

Philosophische Bibliothek · BoD

Nikolaus von Kues  
Die mathematischen Schriften

Meiner





Schriften des  
NIKOLAUS VON KUES

in deutscher Übersetzung

im Auftrag der  
Heidelberger Akademie der Wissenschaften  
herausgegeben von

ERNST HOFFMANN† · PAUL WILPERT†  
und KARL BORMANN

Heft 11



NIKOLAUS VON KUES

Die mathematischen  
Schriften

übersetzt von

JOSEPHA HOFMANN

mit einer Einführung und Anmerkungen

versehen von

JOSEPH EHRENFRIED HOFMANN



VERLAG VON FELIX MEINER  
HAMBURG

Im Digitaldruck »on demand« hergestelltes,  
inhaltlich mit der 2. verbesserten Auflage von 1980 identisches  
Exemplar. Wir bitten um Verständnis für unvermeidliche Abwei-  
chungen in der Ausstattung, die der Einzelfertigung geschuldet  
sind. Weitere Informationen unter: [www.meiner.de/bod](http://www.meiner.de/bod).

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation  
in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographi-  
sche Daten sind im Internet über <http://portal.dnb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-7873-0491-2

ISBN eBook: 978-3-7873-2586-3

© Felix Meiner Verlag GmbH, Hamburg 1980. Alle Rechte vor-  
behalten. Dies gilt auch für Vervielfältigungen, Übertragungen,  
Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung  
in elektronischen Systemen, soweit es nicht §§ 53 und 54 URG  
ausdrücklich gestatten. Gesamtherstellung: BoD, Norderstedt.  
Gedruckt auf alterungsbeständigem Werkdruckpapier, hergestellt  
aus 100 % chlorfrei gebleichtem Zellstoff. Printed in Germany.

[www.meiner.de](http://www.meiner.de)

## VORWORT ZUR ZWEITEN AUFLAGE

Die zweite Auflage blieb in Einführung, Übersetzung und Anmerkungen unverändert; das Handschriftenverzeichnis und das Schriftenverzeichnis wurden ergänzt. Sofern die übersetzten Texte im *Straßburger* Druck von 1488 (Nachdruck Berlin 1967) enthalten sind, wurden ihnen die Paragraphenzahlen beigegeben.

Köln, im August 1979

KARL BORMANN

als Herausgeber der Schriftenreihe

## VORWORT ZUR ERSTEN AUFLAGE

Die vorliegende Übersetzung hält sich bewußt möglichst eng an den Wortbestand des lateinischen Textes, um so das Ringen des Nichtfachmannes mit mathematischen Problemen klar hervortreten zu lassen und damit seine Umwege — und auch Irrwege — verständlicher zu machen. Einen kurzen Überblick über die fachlichen Hauptergebnisse findet der Leser in moderner Ausdrucksweise in der Einführung.

Wir möchten nicht versäumen, der Cusanus-Kommission der Heidelberger Akademie und vor allem Herrn Professor E. HOFFMANN für die Bereitstellung der nötigen Unterlagen und die freundliche Unterstützung bei allen unsern vorbereitenden Arbeiten unsern geziemenden Dank auszusprechen; Dank schulden wir auch Herrn Ministerialrat Dr. E. LÖFFLER-Stuttgart und Herrn cand. math. H. SALZMANN-Augsburg für die gewissenhafte

Unterstützung bei Durchsicht der Korrekturen und dem Verlag für die Sorgfalt bei der Anfertigung des Satzes und der äußeren Ausstattung des Büchleins.

Ichtenhausen, den 6. Dezember 1950

JOSEPHA u. JOSEPH EHRENFRIED HOFMANN

# INHALTSVERZEICHNIS

|                                                                                                                                            |       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| I. Teil: Zur Einführung . . . . .                                                                                                          | VII   |
| Zur Textüberlieferung . . . . .                                                                                                            | XLVI  |
| Die angezogenen Handschriften . . . . .                                                                                                    | L     |
| Die Drucke der mathematischen Schriften . . . . .                                                                                          | LI    |
| II. Teil: Die Texte . . . . .                                                                                                              | 1—182 |
| 1. Von den Geometrischen Verwandlungen . . . . .<br>( <i>De geometricis transmutationibus</i> )                                            | 3     |
| 2. Von den Arithmetischen Ergänzungen . . . . .<br>( <i>De arithmeticis complementis</i> )                                                 | 29    |
| 3. Von der Quadratur des Kreises . . . . .<br>( <i>De circuli quadratura</i> )                                                             | 36    |
| 4. Die Kreisquadratur . . . . .<br>( <i>Quadratura circuli</i> )                                                                           | 58    |
| 5. Von den Mathematischen Ergänzungen . . . . .<br>( <i>De mathematicis complementis</i> )                                                 | 68    |
| 6. Magister Paulus an den Kardinal Nikolaus<br>von Cues . . . . .<br>( <i>Magister Paulus ad Nicolaum Cusanum</i><br><i>Cardinalem</i> ) . | 128   |
| 7. Erklärung der Kurvenausstreckung . . . . .<br>( <i>Declaratio rectilineationis curvae</i> )                                             | 132   |
| 8. Über das eine Maß des Geraden und Ge-<br>krümmten . . . . .<br>( <i>De una recti curvique mensura</i> )                                 | 136   |
| 9. Der Dialog über die Quadratur des Kreises . . . . .<br>( <i>Dialogus de circuli quadratura</i> )                                        | 143   |
| 10. Die Kaiserliche Quadratur des Kreises . . . . .<br>( <i>De caesarea circuli quadratura</i> )                                           | 151   |
| 11. Über die Mathematische Vollendung . . . . .<br>( <i>De mathematica perfectione</i> )                                                   | 160   |
| 12. Der Goldene Satz in der Mathematik . . . . .<br>( <i>Aurea propositio in mathematicis</i> )                                            | 178   |

## VI

## Inhaltsverzeichnis

|                                                                   |         |
|-------------------------------------------------------------------|---------|
| III. Teil: Anmerkungen zur Einführung und zu den Texten . . . . . | 183—252 |
| Anmerkungen zur Einführung . . . . .                              | 185     |
| Anmerkungen zu den Texten . . . . .                               | 189—252 |
| 1. Zu den Geometrischen Verwandlungen . . . . .                   | 189     |
| 2. Zu den Arithmetischen Ergänzungen . . . . .                    | 198     |
| 3. Zur Quadratur des Kreises . . . . .                            | 200     |
| 4. Zur Kreisquadratur . . . . .                                   | 208     |
| 5. Zu den Mathematischen Ergänzungen . . . . .                    | 213     |
| 6. Zum Brief Toscanellis an den Cusaner . . . . .                 | 233     |
| 7. Zur Erklärung der Kurvenausstreckung . . . . .                 | 235     |
| 8. Zum einen Maß des Geraden und Gekrümmten . . . . .             | 237     |
| 9. Zum Dialog über die Quadratur des Kreises . . . . .            | 240     |
| 10. Zur Kaiserlichen Quadratur des Kreises . . . . .              | 242     |
| 11. Zur Mathematischen Vollendung . . . . .                       | 245     |
| 12. Zum Goldenen Satz in der Mathematik . . . . .                 | 251     |
| Namen- und Schriftenverzeichnis . . . . .                         | 253     |
| Angeführte Schriften des Cusanus . . . . .                        | 263     |
| Sachweiser . . . . .                                              | 265     |

# **ZUR EINFÜHRUNG**



*Oportet autem attingere sensum volentem potius supra verborum vim intellectum efferre quam proprietatibus vocabulorum insistere, quae tantis intellectualibus mysteriis proprie adaptari non possunt.*

*De doct. ign. I, 2.*

Wenn wir den mathematischen Schriften des CUSANERS gerecht werden wollen, müssen wir uns stets vor Augen halten, daß hier nicht der Fachmathematiker zu uns spricht, sondern der Philosoph, dem es letztlich nicht um das reine Fachwissen geht, sondern um die symbolhafte Ausdeutung mathematischer Zusammenhänge. Die Worte in der *Docta ignorantia* I, 11, wo gesagt wird, daß wir im Streben nach der Erfassung göttlicher Wahrheiten die stärkste Unterstützung von der Mathematik erhoffen dürfen — als Gewährsleute werden PYTHAGORAS, PLATON, ARISTOTELES, BOËTHIUS und AUGUSTINUS angeführt — gelten nicht der Fachwissenschaft, sondern der auf mathematische Bezeichnungen und Einsichten zu stützenden Symbolik, wie das in I, 12 des Näheren ausgeführt wird.

Aber der CUSANER begnügt sich nicht mit dieser Auffassung, die das ganze Mittelalter hindurch die herrschende war, sondern er ringt ernsthaft um mathematische Fragestellungen und Beweise, und seine mathematischen Traktate behandeln wirklich mathematische Gegenstände, obwohl sie im Schatten seiner Philosophie stehen. Während REGIOMONTAN, der Fachmathematiker und etwas jüngere Zeitgenosse, das Wissen seiner Zeit in der Trigonometrie, in der Geometrie und in der Zahlentheorie um ein Bedeutendes vermehrt, beschränkt sich der CUSANER ausschließlich auf das Doppelproblem der Ausstreckung und Quadratur des Kreises, das er von der Abhandlung über die *Geometrischen Verwandlungen* des Jahres

1445 bis zum *Goldenen Satz in der Mathematik* vom Jahr 1459 auf immer wieder neuen Wegen angegangen und behandelt hat. Fast in jeder der elf Schriften, die sich auf diese 14 Jahre verteilen, spricht er ausdrücklich davon, daß er diese mühevollen Untersuchungen nur um eines wichtigen Zweckes willen anstellt; denn es gelte den Zugang zu höheren Wissenszweigen zu gewinnen, und in der letzten Abhandlung, der *Aurea propositio*, steht am Schluß der Hinweis auf den dreieinigen Urgrund, auf den alle höhere Spekulation hinzielen müsse.

So ist die Mathematik für den CUSANER eine Hilfswissenschaft, aber doch eine echte Wissenschaft, deren Eigenart anerkannt und deren Problematik durchaus ernst genommen wird. Deshalb ist es interessant, des Näheren zu verfolgen, wie sich der Philosoph mit dieser Wissenschaft auseinandersetzt und wie er sich mit ihren Ideenbildungen immer besser vertraut macht.

Über das, was der CUSANER von früher her an mathematischem Rüstzeug mitgebracht hat, sind wir nur unzureichend unterrichtet. Als sicher dürfen wir annehmen, daß er bereits während seiner Studienzeit beim obligatorischen Besuch der allgemeinen Vorlesungen in der Artistenfakultät mit den *Institutiones arithmeticae* des BOËTHIUS bekannt wurde, deren zum Teil zahlenmystisch gefärbter Inhalt seinen eigenen Ansichten in besonderem Maße zusagen mochte. Schon in der *Docta ignorantia* wird an mehreren Stellen auf das Gedankengut der *Institutiones arithmeticae* Bezug genommen, vor allem in dem oben erwähnten 11. Kapitel des ersten Buches, und in den späteren Schriften häufen sich derartige Anspielungen.

Sicher hat der CUSANER auch die einfacheren Teile der EUKLID-Übersetzung des CAMPANUS<sup>1</sup> kennengelernt — vielleicht zunächst nicht unmittelbar, sondern in der stark verkürzten Bearbeitung des BRADWARDINE, dessen *Geometria speculativa*<sup>2</sup> als ein brauchbares und hinlänglich einfaches Schulbuch sehr geschätzt wurde. Dieses Werk, dessen Einfluß auf die mathematischen Schriften des CU-

SANERS außerordentlich weit reicht, enthält auch Hinweise auf einige mathematische Stellen bei ARISTOTELES<sup>3</sup>; ferner werden die Hauptsätze aus der damals gerade in lateinischer Übersetzung bekanntgewordenen isoperimetrischen Abhandlung des ZENODOROS wiedergegeben<sup>4</sup>. Besonders interessant ist die Erwähnung der ARCHIMEDISCHEN *Circuli dimensio*<sup>5</sup>, über die man auf so engem Raum nicht eingehender berichten könne. BRADWARDINE kennt zwar den Zusammenhang zwischen Kreisumfang und Kreisfläche, hält jedoch den Wert  $\pi \approx \frac{22}{7}$  für genau und beruft sich hierfür ausdrücklich auf ARCHIMEDES als Autorität; das wäre nicht möglich gewesen, wenn er wirklich eine lateinische Übersetzung der Abhandlung vor Augen gehabt hätte. Wer sein Gewährsmann war, ist nicht sicher festzustellen.

In der *Docta ignorantia* wird weder EUKLID noch CAMPANUS noch auch BRADWARDINE namentlich erwähnt, aber zwei interessante Einzelheiten stehen vermutlich in engerer Beziehung zu BRADWARDINE bzw. zu CAMPANUS. Die eine findet sich in I, 13, wo der CUSANER jene Kreise betrachtet, die einander in einem Punkte gleichsinnig berühren. Er sieht die gemeinsame Tangente als den größten unter diesen Kreisen an, dem das Maximum an *rectitudo* und das Minimum an *curvitas* zukomme. Die beigesetzte Figur stimmt im wesentlichen mit einer aus der *Geometria speculativa*<sup>6</sup> überein, nicht aber mit jener der Vorlage aus CAMPANUS<sup>7</sup>. Die CUSANISCHE Überlegung mag aus dem ihm vorliegenden Text durch selbständige Weiterbildung entstanden sein.

Eine weitere Bezugnahme auf BRADWARDINE<sup>8</sup> oder CAMPANUS<sup>9</sup> sehen wir im Text der *Docta ignorantia* III, 1, wo die Frage angeschnitten wird, ob man aus der Existenz kleinerer und größerer Werte hinsichtlich einer bestimmten Größe auf die Existenz einer zu ihr gleichen Größe schließen dürfe. Der CUSANER leugnet dies mit aller Entschiedenheit; z. B. dürfe man weder aus der Existenz des einbeschriebenen und umbeschriebenen Quadrats am

Kreise auf die Existenz eines zum Kreise flächengleichen Quadrats schließen<sup>10</sup>, noch auch aus der Existenz zweier geradliniger Winkel, von denen der eine kleiner, der andere größer sei als der sog. Inzidenzwinkel (zwischen Kreissehne und Kreisbogen) auf die Existenz eines zum Inzidenzwinkel gleichen geradlinigen Winkels. Auf diese Angelegenheit werden wir unten (s. XX/XXI) noch genauer zurückkommen.

Anscheinend hat sich der CUSANER schon während seiner Studienzeit lebhaft für mathematische Dinge interessiert. Diese Vorliebe hat ihn, der seit 1417 an der Universität Padua die Rechte betrieb, noch im Jahr 1422 — also kurz vor Abschluß seiner Studien — in die mathematischen Vorlesungen BELDOMANDIS geführt, der eben erst die Professur für Musik und Astrologie erhalten hatte, und sich als Verfasser wohldurchdachter und ziemlich selbständiger Lehrbücher<sup>11</sup> eines bedeutenden Rufes erfreute.

Unter den Hörern BELDOMANDIS befand sich auch TOSCANELLI, der Sohn eines Florentiner Arztes, mit dem der CUSANER alsbald in enge freundschaftliche und wissenschaftliche Beziehungen trat<sup>12</sup>. TOSCANELLI hatte sich vorzügliches Fachwissen auf dem Gebiete der Mathematik und Astronomie erworben; von ihm hat der CUSANER auf dem Gebiete der exakten Naturwissenschaften viele allgemeine und fachliche Anregungen empfangen. Wie hoch er das Können des klugen Florentiners einschätzte, zeigt uns der Umstand, daß er ihm seine ersten beiden mathematischen Abhandlungen, die *Transmutationes geometricae* und die *Complementa arithmetica*, gewidmet hat.

Ob sich der CUSANER auch unmittelbar nach Abschluß seiner Studien noch mit rein mathematischen Gegenständen befaßt hat, wissen wir nicht. Daß in ihm das Interesse an mathematischen Fragen rege geblieben ist, lehrt uns eine interessante Einzelheit: Im Jahr 1428 hat er sich LULLS Traktat von der *Quadratur und Triangulatur des Kreises* eigenhändig abgeschrieben, und zwar kennzeich-

nenderweise nur den ersten mathematischen Teil, nicht aber die symbolisch-theologische Fortsetzung<sup>13</sup>.

Die LULLSCHE Abhandlung ist vom rein mathematischen Standpunkt aus sehr unbedeutend; sie enthält jedoch einige allgemeine Gedanken, die sich mit der Auffassung des CUSANERS stark berühren. Besonders interessant ist für uns die einleitende Bemerkung<sup>14</sup>: Strecken und Kreisbögen können als ungleichartige Größen nicht ins Verhältnis gesetzt werden, und Bögen sind auch nicht vermittle des Zirkels durch Strecken meßbar. Deshalb muß man als Mathematiker in seinem Sinne an Stelle der wirklichen Strecken und Bögen ihre Ideen setzen und diese in der Vorstellung zum Vergleich bringen.

Mit der Tatsache, daß sich Strecken und Bögen nicht ins Verhältnis setzen lassen, war der CUSANER aus ARISTOTELES wohlvertraut; in *De beryllo* 27 wird sogar ausdrücklich auf eine einschlägige Stelle in den *Metaphysica* verwiesen<sup>15</sup>. Dort wird auch erwähnt, daß diese Inkommensurabilität das Hauptargument des ARISTOTELES gegen die Möglichkeit einer exakten Kreisquadratur sei.

Wahrscheinlich kannte der CUSANER nicht nur einige der einschlägigen Stellen bei ARISTOTELES, sondern auch etwas von den zugehörigen Kommentaren, wie etwa den des BOËTHIUS<sup>16</sup> und den des AVERROËS<sup>17</sup>. Hingegen hatte er von der Quadratur vermittle der Mönchen, die in den *Complementa mathematica* erwähnt wird<sup>18</sup>, nur ganz unbestimmte Vorstellungen. Vielleicht lag ihm hierüber nichts anderes vor als die kurze und nichtssagende Bemerkung bei BRADWARDINE<sup>19</sup>: „Bei ARISTOTELES wird auch eine Quadratur vermittle der Mönchen erwähnt, jedoch als unrichtig bezeichnet, und deshalb ist es überflüssig, genauer darauf einzugehen.“ Daraus folgt, daß der CUSANER weder den Kommentar des SIMPLIKIOS zur ARISTOTELISCHEN *Physik* gesehen hat<sup>20</sup>, in dem die Mönchenquadratur eingehend behandelt wird, noch auch den des PHILOPONOS zu den *Analytica posteriora*<sup>21</sup>, der eine verkürzte Darstellung enthält, und ebensowenig die unter dem Titel *Quadratura circuli per lunulas* umlaufenden lateini-

schen Fassungen, von denen eine dem ALBERT VON SACHSEN vorlag<sup>22</sup>. Der Traktat ALBERTS zur Kreisquadratur<sup>23</sup> scheint dem CUSANER nicht bekanntgeworden zu sein, und ebensowenig die älteren Studien des FRANCO VON LÜTTICH<sup>24</sup> und des JORDANUS NEMORARIUS<sup>25</sup> zum gleichen Gegenstand.

Auch das (etwas billige) Verfahren LULLS, an Stelle der wirklichen Figuren gedachte treten zu lassen, um vermutete, aber nicht unmittelbar aus der Anschauung erkennbare Zusammenhänge nachweisen zu können, war dem CUSANER nichts Neues. Er kannte Ähnliches schon längst aus den von ihm mit Leidenschaft studierten NEU-PLATONISCHEN Schriften; später zitiert er<sup>26</sup> als maßgebliche Autorität die Schrift *De divinis nominibus* des von ihm so hoch verehrten PSEUDO-DIONYSIOS<sup>27</sup>. Das von ihm selbst verwendete Verfahren ist viel feiner und besser durchdacht: es ist die sog. *visio intellectualis*, die bereits in der *Docta ignorantia* I, 4 und etwas eingehender in *De coniecturis* II, 2 und dann ganz genau in *De beryllo* geschildert und auch in den mathematischen Schriften immer wieder angewendet wird<sup>28</sup>.

Die Erkenntnis ist für den CUSANER im wesentlichen von dreifacher Art: *sensibilis*, *rationalis* und *intellectualis*. Die Dinge der Sinnenwelt sind ihrem Wesen nach durchaus unvollkommen, wie etwa eine auf einer Tafel eingeritzte Figur. Nicht von diesen Gebilden handelt der Mathematiker, sondern von den nur in seiner Vorstellung vorhandenen und rein gedachten Figuren<sup>29</sup>. Was hierbei durch die gewöhnliche Schlußweise hergeleitet werden kann, würde vom CUSANER in den Bereich der rationalen Erkenntnis verwiesen werden. Tiefer dringt die *visio intellectualis*, die als letztes Hilfsmittel dienen muß, wenn die rationalen Methoden versagen. Dies tritt z. B. bei Betrachtung unendlich großer Gebilde ein, wie sie in der *Docta ignorantia* I, 14 und I, 15 behandelt werden. Vermöge der *visio intellectualis* wird das unendliche Dreieck gleichzeitig auch als Kreis angesehen. Ähnlich liegen die

Dinge bei Untersuchung unendlich kleiner Gebilde; nur in diesem Bereich ist es möglich, daß Sehne und Bogen zusammenfallen<sup>30</sup>. Etwas anders muß man vorgehen, wenn es gilt, den Kreis zu quadrieren. Das ist in der Welt des Gedachten grundsätzlich unmöglich; hingegen läßt sich die Quadratur des Kreises im Bereich des Handgreiflichen immer genauer und genauer vollziehen — schließlich so genau, daß ein sinnfälliger Unterschied überhaupt nicht mehr feststellbar ist<sup>31</sup>.

In der *visio intellectualis* und allem, was mit ihr zusammenhängt, steckt der entscheidende außermathematische Bestandteil der CUSANISCHEN Mathematik. Gewiß ist dieses Verfahren vom streng wissenschaftlichen Standpunkt aus völlig unzulässig, aber es wird mit soviel Takt verwendet, daß im Grunde nur äußere Einzelergebnisse unrichtig werden; der tiefere Zusammenhang ist fast immer richtig erfaßt. Dieses feine Empfinden für das, was möglich und was unmöglich ist, macht die eigentliche Stärke des CUSANERS auf mathematischem Gebiet aus. Es läßt uns die vielen Unvollkommenheiten in der Einzeldurchführung vergessen und nötigt uns die höchste Achtung vor dem kühnen Denker ab, der es als Nichtfachmann gewagt hat, mit seinen noch gänzlich unzureichenden Hilfsmitteln bis zur Untersuchung funktioneller Zusammenhänge vorzustoßen, deren Bedeutung selbst dem tüchtigsten seiner Zeitgenossen nur von ferne dämmerte.

Das entscheidend Neue, was der CUSANER mit seiner *visio intellectualis* gefunden hat, ist das Prinzip der *coincidentia oppositorum*, das ihm auf der Rückfahrt von Konstantinopel im Jahre 1437/38 eingebungsgleich aufgegangen ist. In der *Docta ignorantia* vom Frühjahr 1440 wird ein erster Überblick über die Kraft der neuen Betrachtungsweise gegeben, und das unter fortwährender Heranziehung mathematisierender Schlußweisen, die jedoch nicht im Sinne strenger oder gefühlsmäßiger Fachbetrachtungen, sondern in sinnbildlich vergleichender Form verwendet werden. Der CUSANER will z. B. in I, 3 klarmachen,

daß all unser irdisches Wissen nur Stückwerk ist, und daß uns die volle Wahrheit für immer verschlossen bleibt. Dies geschieht durch einen doppelten Vergleich. Einerseits wird die Wahrheit als das ewig Unveränderliche, Absolute und Unendliche erklärt, das sich der artgemäßen Erkennbarkeit durch unsern zeitlich bedingten und auf das Endliche beschränkten Verstand entzieht und daher prinzipiell unerkannt bleibt, ähnlich wie das Unendliche, das niemals zum Endlichen in ein meßbares Verhältnis zu treten vermag. Andererseits wird die uns allein zugängliche gradweise Erkenntnis und die uns unzugängliche Wahrheit mit den Beziehungen zwischen den einbeschriebenen regelmäßigen Vielecken und dem Kreise verglichen. Wohl läßt sich unser Einzelwissen stufenweise vergrößern und damit der Wahrheit stärker annähern, genau so, wie das Vieleck dem Kreis durch Vergrößern seiner Eckenzahl immer ähnlicher wird; aber niemals ist eine volle Übereinstimmung erzielbar, genau so wenig wie beim Vieleck, das auch nicht bei Vergrößern der Eckenzahl bis ins Unendliche zum Kreise wird. Demgemäß ist unser Wissen nur sehr unvollkommen; so erscheint uns die Wahrheit als eine Möglichkeit: in Wirklichkeit ist sie die vollendete Notwendigkeit und überdies das absolute und unveränderliche Maximum des Erkennbaren. Auf Grund dieser Überlegung kommt der CUSANER zu der Auffassung, daß zwischen Größen, die sich *sensualiter*, *rationaliter* oder *intellectualiter* unterscheiden, niemals eine präzise Gleichheit möglich ist; denn dies würde auf ein Maximum an Gleichheit hinauskommen, das selbst die Welt des Intelligibeln überschritte.

Nun wendet sich der CUSANER zur näheren Untersuchung der absoluten Extreme<sup>32</sup>. Er unterscheidet zwischen Maximum und Minimum und erklärt das Größtmögliche als das Maximum an Großheit, das Kleinstmögliche als das Maximum an Kleinheit. Mit Hilfe einer *visio intellectualis* sieht er vom Begriff der Großheit und Kleinheit ab und kommt auf diese Weise zu der Auffassung, daß das Maximum und das Minimum — jedes von ihnen als ein

reines Maximum aufzufassen — miteinander zusammenfallen müssen. Hierin besteht das Wesen der *coincidentia oppositorum*, mittels deren er auf allen Wissensgebieten neue Erkenntnisse zu gewinnen und bisher als unlösbar angesehene Probleme zu meistern hofft.

Zunächst stellt er fest<sup>33</sup>, daß es nur ein Maximum geben kann. Alsdann geht er zur Anwendung seiner Methode auf die gewöhnlichen Zahlen über. Jede ganze Zahl entsteht durch Setzen von Einheiten; eine größte endliche Zahl kann es nicht geben, da jede Zahl vergrößerungsfähig ist. Als kleinstmögliche Zahl muß die Eins angesehen werden; denn sie läßt sich nicht weiter vermindern. Daher ist sie die schlechthin kleinste unter den Zahlen und muß mit der größtmöglichen Zahl, die als unendliche nicht benannt werden kann, zusammenfallen. Sie ist Ursprung aller Zahlen, aber noch nicht selbst Zahl. Mit dieser letzten Bemerkung tritt der CUSANER der alten PYTHAGOREISCHEN Lehre bei, die ihm aus BOËTHIUS<sup>34</sup> bekannt war. Er hält es nicht mit BELDOMANDI, der als einer der ersten bereit war, die Eins als Zahl anzuerkennen<sup>35</sup>. An späterer Stelle<sup>36</sup> erklärt der CUSANER den Extremwert als das natürliche Maß der Zwischenwerte. Er äußert sich auch genauer darüber, wie jede Zahl aus der Einheit durch fortwährendes Setzen von Einheiten entsteht<sup>37</sup>. Diese Erzeugung bezeichnet er als eine *explicatio*, das Enthaltensein der Einheit in jeder Zahl als eine *complicatio*. Er betont, daß die Einheit deshalb als die größtmögliche Zahl anzusehen ist, weil sie als einzige Zahl ausnahmslos in jeder andern enthalten ist.

Eine ähnliche Sonderstellung wie der Einheit unter den Zahlen (diskrete Größen) kommt dem Punkt unter den geometrischen Gebilden (kontinuierliche Größen) zu<sup>38</sup>. Durch eine erste *explicatio* geht aus dem Punkt die Linie, durch je eine weitere *explicatio* die Fläche und der Körper hervor, und bei dieser *explicatio* entstehen der unendliche Kreis und die unendliche Kugel als zusammenfallende Maxima, die ihrerseits wieder mit dem erzeugenden Punkt koinzidieren. In diesem Sinne besteht die Linie aus der Gesamtheit der auf ihr gelegenen Punkte.

Was der CUSANER hier andeutet, kommt auf ein Wiederaufleben der Indivisibeln-Vorstellungen der Atomistiker hinaus, die von der PLATONISCHEN Akademie und später von der NEUPLATONISCHEN Schule aufs heftigste bekämpft worden waren. Wir sind nicht sicher, ob der CUSANER seine Auffassung selbständig entwickelt hat oder ob er hier einer für uns noch nicht klar erkennbaren, vielleicht mündlichen Tradition folgt. Als Übermittler käme der Skeptiker SEXTUS EMPIRICUS in Frage, der in seiner Schrift *Adversus mathematicos*<sup>39</sup> eine sehr klare Darstellung der Indivisibeln-Lehre gibt, um sie dann mit vielen Gegengründen als unhaltbar zu erklären und zu verwerfen. Auf jeden Fall steht fest, daß die Indivisibeln-Vorstellungen des 17. Jahrhunderts mit der Auffassung des CUSANERS in Verbindung gebracht werden müssen, doch sind die näheren Einzelheiten noch nicht hinreichend genau bekannt.

Bei einer Diskussion über die Dreieinigkeit der göttlichen Personen spricht der CUSANER davon<sup>40</sup>, daß das Dreieck die einfachste unter allen geradlinigen geometrischen Figuren und daher das Minimum unter den Vieleckfiguren sei und sich zu diesen verhalte wie die Einheit zu den Zahlen. Aus der weiteren Erörterung geht hervor, daß der CUSANER hier von unendlich großen Vielecken spricht, so daß wir es mit einer außermathematischen Angelegenheit zu tun haben. Aber gerade diese Stelle ist es, aus der durch Umwenden und Kombination mit dem Inhalt des Kapitels aus BRADWARDINE über die isoperimetrischen Figuren<sup>41</sup> etwas Neues entstehen sollte, nämlich die Methode zur Quadratur des Kreises in der ersten Prämisse der *Transmutationes geometricae*<sup>42</sup>. Wir erfahren aus dem Vorwort zu dieser seiner mathematischen Erstlingsschrift, was den CUSANER veranlaßt hat, das bisher ausschließlich beackerte Feld der symbolischen Mathematik zu verlassen und zur reinen Fachwissenschaft überzugehen<sup>43</sup>: es war das ungelöste Problem der Kreisquadratur, das ihn reizte, und das er vermittels seiner *coincidentia oppositorum* zu bezwingen hoffte. Unzählige Ansätze hatte er erfolglos un-

ternommen und alles ihm Zugängliche über den Gegenstand durchgearbeitet: er hatte sich vor allem mit der Lösungsmöglichkeit des Problems eingehend beschäftigt und war schließlich zu der Erkenntnis vorgedrungen, daß man hier vermittels der gewöhnlichen mathematischen Methoden nicht zum Ziel kommen könne.

Insbesondere aus der *De circuli quadratura*, wo das ganze Existenzproblem mit allem Für und Wider durchgesprochen wird<sup>44</sup>, ersehen wir, was der CUSANER in den Schriften seiner Vorgänger gefunden hatte. Zwei Grundfassungen stellt er einander entgegen: nach der einen ist die Kreisquadratur möglich, weil es dort, wo ein Größer und ein Kleiner vorhanden ist, immer auch ein Gleiches gibt (Zwischenwertsatz); nach der andern ist die Kreisquadratur unmöglich, weil der Zwischenwertsatz ungültig ist. Der CUSANER bekennt sich nach eingehender Diskussion zur zweiten Auffassung und beschränkt sich darauf, eine näherungsweise Kreisquadratur zu geben — näherungsweise jedoch nur in der Welt des Intelligibeln, während sie in der Welt des Sinnlich-Greifbaren so genau ist, daß man auch mit den feinsten Maßen keinen Unterschied zwischen dem näherungsweise konstruierten Quadrat und der Kreisfläche feststellen kann<sup>45</sup>.

Wir wissen nicht genau, welche Autoritäten es waren, in deren Schriften der CUSANER lesen konnte, daß die Kreisquadratur möglich sei, falls die Gültigkeit des Zwischenwertsatzes zugegeben werde. Wir dürfen jedoch mit ziemlicher Sicherheit annehmen, daß hier eine antike Tradition vorliegt, die sich auf die Methode des BRYSON bezieht. Über diese sind wir aus den ARISTOTELES-Kommentaren des ALEXANDER VON APHRODISIAS<sup>46</sup> und des PHILOPONOS<sup>47</sup> unterrichtet, allerdings nur in unzureichender Form. BRYSON soll am gegebenen Kreis ein einbeschriebenes und ein umbeschriebenes und ein zwischen beiden seitenparallel gelegenes regelmäßiges Vieleck konstruiert und behauptet haben, das letztere sei zum Kreis flächengleich; denn Zwischenvieleck und Kreis seien beide

kleiner als das umbeschriebene und größer als das einbeschriebene Vieleck, *und was größer und kleiner als dasselbe sei, sei auch gleich*. Über das Verfahren des BRYSON können wir uns hieraus kein Urteil bilden; denn es fehlt die Hauptsache: die konstruktive Bestimmung des Zwischenvielecks. Anders lägen die Dinge, falls wir annehmen dürften, daß ALEXANDER — er ist der Gewährsmann für PHILOPONOS, jedoch gleich diesem in mathematischen Angelegenheiten unzuverlässig — seine Vorlage mißverstanden hätte. Vielleicht wollte BRYSON nur die Möglichkeit der Kreisquadratur dartun! Dann wäre die lateinische Tradition, auf die sich der CUSANER stützt, von größter Bedeutung; denn in dieser Fassung heißt es nicht mehr, wie im griechischen Text<sup>48</sup>: *τὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ μείζονα καὶ ἐλάττωνα ἴσα ἀλλήλοις ἔστιν*, sondern einfach: *ubi dare est magis et minus, et est dare aequale*<sup>49</sup>. In dieser Fassung ist der Zwischenwertsatz (unter Annahme stetiger Veränderungen) richtig und die Betrachtungsweise BRYSONS für uns sinnvoll geworden, nicht aber für die antiken Philosophen und Mathematiker, die dem direkten Schluß bei Stetigkeitsbetrachtungen seit der Kritik ZENONS mißtrauten und nur mehr den indirekten Schluß verwendeten: *was weder größer noch kleiner ist, ist gleich*.

Im ausgehenden Mittelalter hatte sich die geistige Situation von Grund aus verändert. Man studierte — vor allem im Kreise der Pariser Nominalisten — die Stetigkeitseigenschaften des Kontinuums mit heißem Bemühen und wäre gern bereit gewesen, den Zwischenwertsatz anzuerkennen, hätte nicht die Kontingenzwinkelfrage und alles, was mit ihr zusammenhängt, ein unüberwindliches Hemmnis gebildet. Sie ist entstanden aus der etwas eigenartigen Fassung des Satzes III, 15 in den EUKLIDISCHEN *Elementen*, wo gesagt wird, der Winkel zwischen Kreisbogen und Tangente (der sog. Kontingenzwinkel) sei kleiner als jeder spitze Winkel. An dieser Stelle schaltet CAMPANUS den Zusatz ein, der sich gegen die Zulässigkeit des Zwischenwertsatzes richtet und, kurz gesagt, so lautet: Der

Halbkreiswinkel (zwischen dem Kreisdurchmesser und dem Kreisbogen) ist größer als jeder spitze und kleiner als der rechte Winkel; für ihn wären also die Voraussetzungen des Zwischenwertsatzes erfüllt. Trotzdem gibt es keinen geradlinigen Winkel, der gleich dem Halbkreiswinkel ist. Die nämliche Schlußweise findet sich auch bei BRADWARDINE, der sich ausdrücklich auf CAMPANUS bezieht, aber den EUKLIDISCHEN Satz und die zusätzliche Bemerkung um der Übersichtlichkeit willen auf zwei getrennte *conclusiones* verteilt<sup>50</sup>. Diese Stelle ist es, auf die sich der CUSANER schon in der *Docta ignorantia* III, 1 bei Ablehnung des Zwischenwertsatzes berufen hatte (vgl. oben S. XII).

Da also der Zwischenwertsatz für den CUSANER ungültig ist, ist auch die Kreisquadratur und alles, was daraus folgt, in der Welt des Intelligibeln unmöglich; möglich ist sie allein in der Welt des Sinnlich-Greifbaren, wo man grundsätzlich auf die letzte Präzision verzichten muß und an Stelle der strengen Gleichheit die näherungsweise zu setzen hat. Dort läßt sich die Quadratur sogar rational leisten — und das nach Ansicht des CUSANERS mit einem solchen Grad von Genauigkeit, daß die noch vorhandene Abweichung durch keinerlei irdisches Maß festgestellt werden kann.

Bei seinem ersten großen Ansturm auf das Problem der Kreisquadratur, von dem er in der Einleitung der *Transmutationes geometricae* berichtet, bedient sich der CUSANER der *coincidentia oppositorum* in folgender Weise<sup>51</sup>: Er sucht zwischen der Fläche des Kreises und der des Dreiecks andere geradlinig begrenzte und daher elementar quadrierbare Flächen so einzuschalten, daß die Dreiecksfläche zum Minimum und die Kreisfläche zum Maximum wird. Dies gelingt ihm, indem er lauter umfangsgleiche regelmäßige Vielecke benutzt — ein Gedanke, den er wohl aus BRADWARDINES Bericht über die isoperimetrischen Figuren entnommen hat<sup>52</sup>. Bis hierher ist alles Auseinandergesetzte auch mathematisch einwandfrei; jetzt aber

werden nicht weiter begründete Irrationalitätssätze vorgebracht wie etwa jener, daß die Fläche  $f_n$  eines willkürlich herausgegriffenen unter den umfangsgleichen regelmäßigen Vielecken und ebenso die Flächen  $r_n^2\pi$  und  $\varrho_n^2\pi$  der zugehörigen Um- und Inkreise zur Fläche  $f$  des Kreises irrational seien: Man könne ebensowenig durch Vervielfachen der Eckenzahl  $n$  zum Kreise gelangen wie im Bereich der natürlichen Zahlen zu einer (endlichen) größten<sup>53</sup>. Hier fühlen wir das Nachwirken der symbolischen Vorstellungen der *Docta ignorantia* deutlich durch; sie verführen den CUSANER zu der Meinung, ein Grenzwert  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  sei grundsätzlich ganzzahlig unvergleichbar

mit den Gliedern  $f_n$  der den Grenzwert erzeugenden Folge.

Das Entscheidende ist nun, wie die isoperimetrische Ausrundung des gleichseitigen Dreiecks vollzogen werden soll.

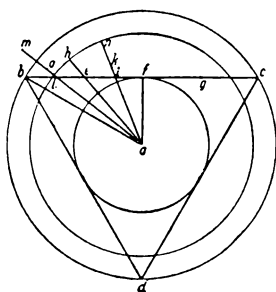


Abb. 1.

Um sie durchführen zu können, bedient sich der CUSANER einer Vorüberlegung von folgender Art<sup>54</sup>:  $\varrho_3 = af$  sei der Inkreis halbmesser,  $r_3 = ab$  der Umkreis halbmesser des Dreiecks und  $r = ah$  der Halbmesser des isoperimetrischen Kreises. Dann wird es (in der Welt des Greifbaren!) Lagen von  $ah$  geben, in welchen sich die Dreieckseite  $bc$  und  $ah$  nach ganzzahlig angebbaren Streckenverhältnissen schneiden.

Der CUSANER beginnt seine Konstruktion damit<sup>55</sup>, daß er die Halbseite  $fb$  des gleichseitigen Dreiecks vermöge der Teilpunkte  $i, e, l$  in vier gleiche Teile teilt und durch sie Strecken aus dem Dreiecksmittelpunkt  $a$  legt, die in bestimmtem Streckenverhältnis verlängert werden; z. B. — wenn wir den nach  $i, e$  oder  $l$  fallenden Punkt mit  $p$  und den zugehörigen Endpunkt der Verlängerung mit  $q$  bezeichnen — so, daß  $\frac{pq}{ap} = \frac{fp}{cb}$  oder  $= \left(\frac{fp}{fb}\right)^2$  oder  $= \frac{pb}{cb}$  wird.

In der *De circuli quadratura* sagte der CUSANER ganz offen, daß es sich hier um eine *visio intellectualis* handle. Wissenschaftlich läßt sich sein Verfahren in keiner Weise begründen, und nur der Erfolg gibt ihm eine tiefere Berechtigung. Der Erfolg, der den CUSANER lehrt, daß die sich ergebenden Strecken  $aq$  in der Lage  $p = i$  zu klein und in der Lage  $p = l$  zu groß werden. Daraus wird ganz naiv geschlossen, daß in der Mittellage  $e$  die richtige Strecke  $ah$  herauskommen muß. Durch die für ihn höchst auffällige Tatsache, daß sich jetzt in allen drei Fällen das nämliche Verhältnis  $\frac{eh}{ae} = \frac{1}{4}$  ergibt, sieht sich der CUSANER in seiner Auffassung wesentlich bestärkt.

Aus dem Bisherigen kann der Fachmann keine besondere Achtung vor den mathematischen Leistungen des CUSANERS gewinnen; vielleicht ist er sogar gewillt, das Ganze als hoffnungslose Phantastereien eines schlecht unterrichteten Dilettanten abzutun. Diese Beurteilung wäre ungerecht und würde am Kernpunkt der Sache vorbeigehen. Zunächst belehrt uns eine Stelle aus der *De circuli quadratura*<sup>56</sup> darüber, daß der CUSANER sehr wohl imstande ist, den sich ergebenden Wert von  $ah$  zu berechnen; er setzt das Verhältnis des Kreisdurchmessers  $2r$  zum Dreiecksumfang  $3bc$  gleich  $2^{1/2} \sqrt{1575} : 6 \sqrt{2700}$  und verrät uns durch diese Schreibweise, daß er den Inkreishalbmesser  $\varrho_3$ , von dem er ursprünglich als Einheit ausgegangen war, nunmehr durch Übergang zur nächsten Untereinheit gleich 60 gesetzt hat.

Andrerseits fügt er der Entwicklung in den *Transmutationes geometricae* eine über das Bisherige hinausgehende Verallgemeinerung des Ausrundungssatzes für irgend eines der isoperimetrischen Vielecke bei<sup>57</sup>: wird  $bc$  als die Seite des Vielecks  $f_n$  angesehen, dessen umfangsgleicher Kreis den Halbmesser  $ah = r$  besitzt, so läßt sich auch hier ein Teilpunkt  $p$  auf der Halbseite  $fb$  bestimmen, so daß  $\frac{pq}{ap}$  entweder gleich  $\frac{fp}{cb}$  oder gleich  $\left(\frac{fp}{fb}\right)^2$  wird. In

beiden Fällen, so behauptet der CUSANER völlig zu Recht, rückt der richtige Teilpunkt  $p$  mit zunehmendem  $n$  gegen den Punkt  $f$ , mit abnehmendem  $n$  gegen den Punkt  $b$  hin und erreicht mit  $n \rightarrow \infty$  den Punkt  $f$ , mit  $n = 3$  den Mittelpunkt  $e$  auf  $fb$ . Ein Beweis wird nicht gegeben; vielleicht hat sich der CUSANER den Zusammenhang nur durch Übergang vom gleichseitigen Dreieck zum regelmäßigen Sechseck klar gemacht.

Weit interessanter als die Ausrundung ist die zweite Prämisse der *Transmutationes geometricae*, bei der es um die Feststellung des Streckenverhältnisses zweier Kreisbögen geht. Der CUSANER schickt eine längere Erörterung über Dreiecke voraus, deren Seiten teilweise von Kreisbögen gebildet werden (wobei Überschneidungen nicht zulässig sein sollen) — eine Angelegenheit, die anscheinend von ihm selber ausgesonnen wurde<sup>58</sup>. Im geradlinigen Dreieck, so beginnt er, besteht Proportionalität zwischen entsprechenden Abschnitten, die von einer Seitenparallelen erzeugt werden; z. B. ist die Verbindungslinie zweier Seitenmitten genau gleich der Hälfte der dritten Seite. Werden die Seiten durch Kreisbögen ersetzt, die sinngemäß durch Bogenteilungen in entsprechende Abschnitte zu unterteilen sind, so ändert sich das Bild: wird ein Dreieck betrachtet, das zwei geradlinige Seiten enthält, während die dritte hinsichtlich des Dreieckinnern konvex gekrümmt ist, so ist die Verbindungsstrecke der Bogenmitte mit einer Seitenmitte größer als die Hälfte der dritten Seite, und Ähnliches gilt auch beim allgemeinen Abschnittsverhältnis. Ist der Bogen hinsichtlich des Dreieckinnern konkav, so haben wir das Umgekehrte. Entsprechendes ist auch dann noch erfüllt, wenn man von Dreiecken ausgeht, bei denen die eine Seite eine Strecke ist, während sich die beiden andern Seiten gleichartig hinsichtlich des Innern krümmen. Sind die beiden Bögen kongruent, jedoch hinsichtlich des Innern verschiedenartig gekrümmt, so ist die Verbindungs-

strecke entsprechender Teilpunkte auf den Bögen stets größer als der zugehörige geradlinige Abschnitt. Der CUSANER deutet für den Fall, daß die Teilpunkte auf die Bogenmitten zu liegen kommen, einen sehr zierlichen Beweis an, und zwar nicht nur für kongruente Bögen, sondern auch für inkongruente des nämlichen Halbmessers, sofern der konkave der kürzere ist. Soll aber in einem Dreieck Proportionalität zwischen den Verbindungsstrecken entsprechender Bogenteilpunkte und den zugehörigen Abschnitten der geradlinigen Seite bestehen, so muß der konkave Bogen der längere sein.

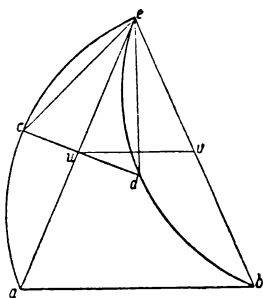


Abb. 2.

Nun konstruiert der CUSANER ein Dreieck, dessen einer Bogen gleich einem Viertelkreis  $bc$  und dessen abschließende gerade Seite gleich dem zugehörigen Halbmesser  $cm$  ist. Damit wäre der noch fehlende Bogen eigentlich schon bestimmt und abhängig von einer Gleichung vierten Grades. Das vermag der CUSANER nicht zu übersehen; deshalb versucht er es mit einer rein konstruktiven Lösung. Er zeichnet den zum Bogen  $bc$  kongruenten  $ai$  und den Halbkreis  $ade$ . Was nun

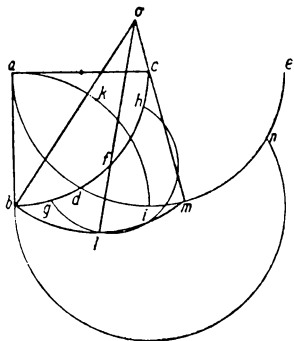


Abb. 3.

den Ergänzungsbogen  $blm$  betrifft, so gebe es für seinen Mittelpunkt zwei Grenzlagen, nämlich entweder den Punkt  $a$  (dann würde der Ergänzungsbogen mit  $bdc$  zusammenfallen), oder den Punkt  $i$  (unzutreffend). Im ersten Falle entstehe auf  $ade$  der Schnittpunkt  $d$ , im zweiten Falle der Schnittpunkt  $n$ ; die richtige Lage für die dritte Ecke sei die Bogenmitte  $m$  des Viertelbogens  $dn$ . Nun habe man

den Bogen  $bc$  in  $f$  zu halbieren und hierauf den Bogen  $bm$  mit dem Kreis vom Halbmesser  $\frac{cm}{2}$  um  $f$  in  $l$  zu schneiden; dann trafen sich die beiden verlängerten Strecken  $lf$  und  $mc$  in einem Punkte  $o$ . Werde durch diesen Punkt und durch irgendeinen Punkt  $f$  des Viertelbogens  $bc$  eine Gerade gezogen, so verhalte sich der auf dieser entstehende Abschnitt  $fl$  zwischen den beiden begrenzenden Dreieckbögen zur dritten Seite  $cm$  wie der Teilbogen  $df$  zum ganzen Viertelbogen  $bc$ .

Was der CUSANER hier vorführt, ist sehr dunkel ausgedrückt. OMNISANCTUS, der Herausgeber des Textes in der *Parisina*, kam mit seiner (obendrein noch verderbten) Vorlage nicht zurecht und entschloß sich daher zur Wiedergabe einer — wie er glaubte — sinngemäß ergänzten Konstruktion, die jedoch mit der vorstehenden Originalkonstruktion nichts Wesentliches gemein hat und daher übergangen werden kann<sup>59</sup>. Über die vielen geometrischen Unzulänglichkeiten des CUSANISCHEN Verfahrens wollen wir kein weiteres Wort verlieren, aber den originellen Grundgedanken gebührend hervorheben: ein krummliniges Dreieck zu ermitteln, worin die Verbindungsstrecke der Bogenmitten gleich der Hälfte der dritten Seite wird, und hieraus eine Näherungskonstruktion zur Teilung des Kreisbogens in einem gegebenen Streckenverhältnis zu entwickeln. Diese Näherung muß sehr gut werden; denn die Konstruktion trifft bei Durchlaufen des Viertelbogens in den Punkten  $b$ ,  $f$  und  $c$  genau zu. Der CUSANER hatte also einen sehr brauchbaren Gedanken konzipiert; die unverhältnismäßig großen Schwierigkeiten bei der praktischen Durchführung, denen er schließlich zum Opfer gefallen ist, konnte man bei dem damaligen Stand der Mathematik noch nicht überblicken: fehlte doch die wichtigste Grundvoraussetzung für derartige Untersuchungen, die algebraische Methode.

Zu diesen beiden Prämissen fügt der CUSANER in den *Transmutationes geometricae* zwei weitere hinzu, von denen sich die eine auf die Einschiebung zweier geometri-