UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DESCRIPTIVA DE CONJUNTOS

Carlos Augusto Di Prisco
Carlos Uzcátegui Aylwin

UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DESCRIPTIVA DE CONJUNTOS

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Di Prisco, Carlos Augusto, autor.
Una introducción a la teoría descriptiva de conjuntos / Carlos Augusto Di Prisco, Carlos Uzcátegui Aylwin. – Bogotá: Universidad de los Andes, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, Ediciones Uniandes, 2020.

XIV, 156 páginas: ilustraciones; 17 x 24 cm

ISBN 978-958-774-946-5

1. Teoría descriptiva de conjuntos I. Uzcátegui Aylwin, Carlos Enrique, autor. II. Universidad de los Andes (Colombia). Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas III. Tít.

CDD 511.322 SBUA

Primera edición: marzo del 2020

Ediciones Uniandes
Calle 19 n.° 3-10, oficina 1401
Bogotá, D. C., Colombia
Teléfono: 3394949, ext. 2133
infeduni@uniandes.edu.co
http://ediciones.uniandes.edu.co
http://ebooks.uniandes.edu.co

ISBN: 978-958-774-946-5
ISBN *e-book*: 978-958-774-947-2

Corrección de estilo: Laura Porras Montenegro
Diagramación interior en LaTeX: Patricia Chávez
Diseño de cubierta: La Central de Diseño S. A. S.

Impresión:
Imageprinting Ltda.
Cra. 27 n.° 76-38
Teléfonos: 6311350 - 6311736
Bogotá, D. C., Colombia

Impreso en Colombia – *Printed in Colombia*

CONTENIDO

PREFACIO

Este texto tiene su origen en las notas escritas para un curso dictado por los autores en la IV Escuela Venezolana de Matemáticas, realizada en la Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela en 1991. El curso llevaba como título Teoría descriptiva de conjuntos y la recta real, y estaba centrado, más que en la propia recta real, en el espacio de Baire y sus productos. Es bien sabido que el espacio de Baire, de las sucesiones de números naturales con la topología producto, es homeomorfo al espacio de los irracionales $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, y, por tanto, el título del curso estaba justificado.

A medida que ha transcurrido el tiempo, luego de aquella Escuela Venezolana de Matemáticas, cada uno de los autores ha tenido la oportunidad de usar las notas de 1991 como apoyo bibliográfico para otros cursos dictados tanto en la Universidad Central de Venezuela, la Universidad de los Andes (Mérida), el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas y, recientemente, en la Universidad de los Andes (Bogotá) y la Universidad Industrial de Santander. En cada una de esas oportunidades, nos pareció conveniente ampliar los temas tratados o cambiar el punto de vista de la presentación.

El presente libro es el resultado de esas variadas modificaciones y correcciones que hemos hecho a las notas de 1991, y pretende servir de introducción a la teoría descriptiva de espacios polacos, es decir, espacios topológicos separables que se pueden dotar de una métrica completa.

El libro está organizado de la siguiente manera. En el primer capítulo presentamos las propiedades básicas del espacio de Baire, el espacio de todas las sucesiones de números naturales con la topología producto. Este espacio es homeomorfo a los irracionales con la topología heredada de $\mathbb{R}$. Luego nos dedicamos a los espacios polacos y mostramos una caracterización del espacio de Baire. El capítulo 2 está dedicado al estudio de los subconjuntos borelianos de espacios polacos. Exponemos una demostración del teorema de isomorfismo que establece que todos los espacios polacos no numerables son Borel-isomorfos, es decir, dados dos espacios polacos no numerables, existe una biyección entre ellos que preserva conjuntos borelianos. En el capítulo 3 definimos los conjuntos analíticos, que son proyecciones de conjuntos borelianos, y los conjuntos proyectivos en general. En el capítulo 4 estudiamos las principales propiedades de estos conjuntos. El capítulo 5 está dedicado a problemas de uniformización, y se incluye una demostración de que todo conjunto coanalítico del plano contiene una función cuyo gráfico es de esa misma complejidad. En el capítulo 6, luego de un breve repaso de algunos conceptos de *medida* y *categoría*, mostramos que todo conjunto analítico es medible Lebesgue y tiene la propiedad de Baire, así como el juego de Banach-Mazur y su relación con propiedades de categoría. Se presenta también el teorema de Kuratowski-Ulam que es una versión para categoría del teorema de Fubini. El capítulo 7 está dedicado a los grupos polacos, grupos topológicos, que son espacios polacos, y sus acciones. En el capítulo 8 estudiamos brevemente los conjuntos κ-Suslin y los conjuntos κ-Borel, que generalizan a los conjuntos analíticos y a los borelianos. Finalmente, en el apéndice presentamos una corta introducción a los ordinales y cardinales, así como mencionamos sin demostraciones, algunos resultados de independencia en teoría descriptiva.

Deseamos agradecer a Alexander Berenstein por las observaciones y sugerencias que nos ha hecho y por animarnos a concluir este trabajo. Igualmente agradecemos a los estudiantes que han usado este texto en cursos que en diversas ocasiones hemos dictado. Tanto las notas de 1991 como este texto deben mucho a Alexander Kechris. Su libro Classical Descriptive Set Theory publicado en 1994 ha sido ampliamente consultado.

El autor, Carlos Uzcátegui Aylwin, agradece el apoyo financiero de la Universidad Industrial de Santander a través del proyecto VIE # 2422.

Bogotá, Bucaramanga, 2020

INTRODUCCIÓN

La teoría descriptiva de conjuntos puede definirse, si quisiéramos ser concisos, como la teoría de los subconjuntos definibles de $\mathbb{R}$. El concepto de *conjunto definible* puede entenderse de dos maneras diferentes, pero equivalentes.

La primera, que se ha llamado clásica, se refiere a los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que se obtienen a partir de los abiertos a través de las operaciones de complementación, uniones numerables y proyecciones. Esta fue la idea adoptada por Lebesgue al iniciar un estudio de las funciones reales definibles analíticamente. Pero fueron Suslin y Luzin quienes profundizaron en el estudio de las propiedades de estos conjuntos.

La colección de los conjuntos borelianos es la menor colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que contiene a los abiertos y es cerrada bajo complementación y uniones numerables. Los conjuntos analíticos son proyecciones de los borelianos del plano. Si cerramos esta colección bajo las operaciones proyección y complemento, obtenemos los conjuntos proyectivos. Estos conjuntos son los considerados definibles según este punto de vista.

La segunda manera de entender la noción de *conjunto definible* está basada en el concepto de *conjunto recursivo*. Más adelante haremos algunos comentarios sobre este enfoque, llamado el enfoque efectivo.

Se puede decir que hay cuatro problemas básicos que han impulsado el desarrollo de la teoría descriptiva de conjuntos:

(1) ¿Son los conjuntos proyectivos medibles Lebesgue?

(2) ¿Tienen los conjuntos proyectivos la propiedad de Baire?

(3) ¿Satisfacen los conjuntos proyectivos la hipótesis del continuo?, es decir, ¿es todo conjunto proyectivo no numerable equipotente a $\mathbb{R}$?

(4) Sea f una función con valores en $\mathbb{R}$ cuyo dominio está contenido en el plano. Si el gráfico de f es proyectivo, el problema de la uniformización consiste en determinar si la ecuación $f(x, y) = 0$ tiene una solución, de y

en términos de x, cuyo gráfico sea de la misma complejidad que el de la función f.

Las respuestas a estos problemas no han sido fáciles de hallar. Quizás se debería decir que todavía no han sido halladas, ya que usando las herramientas de la lógica matemática y la teoría de conjuntos se ha podido mostrar que las respuestas no siguen de los axiomas usuales de la teoría de conjuntos, sino que dependen de hipótesis adicionales.

En estas notas nos concentraremos en la teoría clásica y pretendemos introducir los conceptos básicos que permitan formular rigurosamente estos problemas y presentar los resultados que se puedan obtener sin recurrir a esas hipótesis adicionales (o axiomas adicionales) ni a argumentos que requieran conceptos sofisticados de la lógica matemática.

La teoría descriptiva de conjuntos tuvo su origen, como hemos señalado, en el análisis matemático y, aunque después siguió un desarrollo independiente, las conexiones con este se han mantenido. Se muestran algunos ejemplos para ilustrar estas conexiones. Incluimos un teorema de Mazurkiewicz sobre la complejidad de la colección de funciones diferenciables en todo punto en el espacio de las funciones continuas en un intervalo acotado. También se presentan algunos resultados, más recientes, sobre ideales de conjuntos compactos. El estudio de estos ideales ha sido motivado por un problema clásico del análisis armónico sobre la unicidad de series trigonométricas. Es interesante observar que este problema del análisis armónico fue precisamente el que motivó a Georg Cantor a desarrollar la teoría de números ordinales y cardinales y la teoría de conjuntos en general.

Esperamos que estos ejemplos ilustren también los métodos que se usan en la teoría descriptiva de conjuntos para determinar la posición exacta, en la jerarquía proyectiva, de ciertos conjuntos que aparecen "naturalmente" en el análisis y en otras ramas de las matemáticas. Caso que resulta particularmente interesante es el de conjuntos que no son borelianos (como ocurre con el ideal de conjuntos cerrados de unicidad para series trigonométricas), pues esto muestra que estos conjuntos son bastante complicados desde el punto de vista topológico-descriptivo, y, por tanto, no es fácil caracterizarlos.

Hagamos algunos comentarios sobre el punto de vista efectivo. Diremos que un subconjunto A de los números naturales es *recursivamente enumerable* si existe un programa de computador que lo enumera, es decir, un programa para cada dato de entrada n produce una salida $f(n) \in A$ de modo que cada elemento de A es de la forma $f(n)$ para al menos un número n. El conjunto A

se dice recursivo si tanto A como su complemento son recursivamente enumerables. Este es el concepto básico de la teoría de funciones computables.

Es fácil convencerse de que existe un programa que enumera al conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales y también que hay programas que enumeran el conjunto $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ de los pares de números racionales. Por tanto, podemos hablar de conjuntos recursivos (o recursivamente enumerables) de números racionales o de pares de números racionales.

Un abierto U de $\mathbb{R}$ se dice efectivo si existe un subconjunto recursivo A de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tal que U es una unión recursiva de intervalos (a, b) donde el par (a, b) pertenece a A. En este caso, diremos que U es una unión recursiva de intervalos. Siguiendo con este esquema, tomando uniones recursivas en vez de uniones cualesquiera, así como complementos y proyecciones, obtenemos la jerarquía efectiva de Kleene. El estudio de las profundas analogías entre la jerarquía proyectiva y la jerarquía efectiva fue iniciado por Addison [Ad54] y luego continuado por Moschovakis, Martin, Kechris y otros. Este estudio forma una parte importante de lo que se conoce hoy en día con el nombre de teoría descriptiva de conjuntos. Desafortunadamente, este enfoque moderno se escapa al alcance de estas notas. El lector que desee continuar el estudio de esta teoría puede hallar una magnífica introducción en el artículo de Martin y Kechris [MaKe] y un estudio más extenso en el libro de Moschovakis [Mo] o mas recientemente en el libro de Gao [Ga].

Es necesario hacer notar que hemos dejado casi completamente de lado otro de los aspectos más interesantes de la teoría descriptiva: los juegos infinitos y el axioma de determinación. Apenas tocamos este tema con los juegos de Banach-Mazur en el capítulo 6 y la prueba del teorema de Hurewicz en el capítulo 4. Pero es imposible en estas notas pretender hacer un estudio completo de la teoría, se trata apenas de una breve introducción al tema.

Es conveniente que el lector esté familiarizado con los conceptos básicos de la teoría de conjuntos y que tenga experiencia manejando los aspectos elementales de la topología. El texto está organizado de la siguiente manera. En el primer capítulo presentamos las propiedades básicas del espacio de Baire, el espacio de todas las sucesiones de números naturales con la topología producto. Este espacio es homeomorfo a los irracionales con la topología heredada de $\mathbb{R}$. Luego nos dedicamos a los espacios polacos y presentamos una caracterización del espacio de Baire. El capítulo 2 está dedicado al estudio de los subconjuntos borelianos de espacios polacos. Proponemos una demostración del teorema de isomorfismo que establece que todos los espacios polacos no numerables son Borel-isomorfos, es decir, dados dos espacios polacos no numerables, existe una biyección entre ellos que preserva conjuntos borelianos. A continuación, en el capítulo 3, definimos los conjuntos analíticos, que son proyecciones de conjuntos borelianos, y los conjuntos proyectivos en general. En el capítulo 4 estudiamos las principales propiedades de estos conjuntos. El capítulo 5 está dedicado a problemas de uniformización, e incluimos una demostración de que todo conjunto coanalítico del plano contiene una función cuyo gráfico es de esa misma complejidad. En el capítulo 6, luego de un brevísimo repaso de algunos conceptos de *medida* y *categoría*, mostramos que todo conjunto analítico es medible Lebesgue y tiene la propiedad de Baire. Se presenta el juego de Banach-Mazur y su relación con propiedades de categoría, así como el teorema de Kuratowski-Ulam que es una versión para categoría del teorema de Fubini. El capítulo 7 está dedicado a los grupos polacos, grupos topológicos que son espacios polacos, y a sus acciones. En el capítulo 8 estudiamos brevemente conjuntos κ-Suslin y conjuntos κ-Borel, que generalizan a los conjuntos analíticos y a los borelianos. Finalmente, en el apéndice presentamos una corta introducción a los ordinales y cardinales, y también mencionamos, sin demostraciones, algunos resultados de independencia en teoría descriptiva.

CAPÍTULO 1

ESPACIOS POLACOS

1.1. El espacio de Baire

Comenzaremos haciendo algunos comentarios referentes a la notación. $\mathbb{N}$ denota al conjunto de los números naturales y $\mathcal{N}$ al espacio $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ de todas las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ dotado de la topología producto que resulta de dar a $\mathbb{N}$ la topología discreta. En general, si A y B son conjuntos, A^B denota el conjunto de las funciones de B en A. Si f es una función de A en B, y C es un subconjunto de A, $f|C$ denota la restricción de f a C. Dada una función $f : A \to B$, si $C \subset A$, denotaremos por $f[C]$ al conjunto $\{f(a) : a \in C\}$. La colección de subconjuntos de un conjunto A se denota, como es usual, por $\mathcal{P}(A)$.

El conjunto de sucesiones finitas de números naturales lo denotaremos por $\mathbb{N}^{<\omega}$. Indicamos por $|s|$ la longitud de la sucesión s. Si s y t son sucesiones finitas y s extiende propiamente a t, escribiremos $t \prec s$. Usamos $s\widehat{\ }t$ para denotar la concatenación de s y t, esto es, la sucesión que comienza con los elementos de s y continua con los de t.

El espacio $\mathcal{N}$ se llama el *espacio de Baire* y es el espacio más importante para todo lo que estudiaremos en este libro. Un espacio *tipo Baire* es un producto $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ donde cada factor es $\mathbb{N}$ o $\mathcal{N}$. Diremos que el espacio es de tipo 0 si todos los factores son $\mathbb{N}$ y en caso contrario decimos que es tipo 1.

Para cada $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ definimos

$$U_s = \{\alpha \in \mathcal{N} : \alpha(i) = s(i) \text{ para todo } i \in dom(s)\}.$$

Denotaremos con $\alpha \restriction n$ el segmento inicial de α de longitud n, esto es,

$$\alpha \restriction n = \langle \alpha(0), \alpha(1), \ldots, \alpha(n-1) \rangle.$$

Por convención $\alpha \restriction \emptyset$ es la sucesión vacía. Con esta notación, tenemos que $\alpha \in U_s$ si $\alpha \restriction n = s$ donde $n = |s|$. En este caso también escribiremos $s \prec \alpha$.

Obsérvese también que

$$\bigcap_n U_{\alpha \restriction n} = \{\alpha\}.$$

Los conjuntos de la forma U_s constituyen una base numerable de la topología de $\mathcal{N}$. Nótese que esta base es numerable, ya que el conjunto de sucesiones finitas de $\mathbb{N}$ es numerable.

Ejercicio 1.1. *Demuestre que la colección de los conjuntos U_s, con s una sucesión finita de naturales, forma una base para la topología producto en $\mathcal{N}$.*

Teorema 1.2. *Existen $2^{\aleph_0}$ subconjuntos abiertos de $\mathcal{N}$.*

Demostración. Considere las vecindades básicas $U_{\langle n \rangle}$ para $n \in \mathbb{N}$. Esta es una colección dos a dos disjunta. Dado $A \subseteq \mathbb{N}$, sea $V_A = \bigcup_{n \in A} U_{\langle n \rangle}$. Como la función $A \mapsto V_A$ es inyectiva, se tiene que existen al menos $2^{\aleph_0}$ conjuntos abiertos. Por otra parte, como $\mathcal{N}$ tiene una base numerable y cada abierto es una unión de abiertos básicos, entonces, es claro que existen a lo sumo $2^{\aleph_0}$ conjuntos abiertos. □

El espacio de Baire no es compacto, por ejemplo $\{U_{\langle n \rangle} : n \in \mathbb{N}\}$ es un cubrimiento que no admite subcubrimiento finito. Más adelante veremos que $\mathcal{N}$ ni siquiera es $\sigma-$compacto (es decir, no es la unión de una colección numerable de compactos).

El espacio de Baire es cero dimensional, esto es, tiene una base de abiertos cerrados. Cada U_s es abierto cerrado, ya que si n es la longitud de s, $\mathcal{N} = \bigcup \{U_t : t \text{ es de longitud } n\}$.

Además $\mathcal{N}$ es separable, puesto que el conjunto de las sucesiones eventualmente constantes es denso (dado que cada U_s contiene sucesiones eventualmente constantes).

Con esta topología, la convergencia en $\mathcal{N}$ es muy fácil de describir. Una sucesión $\{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge a α si y sólo si $\forall n \, \exists m \, \forall k \geq m \; \alpha_k(n) = \alpha(n)$.

Teorema 1.3. *Todo espacio tipo Baire de tipo 0 es homeomorfo a $\mathbb{N}$, y todo espacio de tipo 1 es homeomorfo a $\mathcal{N}$.*

Demostración. Por inducción en el número de factores usando los siguientes hechos:

(1) $\mathbb{N} \times \mathcal{N}$ es homeomorfo a $\mathcal{N}$.

(2) $\mathcal{N} \times \mathbb{N}$ es homeomorfo a $\mathcal{N}$.

(3) $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ es homeomorfo a $\mathcal{N}$.

(4) $\mathbb{N}\times\ \mathbb{N}$ es homeomorfo a $\mathbb{N}$.

Para demostrar (1), definimos la función

$$f(n,\alpha) = n^\frown\alpha = \langle\, n, \alpha(0), \alpha(1), \ldots\rangle.$$

Claramente la función f es biyectiva. Veamos que es bicontinua. La preimagen de un abierto básico U_s es el abierto $\{s_0\}\times U_t$ (de $\mathbb{N}\times\mathcal{N}$), donde $s = s_0{}^\frown t$. Y la imagen de un abierto $A\times\bigcup\{U_s : s\in W\}$, donde W es un conjunto de sucesiones finitas de números naturales, es $\bigcup\{U_{n^\frown s} : n\in A, s\in W\}$ y, por tanto, un abierto.

(2) sigue de (1), ya que $X\times Y$ es homeomorfo a $Y\times X$.

Para demostrar (3), definimos

$$f(\alpha,\beta) = \alpha*\beta = \langle\alpha(0),\beta(0),\alpha(1),\beta(1),\alpha(2),\ldots\rangle.$$

Es fácil verificar que f es una biyección, veamos que también es bicontinua. Como todo abierto de $\mathcal{N}$ es unión de vecindades básicas determinadas por sucesiones de longitud par, basta, para probar que f es continua, que la preimagen de una tal vecindad es un abierto. Dada U_s con s de longitud par, $f^{-1}U_s = U_r\times U_t$ donde $r*t = s$, es decir, r es la sucesión formada por los términos que ocupan lugar par en s y t la sucesión formada por los términos que ocupan lugar impar. También se tiene que f es abierta, ya que $f[U_r\times U_t] = U_{r*t}$ para r y t de la misma longitud.

Para probar (4) basta observar que cualquier biyección de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$ es un homeomorfismo. $\square$

Ejercicio 1.4. *Demuestre que el producto de una cantidad numerable de copias del espacio de Baire es homeomorfo al espacio de Baire.*

Sugerencia: *muestre que $\mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ es homeomorfo a $\mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ y que este último espacio es homeomorfo a $\mathcal{N}$.*

Ejercicio 1.5. *Demuestre que todo abierto de $\mathcal{N}$ es la unión disjunta de una familia de vecindades básicas.*

El espacio de Baire es metrizable por la métrica dada por

$$d(\alpha,\beta) = \begin{cases} 1/\left[(\text{ menor } n \text{ tal que } \alpha(n)\neq\beta(n)\ ) + 1\right] & \text{si } \alpha\neq\beta. \\ 0 & \text{si } \alpha=\beta. \end{cases}$$

Para demostrar que esta métrica da la topología del espacio de Baire basta observar que para todo $\alpha,\beta\in\mathcal{N}$ y $n\in\mathbb{N}$ se tiene que

$$d(\alpha,\beta) < 1/n \ \Leftrightarrow\ \beta\in U_{\alpha\restriction n}.$$

Además, la métrica d es completa.