen Lebenszyklus

M. Aigner, E. Behrends (Hrsg.), *Alles Mathematik*, DOI 10.1007/978-3-658-09990-9_3

von Zellen gerade an dem Punkt angreift, der durch die Krebserkrankung außer Takt geraten ist. Seit Jahren schon war aus Laborversuchen bekannt, dass Temperaturerhöhung in Tumoren ab 40°C zu einer dramatischen Erhöhung der Wirksamkeit von Chemotherapie führen kann; in den letzten Jahren wurde deshalb in der Forschung verstärkt daran gearbeitet, diesen Effekt vom Reagenzglas auf den lebenden Menschen zu übertragen. Ähnlich dramatisch wie die Wirkung der Hyperthermie in Kombination mit Chemotherapie ist ihre Wirkung in Kombination mit Strahlentherapie: Bei gleichzeitiger Anwendung von Temperaturerhöhung und Bestrahlung ist eine bis zu 5-fache Wirkungsverstärkung zu erwarten, was jedoch aus technischen Gründen bei Patienten derzeit nicht möglich ist. Bei der technisch möglichen Anwendung nacheinander – im Allgemeinen erst Wärmebehandlung, dann Bestrahlung – ist der Effekt geringer, aber immer noch deutlich vorhanden. Nach alleiniger Strahlentherapie ist die Rückfallrate häufig sehr hoch; durch Kombination mit Hyperthermie erscheint jedoch eine deutliche Wirkungsverstärkung der Strahlentherapie erreichbar.

Die Schwierigkeit in der regionalen Hyperthermie ist jedoch, dass häufig neben der erwünschten Aufheizung des Tumors zugleich eine unerwünschte Erwärmung von örtlichen Zonen in gesundem Gewebe auftritt, die sogenannten hot spots. Die Behandlung von Patienten durch RH muß deshalb sehr sorgfältig vorab geplant werden. Wie im folgenden dargelegt werden wird, benötigt die Aufgabe der medizinischen Therapieplanung modernste Methoden der Mathematik und Informatik. Grundidee jeder Therapieplanung ist, die einzelnen *realen* Patienten als *virtuelle* Patienten in den Rechner abzubilden, die Therapie an den virtuellen Patienten individuell zu optimieren und schließlich die berechnete optimale Therapie in die klinische Behandlung der realen Patienten umzusetzen.

Natürlich könnte man auch daran denken, die Temperaturen im Tumor derart zu erhöhen, dass die Krebszellen ganz abgetötet werden; die toten Zellen würden dann vom Körper selbst abgebaut. Eine solche Erhöhung der Temperatur wäre jedoch erst dann möglich, wenn vorab garantiert werden könnte, dass keine Hot Spots außerhalb des Tumors entstehen. Dies ist für die heutigen Behandlungsgeräte und die derzeit verfügbare Therapieplanung nicht möglich. Obwohl Forschung und Entwicklung für eine derartige Therapieform heute noch nicht reif sind, erscheint jedoch ein solches Ziel für die Zukunft anstrebenswert. In einem solchen Zusammenhang werden dann umsomehr mathematische Methoden eine wichtige Rolle spielen.

Von der klinischen Wirklichkeit zum mathematischen Modell

An der Berliner Charité, insbesondere dem Rudolf-Virchow-Klinikum in Wedding sowie der Reinhard-Rössle-Klinik in Buch, wurde die regionale Hyperthermie (RH) seit Jahren intensiv und erfolgreich erforscht und weiter entwickelt. Sie ist eine inzwischen weitgehend anerkannte Therapie zur Behandlung von örtlich

Abbildung 1. Patientin im Hyperthermie-Applikator/Charité

begrenzten Tumoren, die nur schwer oder gar nicht operierbar sind, wie etwa solchen am Enddarm, am Gebärmutterhals, an der Prostata oder an der Blase. Ist bei einem dieser Tumoren eine Operation nicht ratsam, so zielt man ersatzweise darauf ab, den Tumor zunächst zu verkleinern (*downstaging* in der Sprache der Medizin), und ihn erst anschließend zu operieren. Dieses Vorgehen verbessert in der Regel die Heilungsaussichten beträchtlich; immerhin verstirbt heutzutage ein Drittel aller Patienten gerade am unkontrollierbaren örtlichen Wachstum von Tumoren.

In Abbildung 1 ist die klinische Situation in einem RH-Behandlungsraum der Charité dargestellt. Die (natürlich reale) Patientin liegt in einem ringförmigen Gerät, dem sogenannten Applikator, an dessen Innenseite (für den Betrachter nicht erkennbar) acht Antennen angebracht sind. Die Antennen erzeugen Radiowellen im UKW-Bereich bei etwa 100 MHz. Damit die Radiowellen mit möglichst geringen Verlusten durch die Haut in den Körper eindringen können, ist zwischen Patientin und Antennen ein sogenannter Wasserbolus angebracht (siehe Abbildung). Die gestellte Aufgabe ist nun, die Antennen (genauer: ihre Amplituden und Phasen) optimal derart einzustellen, dass im Tumor möglichst hohe Temperaturen erzeugt werden, in gesundem Gewebe aber keine Hot Spots entstehen.

Seit 1994 existiert in Berlin der interdisziplinäre Sonderforschungsbereich *Hyperthermie: Methodik und Klinik*, in dem Mathematik und wissenschaftliche Visualisierung von Anfang an einen hohen Stellenwert hatten. Um die RH in der Klinik im gesicherten Rahmen ablaufen lassen zu können, ist vorab eine sorgfältige Planung der Therapie vonnöten, wie bereits eingangs erwähnt. Die von der Medizin

gestellte Aufgabe führt somit zu einer mathematischen Aufgabe, die in vielfacher Hinsicht nicht einfach zu lösen ist und in der Tat eine Reihe von innovativen Entwicklungen im Bereich der Numerischen Mathematik, der Informatik und der wissenschaftlichen Visualisierung nötig gemacht hat. Um auch interessierten Laien eine Idee zu vermitteln, welche mathematischen Fragen dabei eine Rolle spielen, seien hier einige dieser neueren Entwicklungen kurz im Zusammenhang mit den medizintechnischen Problemen skizziert.

- Bei einer Frequenz von 100 MHz ist die Wellenlänge in Wasser ca. 30 cm, also vergleichbar mit den Abmessungen des menschlichen Körpers. Die Wellenlänge in Gewebe hängt stark von ihrem Wassergehalt ab, ist also unterschiedlich in Knochen, Muskeln, Fett oder den verschiedenen Organen. Bei den im Körper realisierten Wellenlängen tritt somit als wesentlicher Effekt eine Überlagerung von Wellen auf, in der Physik als Interferenz bezeichnet; diese Interferenz ist ausgesprochen erwünscht, um die Therapie jeweils für stark unterschiedliche Patienten anpassen zu können, also möglichst variabel zu halten. Im Unterschied zur reinen Strahlentherapie könnte man deshalb die Hyperthermie quasi als „Wellentherapie“ bezeichnen. Dieser unterschiedliche Charakter hat zur Folge, dass das mathematische Problem der Therapieplanung in der RH wesentlich komplexer ist als das der herkömmlichen Strahlentherapie: Während dort lediglich eine geometrische Bündelung von Strahlen (genauer: Röntgenstrahlen) zu optimieren ist, müssen in der RH die sogenannten Maxwell-Gleichungen herangezogen werden. (Für Interessierte: Die Maxwell-Gleichungen sind diejenigen partiellen Differentialgleichungen, die das elektrische Feld mathematisch beschreiben.) Diese Gleichungen müssen im Computer gelöst werden – über dem dreidimensionalen Raum mit Patient, Wasserbolus, Antennen und Luft (den Rest des Behandlungsraumes können wir hier weglassen). Bei der relativ hohen Frequenz von ca. 100 MHz stellt dies auch heute noch eine wissenschaftliche Herausforderung für die Numerische Mathematik dar.
- Durch die Absorption elektrischer Energie im Körper entsteht Wärme, in unterschiedlichen Geweben unterschiedlich, beispielsweise wenig in Knochen, viel in Muskeln. Diese Wärme wird jedoch durch den Blutkreislauf im Körper wieder verteilt. Dies geschieht in fein verästelten Netzwerken aus dünnen Adern meist „schwammartig“, was sich auch mit mathematischen Methoden intelligent nachbilden lässt. In größeren Adern, die man einzeln im Computer darstellen muss, wird die Wärme direkt mit dem Blut transportiert. Klammert man der Einfachheit halber zunächst Tumoren mit stark durchbluteten Gefäßen aus, so läßt sich die Wirkung der „schwammartigen“ Durchblutung auf die Wärmeverteilung im Körper durch die sogenannte Biowärmetransport-Gleichung (BWT) mathematisch beschreiben (für Interessierte: Wiederum eine partielle Differentialgleichung, aber von anderem Typ als die obengenannten Maxwell-Gleichungen). Diese Gleichung muss ebenfalls für den dreidimensionalen Menschen mit Hilfe des Computers gelöst werden. Falls darüberhinaus die Reaktion des gesamten Körpers auf die örtliche Überwärmung, die bei jedem Men-

schen anders verläuft, mit in die beschreibenden mathematischen Gleichungen genommen wird, so ergibt sich ein deutlich schwierigeres Problem. Die Hinzunahme stark durchbluteter Gefäße schließlich steigert den mathematischen Schwierigkeitsgrad ein weiteres Mal.

Alle Gleichungen zusammen ergeben eine näherungsweise mathematische Beschreibung der Hyperthermiebehandlung. Anstelle der klinischen Wirklichkeit haben wir ein mathematisches Modell gesetzt, das wir im Computer lösen wollen. Mit anderen Worten: Wir ersetzen die Realität durch eine *virtuelle Realität*. Auf der Basis dieses Modells können wir nun versuchen, die Therapie zu optimieren, d. h. eine optimale Steuerung der Antennen des Applikators so zu bestimmen, dass der Tumor möglichst stark erwärmt wird, aber keine Hot Spots entstehen.

Vom mathematischen Modell zum virtuellen Labor

Ziel der Therapieplanung ist, für jeden einzelnen Krebspatienten in der Klinik auch tatsächlich die für ihn optimale Hyperthermiebehandlung zu erreichen. Dies geschieht auf der Basis des oben hergeleiteten mathematischen Modells. Die Kenntnis dieses Modells alleine heißt jedoch noch nicht, dass wir schon wüssten, wie die genannten Gleichungen im Computer schnell und zuverlässig zu lösen sind. Dies ist eine Aufgabe der Numerischen Mathematik. Und selbst wenn wir wissen, wie die Gleichungen zu lösen sind, verbleibt immer noch eine ganze Reihe zusätzlicher Aufgaben aus Mathematik und Informatik zu erledigen.

Das Grundmuster der Therapieplanung, für die Hyperthermie ebenso wie für eine Reihe anderer Therapieformen, lässt sich in den folgenden typischen Grundschritten zusammenfassen:

- Zunächst bilden wir den realen Patienten mit Methoden der Informatik als virtuellen Patienten in den Rechner ab; diese Abbildung muss für den Zweck der Therapie genau genug sein.
- Sodann simulieren und optimieren wir die Therapie am virtuellen Patienten im Computer mit Methoden der Numerischen Mathematik.
- Die Resultate dieser Rechnungen, hier also die optimale Einstellung der Antennen, werden im Rechner visualisiert (auch dahinter steckt eine Menge Mathematik und Informatik) und durch den behandelnden Arzt in die tatsächliche Therapie für den *realen Patienten* übernommen.

Es versteht sich von selbst, dass alle einzelnen Teilschritte dieses Verfahrens mit hoher Präzision ablaufen müssen, damit Mediziner schließlich verläßliche Aussagen bekommen, auf die sie ihre Therapie mit Fug und Recht aufbauen können. Hinzu kommt: Damit das ganze Vorgehen in der klinischen Praxis nutzbar ist, müssen alle Rechnungen auf einer Workstation innerhalb der klinischen Umgebung möglichst rasch durchführbar sein. Um dem Arzt zudem jederzeit die Kontrolle über alle Teilschritte des Rechenprozesses zu gestatten, ist der gesamte Ablauf geeignet zu visualisieren. Methoden der wissenschaftlichen Visualisierung, einem Grenzgebiet zwischen Mathematik und Informatik, werden demge-

mäß eine ebenso wichtige Rolle spielen wie Methoden der Numerischen Mathematik. Sämtliche Teilschritte der Therapieplanung werden in einem sogenannten *virtuellen Labor* im Computer zusammengefasst.

Im Folgenden wollen wir einige dieser Teilschritte herausgreifen, um sie genauer zu beschreiben.

Markierung von Gewebegrenzen. Zum Aufbau eines virtuellen Patienten gehen wir heute aus von einem Stapel von ca. 50–60 Computertomogrammen (CT) – siehe Abbildung 2. Dieser Stapel von Bilder enthält lediglich Informationen über die Dichte in den ausgewählten Körperquerschnitten.

Wir benötigen jedoch zusätzliche Informationen über die elektrischen und physiologischen Eigenschaften der einzelnen Körperteile, um die oben genannten Gleichungen lösen zu können – und dies schließlich in drei Raumdimensionen. In einem ersten Schritt, der sogenannten Segmentierung, muss deshalb die fehlende Information aus den CTs herausgeholt werden. Dieses äußerst schwierige Problem der Informatik wurde bisher am Deutschen Herzzentrum Berlin behandelt. Ziel ist, einzelne Knochen, Gewebe und Organe zu erkennen und ihre Grenzen möglichst genau zu markieren. Die Markierung der Grenzen ist nicht vollkommen automatisierbar, erfordert also zum Teil den interaktiven Einsatz von medizinischem Personal. Insbesondere die Entscheidung, welche Bereiche als Tumoren und welche als gesund einzustufen sind, sollte naturgemäß vom Arzt, nicht etwa vom Mathematiker getroffen und verantwortet werden. Wir können allerdings

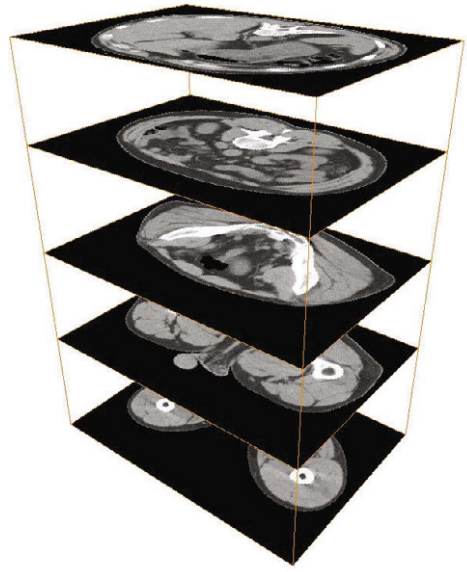


Abbildung 2. Stapel von Computertomogrammen

den Arzt (oder natürlich auch die Ärztin) beim Einzeichnen der Gewebegrenzen unterstützen: dazu haben wir eigens einen *intelligenten Griffel* entwickelt, in dem ebenfalls eine gute Portion Mathematik steckt.

Ausdünnung von Gittern. Aus dem Satz von segmentierten zweidimensionalen CT-Bildern bauen wir in einem nächsten Schritt ein dreidimensionales Gittermodell des Patienten auf. Wählt man dazu die übliche informatische Methode, so entstehen zunächst „zu viele“ Gitterpunkte (siehe Abbildung 3 links). Als Konsequenz daraus würden in einem späteren Teilschritt unsere Berechnungen der elektrischen Energie und der Temperatur „zu langsam“; der Rechenaufwand der von uns verwendeten Methoden zur Lösung der Gleichungen ist nämlich proportional zur Anzahl der verwendeten Gitterpunkte. Mit Blick auf diese späteren Rechnungen dünnen wir deswegen bereits in diesem Teilschritt die Raumgitter derart aus, dass nur noch das Wesentliche der Geometrie des Patienten abgebildet wird. Auch für diese Aufgabe haben wir speziell ein leistungsfähiges mathematisches Lösungsverfahren entwickelt (siehe Abbildung 3 rechts). In typischen Beispielen von Patienten sparen wir damit mehr als einen Faktor 10 an Rechenzeit und Speicherplatz ein – ein wichtiger Gesichtspunkt für die klinische Anwendbarkeit unserer Methodik.

Virtueller Patient. So entsteht schließlich ein ausreichend genaues Abbild des Patienten im Rechner, der virtuelle Patient (siehe Abbildung 4). In ihm ist die Geometrie des realen Patienten hinreichend genau wiedergegeben; zudem sind die einzelnen Körperteile mit ihren elektrischen Eigenschaften (etwa Dielektrizitätskonstanten), ihren thermischen Eigenschaften (etwa spezifischen Wärmen)

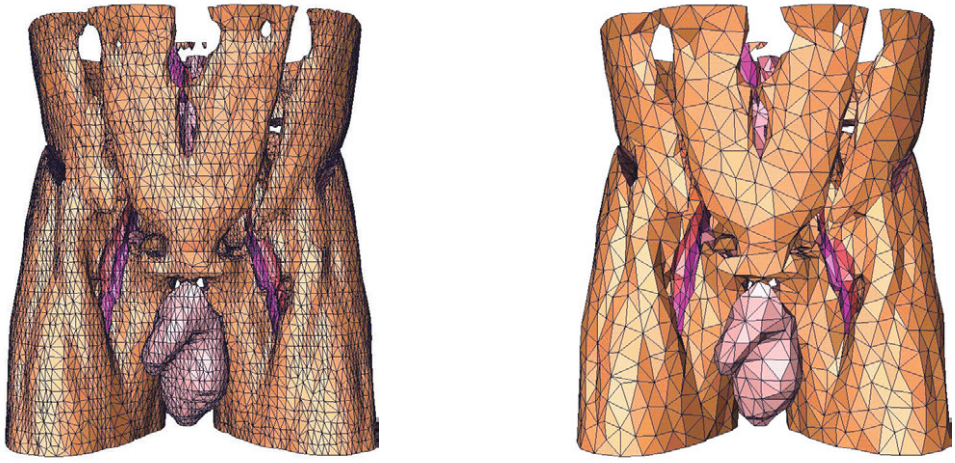


Abbildung 3. Ausdünnung dreidimensionaler Gitter