Werner Helm
Andreas Pfeifer
Joachim Ohser

PLUS.HANSER-FACHBUCH.DE

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Ein Lehr- und Übungsbuch für Bachelors

3., aktualisierte Auflage

HANSER

Helm / Pfeifer / Ohser

Mathematik für Wirtschaftswissenschafter

Werner Helm

Andreas Pfeifer

Joachim Ohser

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Ein Lehr- und Übungsbuch für Bachelors

3., aktualisierte Auflage

HANSER

Autoren:

Prof. Dr. Werner Helm
Hochschule Darmstadt
FB Mathematik und Naturwissenschaften
Werner.Helm@h-da.de

Prof. Dr. Andreas Pfeifer
Hochschule Darmstadt
FB Mathematik und Naturwissenschaften
Andreas.Pfeifer@h-da.de

Prof. Dr. Joachim Ohser
Hochschule Darmstadt
FB Mathematik und Naturwissenschaften
Joachim.Ohser@h-da.de

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C083411
www.fsc.org

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Lektorat: Frank Katzenmayer
Herstellung: Anne Kurth
Covergestaltung: Max Kostopoulos
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Titelbild: © shutterstock.com/AB Visual Arts
Satz: Die Autoren mit Unterstützung von Dr. Steffen Naake, Brand-Erbisdorf
Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck
Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-46913-6
E-Book-ISBN 978-3-446-46937-2

Vorwort zur 3. Auflage

Für die vorliegende dritte Auflage wurde der gesamte Text kritisch durchgesehen und aktualisiert (wie beispielsweise der Einkommensteuertarif). Fehler wurden korrigiert, Ungenauigkeiten klargestellt und viele Anregungen von Studierenden eingearbeitet.

Auf plus.hanser-fachbuch.de finden Sie umfangreiches Zusatzmaterial, beispielsweise ein Zusatzkapitel über Differenzialgleichungen. Auch sind dort die Lösungen zu allen Aufgaben vorhanden. Ebenso zahlreiche Excel-Dateien zur Finanzmathematik, mit denen die Lösungen der Aufgaben einfach und leicht ermittelt werden können.

Der vorliegende Band richtet sich speziell an Studierende der Wirtschaftswissenschaften im weitesten Sinne, an Berufsakademien, Hochschulen oder Universitäten und ist geeignet als vorlesungsbegleitendes Lehr- und Übungsbuch, kann aber auch wegen der Vielzahl von Beispielen und Aufgaben zum Selbststudium verwendet werden.

Die Autoren sind sich dessen bewusst, dass Studierende der Volks- und Betriebswirtschaft, der Wirtschaftsinformatik oder des Wirtschaftsingenieurwesens sowie verwandter Disziplinen eine fachgerichtete Aufbereitung der Mathematik – auch der Grundlagen der Mathematik – erwarten. Daher sind grundlegende Begriffe der Mathematik wie z. B. der der Funktion von einer oder mehreren Variablen oder der Begriff des Differenzials aus Sicht des Wirtschaftswissenschaftlers dargestellt und mit fachspezifischen Beispielen versehen. Ausführlich dargestellt ist das Thema betriebswirtschaftliche Kostenfunktionen. Insofern ist dieser Band in sich abgeschlossen und kann auch als umfassendes Mathematik-Lehrbuch für Studierende der Wirtschaftswissenschaften dienen. Die Autoren lassen ihre jahrelange vielfältige Lehrerfahrung in dieses Buch einfließen. Vom Schwierigkeitsgrad zielt das Buch auf die Mitte: Da, wo in den Vorlesungen eine abstraktere Sicht auf die Mathematik betont wird, kann das Buch bei der unverzichtbaren praktischen Umsetzung helfen (Learning by Doing). An anderen Hochschulen mit einem geringen Stundenumfang in Mathematik kann das Buch als Universalreferenz dienen, deckt es doch einen sehr breiten Bereich an Inhalten ab, die auch für Lehrveranstaltungen relevant sind, die nicht die Bezeichnung Mathematik im Titel tragen, wie Kostenrechnung, Finanzierung oder Operations Research.

Das Vorgängerwerk *Lehr- und Übungsbuch MATHEMATIK in Wirtschaft und Finanzwesen* wurde gründlich überarbeitet, aktualisiert und an die Rahmenbedingungen der heutigen Bachelor-Studiengänge angepasst. Es bietet die **grundlegende Wirtschaftsmathematik komplett in einem Band**, geht an einigen Stellen leicht darüber hinaus und bildet Brücken aus zur praktischen Verwendung mathematischer Methoden auch in höheren Semestern. Ob Kostenfunktionen, Kundenwanderung, Lineare oder Nichtlineare Optimierung, Projektplanung oder Netzplantechnik – mit und ohne Computer – das Buch ist aus der Sicht der Nutzer und Anwender entwickelt, ohne dabei die mathematische Substanz zu opfern. Die kompakte und trotzdem vollständige Darstellung der klassischen Finanzmathematik vom Autor des in der sechsten Auflage erschienenen Buches *Finanzmathematik – Lehrbuch für Studium und Praxis* enthält zahlreiche Anwendungsbeispiele.

In den ersten fünf Kapiteln werden die Grundlagen der Mathematik für Volks- und Betriebswirte dargestellt und anhand von ökonomischen Problemen in einem praxisorientierten Zusammenhang erläutert. Dazu zählen Funktionen, Differenzial- und Integralrechnung und Lineare Algebra – Theorie eng verknüpft mit ökonomischen Anwendungen. Kapitel 6 enthält die Lineare Optimierung mit dem Simplex-Algorithmus. Kapitel 7 umfasst die gesamte klassische Finanzmathematik von der Zinsrechnung bis zu den Abschreibungsarten auf aktuellem Stand und führt heran an die Begriffe *Rendite*, *Risiko*, *Call* und *Put*. In Kapitel 8 werden in knapper Form weitere praktische Probleme und deren Lösungsmethoden dargestellt. Stichworte sind: Nichtlineare Programmierung, Optimierung eines Portfolios, Netzplantechnik (CPM, PERT) mit GANTT-Charts.

In allen Kapiteln enthalten sind viele praktische und zeitgemäße durchgerechnete Beispiele, die das Erlernen und Behalten der Begriffe wesentlich fördern. In vielen Fällen werden bei der Berechnung und Darstellung der Lösungen professionelle Softwaresysteme wie z. B. das System SAS verwendet. SAS gilt als die weltweit beste Analytics-Software, renommierte wie aufstrebende Fachbereiche *leisten* sich SAS. Damit wird eine Einführung in die Handhabung dieser auch in Wirtschaft und Industrie vielfach verwendeten Software gegeben. Das Buch enthält Hinweise auf Excel-Programme zur Finanzmathematik. Die zahlreichen Aufgaben, deren Lösungen am Ende des Buches zu finden sind, sollen dem Festigen der erworbenen Kenntnisse und natürlich auch der Prüfungsvorbereitung dienen.

Autoren und Verlag hoffen, auch mit diesem Buch den Studierenden ein wertvolles Studienmaterial bereitzustellen. Hinweise, Erfahrungen und Anregungen seitens der Studierenden und der Lehrenden nehmen die Autoren und der Verlag gern entgegen.

Wir bedanken uns bei allen, die Anregungen und Korrekturvorschläge zu den Vorauflagen gegeben haben. Auch über Hinweise und Bemerkungen zur neuen, dritten Auflage freuen wir uns.

Dezember 2020 Die Autoren

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen einer reellen Variablen in ökonomischen Problemen

Zusammenhänge zwischen den Größen wirtschaftlicher Erscheinungen als mathematische Funktion zu betrachten und aus ihrer formal-mathematischen Analyse inhaltlich-ökonomische Informationen zu gewinnen, hat sich zu einem bewährten Hilfsmittel entwickelt. Davon zeugen unter anderem die vielfältigen Produktionsfunktionen in Betriebs- und Volkswirtschaft sowie die verschiedenen Typen von Wachstumsfunktionen.

1.1 Mathematische Grundbegriffe

1.1.1 Funktionsbegriff

BEISPIEL

1.1 Zuordnungen als ein Grundelement von Funktionen

Die Herstellung eines Produktes verursacht Kosten. Setzt man sie ins Verhältnis zur Zahl der erzeugten Exemplare des Produktes (zur Produktionsmenge), erhält man die Durchschnittskosten. Letztere werden auch Stückkosten oder spezifische Kosten genannt. Sowohl Kosten als auch Durchschnittskosten ändern sich mit der Produktionsmenge. Dabei wird – gewisse Produktionsbedingungen innerhalb eines Zeitraumes als konstant vorausgesetzt – jeder Produktionsmenge eine bestimmte Kostensumme zugeordnet, und umgekehrt gehört zu jeder Kostensumme eine bestimmte Produktionsmenge. Für die Durchschnittskosten gilt nur Ersteres, während zu einer gegebenen Höhe von Durchschnittskosten durchaus zwei verschiedene Produktionsmengen gehören können. *Tabelle 1.1* zeigt eine mögliche konkrete Zuordnung der genannten ökonomischen Größen.

Tabelle 1.1 Produktionsmenge P (in Mengeneinheiten ME), Kosten K (in Geldeinheiten GE) und Durchschnittskosten k (in GE/ME)

P in ME	2	4	6	8	10	12	14	16
K in GE	38,6	47,6	51,8	56	65	83,6	116,6	168,8
k in GE/ME	19,3	11,9	$8{,}6\overline{3}$	7	6,5	$6{,}9\overline{6}$	8,33	10,55

■

Das Charakteristische im *Beispiel 1.1* besteht darin, dass jedem Wert P genau ein Wert K bzw. genau ein Wert k zugeordnet wird. Es ergeben sich Wertepaare $(P; K)$ bzw. $(P; k)$.

Sind M_1 und M_2 zwei Mengen reeller Zahlen ($M_1, M_2 \subseteq \mathbf{R}$), und ist jedem $x \in M_1$ genau ein $y \in M_2$ zugeordnet, so heißt die dadurch gegebene paarweise Zuordnung reelle **Funktion** $\boldsymbol{f}$. Dabei heißt M_1 Definitionsbereich von f; er wird mit $D(f)$ bezeichnet.

Als Symbole dienen

$$f\colon\ M_1 \to M_2 \quad \text{oder ausführlicher} \tag{1.1a}$$

$$y = f(x),\ x \in D(f). \tag{1.1b}$$

Für die Größen x und y einer Funktion (1.1b) werden folgende Namen synonym verwendet:

x **unabhängige Variable**, Urbildpunkt, **Argument**,
y **abhängige Variable**, Bildpunkt, **Funktionswert**.

Des Weiteren sind die Bezeichnungen Funktionsterm für $f(x)$ und Zuordnungsvorschrift oder Funktionsrelation für $y = f(x)$ gebräuchlich.

Hier werden nur reelle Funktionen betrachtet, und daher wird der Zusatz „reell" künftig nicht angegeben.

Die Menge aller derjenigen Werte y, die sich für eine Funktion f aus ihrer Zuordnungsvorschrift $y = f(x)$ ergeben, wenn x den gesamten Definitionsbereich $D(f)$ durchläuft, wird **Wertebereich** genannt und mit $W(f)$ bezeichnet.

Zur Vorgabe einer Funktion gehören unbedingt die beiden Elemente „Zuordnungsvorschrift" und „Definitionsbereich" (siehe 1.1b)[1]. Durch sie ist der Wertebereich eindeutig festgelegt, was jedoch nicht bedeutet, dass seine Ermittlung in jedem Falle elementar verläuft. Die Angabe des Definitionsbereiches einer Funktion ist besonders für angewandte Probleme von Bedeutung, weil die Ergebnisse wesentlich vom Definitionsbereich abhängen können.

BEISPIEL

1.2 Einfluss des Definitionsbereiches auf Eigenschaften von Funktionen

Die Funktion $y = f_1(x)$, $x \in [0, 10]$, mit $f_1(x) = (x - 3)^2 + 1$ hat wegen $(x - 3)^2 \geqq 0$ die Eigenschaft $f_1(x) \geqq 1$ für alle $x \in [0, 10]$. Dabei wird der kleinste Funktionswert für $x = 3$ angenommen: $f_1(3) = 1$.

Ändert man für f_1 den Definitionsbereich und betrachtet beispielsweise $y{=}f_2(x)$, $x \in [5, 10] = D(f_2)$, mit $f_2(x) = (x-3)^2 + 1$, so gilt hier $(x-3)^2 \geqq 2^2 = 4$ für alle $x \in D(f_2)$, und der kleinste Funktionswert wird für $x = 5$ angenommen:
$f_2(x) \geqq f_2(5) = 5$. ■

Aus den Argumenten x und den Funktionswerten y einer Funktion f können geordnete Wertepaare $(x; y)$ gebildet werden, bei denen immer x an erster und y an zweiter Stelle steht. Die Wertepaare $(x; y)$ lassen sich als Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem darstellen. Die Gesamtheit aller Punkte $(x; y)$, die man erhält, wenn x alle Werte von $D(f)$ durchläuft, bildet den **Graphen** G_f der Funktion.

BEISPIEL

1.3 Darstellung von Funktionen mittels ihres Graphen

Der Graph der Funktion $y = 0{,}5x + 1$, $-3 \leqq x \leqq 6$, ist eine Strecke (s. *Bild 1.1*). Der Graph der Funktion $y = (x - 3)^2 + 1$, $0 \leqq x \leqq 5$, ist ein Parabelabschnitt (s. *Bild 1.2*).

[1] Ausgenommen hiervon ist der Fall, dass die Funktion nur aus endlich vielen, aufgelisteten Wertepaaren $(x_i; y_i)$, $i = 1,2, \ldots n$, besteht.

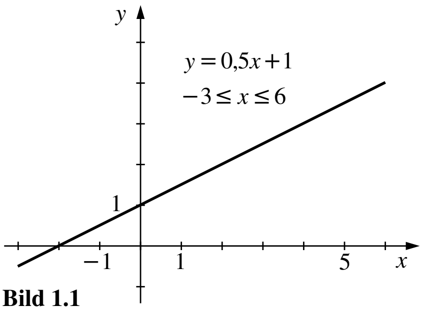

Bild 1.1

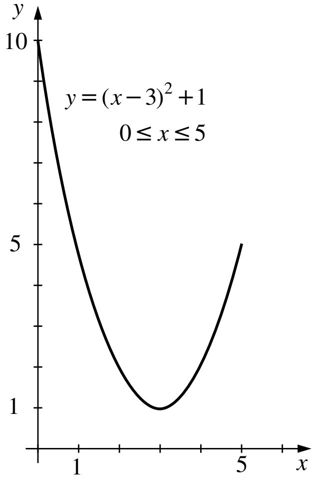

Bild 1.2 ■

Graphen von Funktionen können Strecken, Streckenzüge, Geraden, Kurven, Punktfolgen oder aus den genannten Elementen zusammengesetzt sein.

BEISPIEL

1.4 Punktfolgen und Streckenzüge als Graphen von Funktionen

Der Graph der Durchschnittskostenfunktion $k = k(P)$ aus *Tabelle 1.1* ist eine Punktfolge (s. *Bild 1.3*).

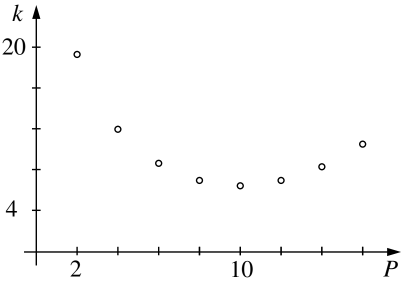

Bild 1.3

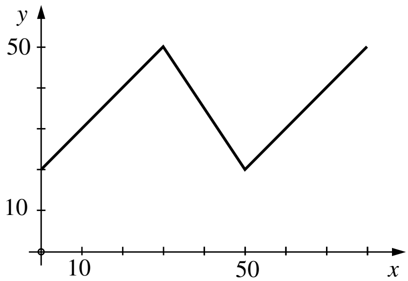

Bild 1.4

Bild 1.4 zeigt einen Streckenzug als Graphen. Er ist aus 3 Strecken zusammengesetzt. ■

Graphen von Funktionen besitzen eine charakteristische Eigenschaft: Jede Parallele zur vertikalen Achse des kartesischen Koordinatensystems schneidet den Graphen höchstens in einem Punkt. Ursache hierfür ist der Sachverhalt, dass jedem Argument x genau ein Funktionswert y zugeordnet ist. Man vergleiche hierzu die *Bilder 1.1* bis *1.4*. Deshalb muss durchaus nicht jede Kurve in einem kartesischen Koordinatensystem Graph einer Funktion sein. So stellen beispielsweise die Kurven in den *Bildern 1.5* und *1.6* keine Funktionen dar. Dagegen können

Parallelen zur horizontalen Achse des kartesischen Koordinatensystems den Graphen einer Funktion durchaus in mehr als einem Punkt schneiden. Das gilt beispielsweise für die in den *Bildern 1.2* und *1.4* dargestellten Graphen.

BEISPIEL

1.5 Kurven, die nicht Graph einer Funktion sind

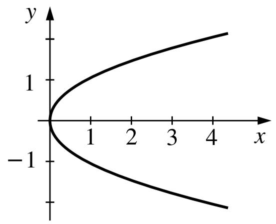

Bild 1.5

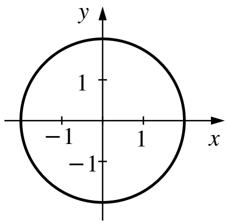

Bild 1.6 ■

Die Vorgabe von Funktionen kann auf sehr vielfältige Weise erfolgen. Genannt seien hier folgende Möglichkeiten:

M1: Wertetabelle (siehe *Tabelle 1.1*)

M2: Analytische Vorgabe in der Form $y = f(x)$, $x \in D(f)$, wobei $f(x)$ ein mathematischer Term ist (vgl. *Beispiel 1.3*).

M3: Grafische Vorgabe durch eine Kurve im kartesischen Koordinatensystem, die von Parallelen zur vertikalen Achse höchstens einmal geschnitten wird (s. *Bilder 1.1* und *1.2*).

M4: Vorgabe in zusammengesetzter Form, d. h. durch unterschiedliche Zuordnungen in verschiedenen Teilen des Definitionsbereiches. *Bild 1.4* zeigt eine zusammengesetzte Funktion. Ihre analytische Vorgabe ist durch

$$y = \begin{cases} x + 20 & \text{für } \ 0 \leqq x \leqq 30 \\ -1{,}5x + 95 & \text{für } 30 < x < 50 \\ x - 30 & \text{für } 50 \leqq x \leqq 80 \end{cases}$$

gegeben.

M5: Implizite Vorgabe durch eine Gleichung der Art $g(x, y) = 0$. Dabei muss $g(x, y)$ ein mathematischer Term sein, der jedem x aus einer gewissen Menge reeller Zahlen genau einen Wert y zuordnet.

BEISPIEL

1.6 Eine Preis-Absatz-Relation als implizite Funktion

Von zwei Produkten A und B sei bekannt, dass Produkt A einen festen Preis p_A erzielt, während der Preis von B mit der abgesetzten Menge sinkt. Die konkrete Preis-Mengen-Funktion sei zu $p_B(y) = 10.000/(50 + 4y)$, $10 \leqq y \leqq 100$, ermittelt worden, wobei y die von B abgesetzte Menge angibt. Wird die von A abgesetzte Menge mit x bezeichnet, so liefert die Summe $p_A x + p_B(y)y$ den beim Absatz von x und y erzielten Erlös E: $p_A x + p_B(y)y = E$. Soll nun ein ganz bestimmter Erlös E_0 erzielt werden, so ist das mit verschiedenen Kombinationen der Absatzmengen x und y möglich. Sie müssen der Relation $p_A x + p_B(y)y = E_0$ oder

$$g(x,y)=0 \quad \text{mit} \quad g(x,y)=p_{\mathrm{A}}x+\frac{10.000}{50+4y}y-E_0$$

genügen, wobei jeder zulässigen Absatzmenge x genau eine Absatzmenge y zugeordnet ist (s. Aufgabe 1.11). ■

1.1.2 Ein Funktionenreservoir

Funktionen, die bei der Bearbeitung ökonomischer Phänomene auftreten, besitzen in vielen Fällen einen recht einfachen Aufbau. Wir wollen sie unter der Bezeichnung „elementare Funktionen" zusammenfassen. Sie bilden das Funktionenreservoir, mit dem wir uns im Weiteren beschäftigen wollen. Ihre Bausteine sind einige wenige **Grundfunktionen**. Dazu zählen:

Potenzfunktionen

$$y=x^n,\ n\in\mathbf{N}\backslash\{0\},\quad x\in(-\infty,+\infty),\ \text{wobei } \mathbf{N}=\{0,1,2,3,\ \dots\} \tag{1.2}$$

$$y=x^k,\ k\in\mathbf{Z},\quad x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)=\mathbf{R}\backslash\{0\}. \tag{1.3}$$

Die Graphen von Potenzfunktionen mit positivem Exponenten n sind Parabeln n-ten Grades. Sie verlaufen alle durch die Punkte $(0;0)$ und $(1;1)$. Für geradzahlige Exponenten n verlaufen die Parabeln außerdem immer durch den Punkt $(-1;1)$, für ungeradzahlige Exponenten n dagegen immer zusätzlich durch den Punkt $(-1;-1)$ (siehe *Bild 1.7*).

Die Graphen von Potenzfunktionen mit negativem Exponenten k sind Hyperbeln. Sie verlaufen alle durch den Punkt $(1;1)$. Für geradzahligen Exponenten k verlaufen die Hyperbeln außerdem immer durch den Punkt $(-1;1)$, für ungeradzahligen Exponenten k dagegen immer zusätzlich durch den Punkt $(-1;-1)$ (siehe *Bild 1.8*).

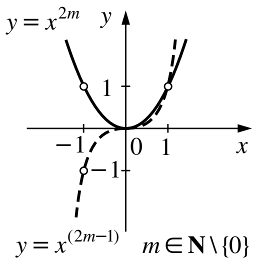

Bild 1.7

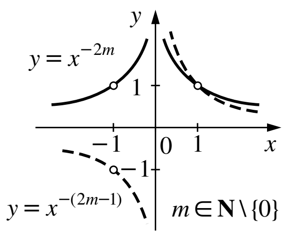

Bild 1.8

Wurzelfunktionen

$$y=x^a,\ a=\frac{p}{q},\quad p,q\in\mathbf{N}\backslash\{0\},\ a\notin\mathbf{N},\ x\in[0,+\infty). \tag{1.4}$$

Die Graphen von Wurzelfunktionen beginnen im Koordinatenursprung $(0;0)$ und verlaufen alle durch den Punkt $(1;1)$. Sie liegen ausschließlich im 1. Quadranten des kartesischen Koordinatensystems. Für die Spezialfälle $a=\frac{1}{q}$, $q\in\mathbf{N}\backslash\{0,1\}$ sind die Graphen Parabeläste; für diese Spezialfälle mit ungeraden q kann der Definitionsbereich auf ganz $\mathbf{R}$ ausgedehnt werden.

BEISPIEL

1.7 Wurzelfunktion mit dem Exponenten 0,1

Die Funktion $y = x^{0,1}$, $0 \leqq x < +\infty$, nimmt beispielsweise für $x = 2$ den Funktionswert $y = 1{,}0718$ an, den man u. a. mit einem Taschenrechner durch die Eingabenfolge 2 [y^x] 0,1 [=] erhält. ■

Potenz- und Wurzelfunktionen können zusammengefasst und auf beliebige Exponenten a verallgemeinert werden:

$$y = x^a, \quad a \in \mathbf{R}, x \in (0, +\infty). \tag{1.5}$$

Exponentialfunktionen

$$y = a^x, a > 0 \quad \text{und} \quad a \neq 1, x \in \mathbf{R}. \tag{1.6}$$

Die Graphen von Exponentialfunktionen liegen ausnahmslos in der oberen Halbebene des kartesischen Koordinatensystems und verlaufen alle durch den Punkt (0; 1). Für ein konkretes a verläuft der entsprechende Graph darüber hinaus durch die beiden Punkte $\left(-1; \frac{1}{a}\right)$ und $(1; a)$ (s. *Bilder 1.9a, 1.9b* und vgl. Lösung zur Aufgabe 1.6).

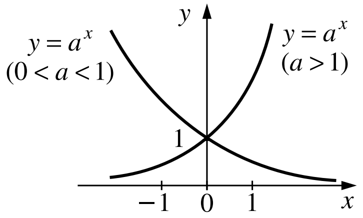

Bild 1.9a

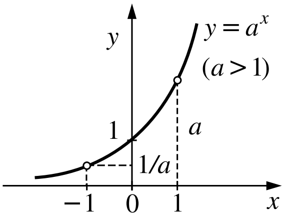

Bild 1.9b

In enger Beziehung zu den Exponentialfunktionen stehen die Logarithmusfunktionen.

Logarithmusfunktionen

$$y = \log_a x, a > 0 \quad \text{und} \quad a \neq 1, x > 0. \tag{1.7}$$

Die Graphen von Logarithmusfunktionen liegen ausnahmslos in der rechten Halbebene des kartesischen Koordinatensystems und verlaufen alle durch den Punkt (1; 0). Man erhält sie durch Spiegelung der Graphen entsprechender Exponentialfunktionen an der Geraden $y = x$. Daher verläuft auch für ein konkretes a der zugehörige Graph der Logarithmusfunktion durch die beiden Punkte $\left(\frac{1}{a}; -1\right)$ und $(a; 1)$ (s. *Bilder 1.10a, 1.10b* und vgl. Lösung zur Aufgabe 1.7).

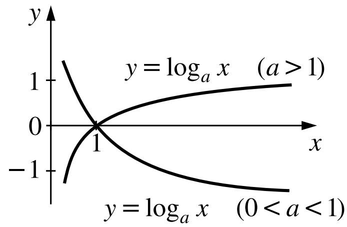

Bild 1.10a

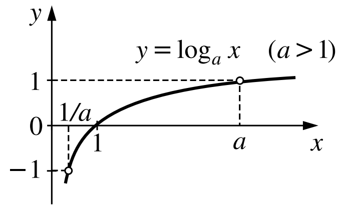

Bild 1.10b

Für die Werte $a = \mathrm{e}$ (e die Eulersche Zahl, $\mathrm{e} \approx 2{,}718\,28$ – natürliche Wachstumskonstante), $a = 2$ und $a = 10$ ergeben sich spezielle Logarithmusfunktionen:

$$y = \log_{\mathrm{e}} x = \ln x, \qquad x > 0, \tag{1.7a}$$

$$y = \log_2 x = \operatorname{ld} x, \qquad x > 0, \quad \text{und} \tag{1.7b}$$

$$y = \log_{10} x = \lg x, \qquad x > 0. \tag{1.7c}$$

In älteren Tafelwerken sind $\ln x$ und $\lg x$ noch tabelliert. Heute sind auf einschlägigen Taschenrechnern entsprechende Funktionstasten vorhanden.

Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen)

$$y = \sin x, \qquad x \in \mathbf{R}, \tag{1.8a}$$

$$y = \cos x, \qquad x \in \mathbf{R}, \tag{1.8b}$$

$$y = \tan x, \qquad x \in \mathbf{R} \text{ und } x \neq \frac{\pi}{2} \pm k\pi,\ k \in \mathbf{N}, \tag{1.9}$$

$$y = \cot x, \qquad x \in \mathbf{R} \text{ und } x \neq \pm k\pi,\ k \in \mathbf{N}. \tag{1.10}$$

Die *Bilder 1.11* und *1.12* zeigen Teile der Graphen von $y = \sin x$ und $y = \cos x$.

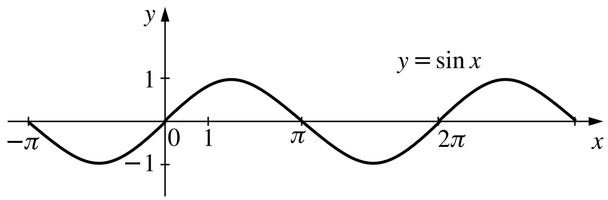

Bild 1.11

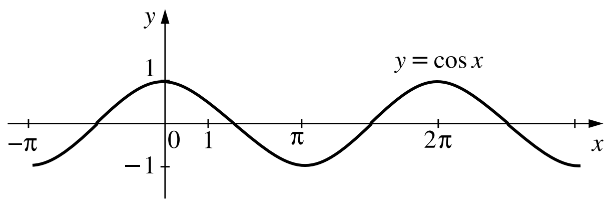

Bild 1.12

Von den trigonometrischen Funktionen können insbesondere $y = \sin x$ und $y = \cos x$ bei der Untersuchung von Saisonschwankungen und Konjunkturerscheinungen von Bedeutung sein.

Als letzte Gruppe der Grundfunktionen seien die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen, die sogenannten **Arkusfunktionen**, hier erwähnt.

> Werden die Grundfunktionen durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division [1)] und/oder Verkettung miteinander verknüpft, so ergeben sich neue Funktionen. Werden auf sie ebenfalls uneingeschränkt die genannten Verknüpfungen angewandt, so ergibt sich ein unerschöpfliches Reservoir von Funktionen. Jede auf diese Weise gebildete Funktion wollen wir **elementare Funktion** nennen.

Die Verknüpfungen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division [1)] zweier Funktionen setzen voraus, dass beide Funktionen den gleichen Definitionsbereich haben. Sie bestehen dann einfach in der Ausführung der entsprechenden algebraischen Operationen mit den Funktionswerten.

BEISPIELE elementarer Funktionen:

1.8 Mit $y=3-5x+7x^2-9x^3$, $x\in\mathbf{R}$, ist eine Summe bzw. Differenz von Potenzfunktionen gegeben. Allgemein spricht man bei Summen bzw. Differenzen von Potenzfunktionen von **Linearkombinationen** von Potenzfunktionen. Sie werden kurz **Polynome** genannt.

1.9 Mit $y=(1+x^2)(1-x^2)$, $x\in\mathbf{R}$, ist das Produkt einer Summe und einer Differenz von Potenzfunktionen, d. h. das Produkt zweier Polynome gegeben.

1.10 Mit $y=(1+x^2)/(1-x^2)$, $x\in\mathbf{R}$ und $x\neq\pm 1$, ist der Quotient zweier Polynome und damit ein Beispiel für rationale Funktionen gegeben. ■

Die **Verkettung** zweier Funktionen g und h zu einer neuen Funktion f besteht darin, die Funktionswerte $g(x)$ als Argumente der Funktion h einzusetzen:

$$f(x)=h\,(g(x))\,,\quad x\in D(f)=D(g). \tag{1.11}$$

Der Term $h\,(g(x))$ ist nur sinnvoll, wenn der Funktionswert $g(x)$ zum Definitionsbereich von h gehört. Deshalb erfordert die Bildung der verketteten Funktion (1.11) die Bedingung $W(g)\subseteq D(h)$ als Voraussetzung. Gegebenenfalls muss der Definitionsbereich von g entsprechend eingeschränkt werden (s. *Beispiel 1.11*). Damit ist auch klar, dass man die Reihenfolge bei der Verkettung zweier Funktionen einhalten muss. Im Falle der verketteten Funktion (1.11) nennt man g die **innere Funktion** und h die **äußere Funktion**.

BEISPIEL

1.11 Verkettete Funktion

Die Funktion $y=\sqrt{(x-1)(x^2+1)}$, $x\geqq 1$, kann als Verkettung der inneren Funktion $g(x)=(x-1)(x^2+1)$, $x\geqq 1$, und der äußeren Funktion $h(g)=\sqrt{g}$, $g\geqq 0$, aufgefasst werden. Da die innere Funktion eine elementare Funktion, die äußere sogar eine Grundfunktion darstellen, gehört die gegebene verkettete Funktion ebenfalls zu den

[1)] Bei der Division zweier Funktionen muss natürlich der Divisor von null verschieden sein.

elementaren Funktionen. Hier ist der Funktionsterm $g(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$ für alle $x \in \mathbf{R}$ erklärt. Er müsste deshalb vorbereitend auf $x \geqq 1$ eingeschränkt werden. ■

1.1.3 Eigenschaften von Funktionen

Wir betrachten eine Auswahl einfachster Eigenschaften von Funktionen, wie sie bei der Untersuchung ökonomischer Größen häufig auftreten.

BEISPIELE

1.12 Logistische Wachstumsfunktionen und ihre charakteristischen Eigenschaften

Der Ausstattungsgrad ist eine ökonomische Kennzahl, die angibt, wieviel von 100 Haushalten im Durchschnitt über ein bestimmtes technisches Konsumgut – z. B. Waschmaschine – verfügen (vgl. [29]). Der maximale Wert eines Ausstattungsgrades ist offensichtlich 100. Man nennt ihn Sättigungswert. Jeder Ausstattungsgrad ist daher durch den Sättigungswert 100 nach oben beschränkt. Weiter erweist es sich, dass die Werte $y(t)$ eines bestimmten Ausstattungsgrades i. Allg. von Jahr zu Jahr größer werden. Schließlich zeigt es sich für einen konkreten Ausstattungsgrad häufig, dass die jährlichen Zuwächse $\Delta y(t) = y(t) - y(t - 1)$ in einer Anfangsphase zunächst ebenfalls wachsen, während sie in der Endphase – bei entsprechender Annäherung an den Sättigungswert – kleiner werden, d. h. sinken. Als Modelle solcher Entwicklungen dienen u. a. sogenannte **logistische Wachstumsfunktionen** mit den charakteristischen S-förmigen Graphen (s. *Bild 1.13*).

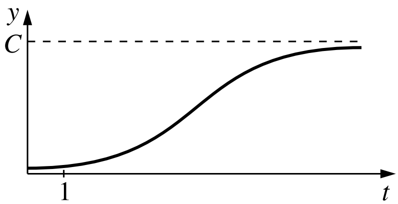

Bild 1.13 Logistische Wachstumsfunktion mit Sättigungskonstante C

1.13 Kostenfunktionen und ihre charakteristischen Eigenschaften

Die Kosten K für die Herstellung eines Produktes wachsen mit der produzierten Menge x. Dieses Wachstum unterscheidet sich aber i. Allg. wesentlich von dem im *Beispiel 1.12* beschriebenen. So wird zwar der Kostenwert $K(x)$ für jede konkrete Produktionsmenge x eine endliche Zahl sein, aber es wäre wenig sinnvoll anzunehmen, dass für die Kosten $K(x)$ bei unbeschränkter Vergrößerung der Produktionsmenge x ein maximaler Kostenwert existiert, der nicht überschritten wird. Weiter geht man in der Betriebswirtschaftslehre teilweise davon aus, dass die Zuwächse $\Delta K(x) = K(x) - K(x-1)$ für kleine Produktionsmengen x zunächst sinken, und ab einer bestimmten Produktionsmenge zu wachsen beginnen. Es ist dies die Situation, die man bei der Unterstellung sogenannter ertragsgesetzlicher Kostenfunktionen antrifft (vgl. Aufgabe 1.10). ■

Eine Funktion $y = f(x)$, $x \in D(f)$, heißt **nach unten** bzw. **nach oben beschränkt**, wenn ihr Wertebereich $W(f)$ nach unten bzw. nach oben beschränkt ist, d. h., wenn es eine Konstante c bzw. C derart gibt, dass

$$c \leqq f(x) \quad \text{bzw.} \quad f(x) \leqq C \text{ für alle } x \in D(f) \tag{1.12}$$

gilt. Existiert sogar eine Konstante K derart, dass

$$|f(x)| \leqq K \text{ für alle } x \in D(f) \tag{1.13}$$

gilt, wird die Funktion **beschränkt** genannt.

BEISPIEL

1.14 Beschränkte Funktionen

Die Funktion $f(x) = 0{,}5x + 1$, $-1 \leqq x \leqq 6$, ist nach unten durch $c = 0{,}5$, nach oben durch $C = 4$ und insgesamt durch $K = 4$ beschränkt:

$0{,}5 \leqq f(x), \quad f(x) \leqq 4$ und $|f(x)| \leqq 4$ für alle $x \in [-1, 6]$.

Die Funktion $f(x) = (x - 3)^2 + 1$, $0 \leqq x \leqq 5$, ist nach unten durch $c = 0$, nach oben durch $C = 10$ und insgesamt durch $K = 10$ beschränkt:

$0 \leqq f(x), \quad f(x) \leqq 10$ und $|f(x)| \leqq 10$ für alle $x \in [0, 5]$.

Die genannten Ergebnisse werden durch die *Bilder 1.1* und *1.2* illustriert. ■

Eine Funktion $y = f(x)$, $x \in D(f)$, heißt in einem Intervall $I \subseteq D(f)$ **monoton wachsend** bzw. **monoton fallend**, wenn die Ungleichung

$$f(x_1) \leqq f(x_2) \text{ bzw. } f(x_1) \geqq f(x_2) \tag{1.14}$$

für beliebige $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ erfüllt ist. Entsprechend heißt die Funktion **streng monoton wachsend** bzw. **streng monoton fallend** in I, wenn

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ bzw. } f(x_1) > f(x_2) \tag{1.15}$$

für beliebige $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt.

Das Wesen der Monotonie liegt darin, dass größeren Argumenten bei wachsenden Funktionen jeweils größere Funktionswerte zugeordnet sind, während bei fallenden Funktionen zum größeren Argument immer der kleinere Funktionswert gehört.

BEISPIEL

1.15 Monotone Funktionen

Die Funktion $f(x) = 0{,}5x + 1$, $-1 \leqq x \leqq 6$, ist in ihrem gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsend (vgl. *Bild 1.1*).
Die Funktion $f(x) = (x - 3)^2 + 1$, $0 \leqq x \leqq 5$, ist in $I_1 = [0, 3] \subseteq D(f)$ streng monoton fallend, in $I_2 = [3, 5] \subseteq D(f)$ dagegen streng monoton wachsend (vgl. *Bild 1.2*). ■

Für Grundfunktionen gelten u. a. folgende **Aussagen**:

A1.1 Potenzfunktionen (1.2) sind für geradzahligen Exponenten n in $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend, in $[0, +\infty)$ dagegen streng monoton wachsend; für ungeradzahligen Exponenten n sind sie in ihrem gesamten Definitionsbereich $(-\infty, +\infty)$ streng monoton wachsend.

A1.2 Exponentialfunktionen (1.6) sind für $0 < a < 1$ in $(-\infty, +\infty)$ streng monoton fallend, für $a > 1$ sind sie dagegen in $(-\infty, +\infty)$ streng monoton wachsend (vgl. Aufgabe 1.6).

A1.3 Logarithmusfunktionen (1.7) sind für $0 < a < 1$ in $(0, +\infty)$ streng monoton fallend, für $a > 1$ sind sie dagegen in $(0, +\infty)$ streng monoton wachsend (vgl. Aufgabe 1.7).

In den *Beispielen 1.12* und *1.13* (vgl. auch die Aufgaben 1.9 und 1.10) wurde zur näheren Charakterisierung des Wachstums der dort betrachteten ökonomischen Größen Ausstattungsgrad und Kosten das Monotonieverhalten ihrer Zuwächse benötigt. Allgemein charakterisiert das Monotonieverhalten der Zuwächse $\Delta f(x)$ einer Funktion f ihre Krümmungseigenschaften.

Eine Funktion $y = f(x)$, $x \in D(f)$, heißt in $I \subseteq D(f)$ **konvex** oder **linksgekrümmt** bzw. **konkav** oder **rechtsgekrümmt**, wenn

$$\Delta f(x_1) \leqq \Delta f(x_2) \text{ bzw. } \Delta f(x_1) \geqq \Delta f(x_2) \tag{1.16}$$

für beliebige $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt. Entsprechend heißt f in I **streng konvex** bzw. **streng konkav**, wenn

$$\Delta f(x_1) < \Delta f(x_2) \text{ bzw. } \Delta f(x_1) > \Delta f(x_2) \tag{1.17}$$

für beliebige $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ erfüllt ist. Dabei bezeichnet $\Delta f(x_i)$ hier einen Zuwachs (eine Veränderung) der Funktionswerte, der gemäß

$$\Delta f(x_i) = f(x_i + h) - f(x_i), \quad i = 1,2,$$

mit hinreichend kleinem $h > 0$ zu bilden ist (siehe auch *Abschnitt 2.2.5* und *8.1.1*).

BEISPIEL

1.16 Untersuchung des Krümmungsverhaltens der Parabel 3. Grades

Die Parabel 3. Grades $f(x) = x^3$, $-\infty < x < +\infty$, ist in $I_1 = (-\infty, 0]$ streng konkav und in $I_2 = [0, +\infty)$ streng konvex.
Den Nachweis beginnen wir mit dem einfacheren Teil.
Für beliebige $x_1, x_2 \in I_2$ mit $x_1 < x_2$ muss gezeigt werden, dass $\Delta f(x_1) < \Delta f(x_2)$ ist.
Für $f(x) = x^3$ lautet diese Ungleichung

$$(x_1 + h)^3 - x_1^3 < (x_2 + h)^3 - x_2^3.$$

Hieraus erhält man schrittweise

$$x_1^3 + 3x_1^2 h + 3x_1 h^2 + h^3 - x_1^3 < x_2^3 + 3x_2^2 h + 3x_2 h^2 + h^3 - x_2^3, \text{ weiter}$$

$$3x_1^2 h + 3x_1 h^2 + h^3 < 3x_2^2 h + 3x_2 h^2 + h^3$$

oder (nach Subtraktion von h^3 und anschließender Division durch $3h$)

$x_1(x_1+h) < x_2(x_2+h)$.

Die letzte Relation ist aber für $0 < x_1 < x_2$ und $0 < x_1 + h < x_2 + h$ immer erfüllt. Da alle Umformungen umkehrbar sind, ist die geforderte Ungleichung $\Delta f(x_1) < \Delta f(x_2)$ für I_2 gezeigt.
Für I_1 muss – entsprechend der behaupteten strengen Konkavität – die entgegengesetzte Ungleichung $\Delta f(x_1) > \Delta f(x_2)$ gezeigt werden. Hierzu wählen wir den umgekehrten Weg im Vergleich zu I_2. Es seien $x_1, x_2 \in I_1$ beliebig fixierte Werte mit $x_1 < x_2$. Dann gibt es immer Werte $h > 0$, sodass $x_1 < x_2 < x_2 + h < 0$. Hieraus folgt $-x_1 > -x_2 > 0$ und $-(x_1+h) > -(x_2+h) > 0$. Multipliziert man nun einerseits die beiden größeren und andererseits die beiden kleineren positiven Werte miteinander, so ergibt sich

$(-x_1)[-(x_1+h)] > (-x_2)[-(x_2+h)] \quad \text{oder} \quad x_1^2 + x_1 h > x_2^2 + x_2 h.$

Die erhaltene Ungleichung multipliziert man zunächst mit $3h$, danach wird h^3 addiert. Das liefert

$3x_1^2 h + 3x_1 h^2 + h^3 > 3x_2^2 h + 3x_2 h^2 + h^3 \quad \text{oder} \quad (x_1+h)^3 - x_1^3 > (x_2+h)^3 - x_2^3,$

womit die geforderte Relation $\Delta f(x_1) > f(x_2)$ für beliebige $x_1 < x_2 < 0$ nachgewiesen ist. ■

Das Krümmungsverhalten von Funktionen lässt sich veranschaulichen. Es zeigt sich nämlich, dass für eine in $I \subseteq D(f)$ konvexe Funktion gilt: Wie immer man zwei Punkte $P_1 = (x_1; f(x_1))$ und $P_2 = (x_2; f(x_2))$ auf dem Graphen von f über I fixiert, der Graph zwischen P_1 und P_2 liegt im Falle strenger Konvexität immer ganz unterhalb der Sekante zwischen P_1 und P_2 (s. *Bild 1.14*). Entsprechend liegt im Falle strenger Konkavität der Graph zwischen P_1 und P_2 immer ganz oberhalb der Sekante zwischen P_1 und P_2 (s. *Bild 1.15*). Insbesondere diese Sachverhalte legitimieren die Bezeichnungen „linksgekrümmt“ und „rechtsgekrümmt“.

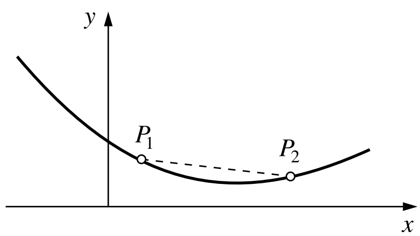

Bild 1.14

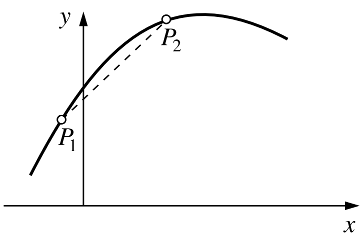

Bild 1.15

1.1.4 Umkehrfunktion

In Zusammenhängen zwischen zwei ökonomischen Größen kann jede der Größen häufig sowohl als unabhängige Variable als auch als abhängige Variable aufgefasst werden. Es ist dabei möglich und teilweise erforderlich, von der Zuordnung einer Größe zu einer anderen auch deren Umkehrung zu betrachten.

BEISPIEL

1.17 Preis-Absatz-Funktion und ihre Umkehrung

Der Preis p eines Produktes kann in Abhängigkeit von der abgesetzten Menge x dieses Produktes aufgefasst werden. Für einfachste Untersuchungen unterstellt man eine lineare Abhängigkeit. Um hier mit konkreten Zahlen arbeiten zu können, wählen wir $p(x) = 400 - 0{,}5x$, $0 \leqq x \leqq 800$.
Da die Preis-Absatz-Funktion $p = p(x)$ streng monoton fallend ist, ergibt sich der Wertebereich zu $W(p) = [0, 400]$, d. h. $0 \leqq p \leqq 400$ (s. *Bild 1.16*).
Kehrt man die Zuordnung um und betrachtet den Absatz x in Abhängigkeit vom Preis p, so erhält man die entsprechende Funktion, indem man die Preis-Absatz-Funktion $p = p(x)$ nach x auflöst:

$p = 400 - 0{,}5x$ liefert $2p = 800 - x$ und schließlich $x = 800 - 2p$, $0 \leqq p \leqq 400$.

Das Resultat kann auch so notiert werden

$x = p^{\mathrm{U}}(p)$, $0 \leqq p \leqq 400$, mit $p^{\mathrm{U}}(p) = 800 - 2p$.

Dabei gilt $p^{\mathrm{U}}(p(x)) = 800 - 2p(x) = 800 - 2(400 - 0{,}5x) = x$.
Die Umkehrung $x = p^{\mathrm{U}}(p)$ der Preis-Absatz-Funktion $p = p(x)$ ist im *Bild 1.17* dargestellt. Diese Darstellung ist ergänzt durch die ursprüngliche Funktion $p = p(x)$ mit ihrem Koordinatensystem (siehe gestrichelte Linien).

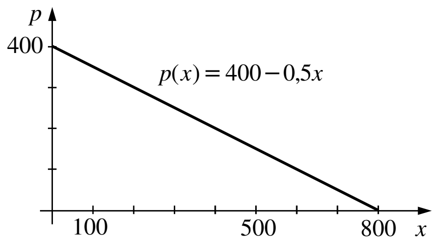

Bild 1.16

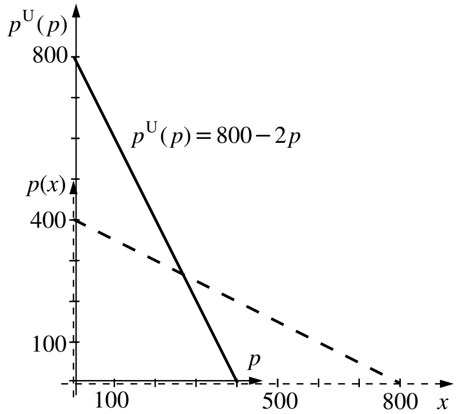

Bild 1.17 ■

Bei der Umkehrung von Funktionen mit ökonomischen Größen ist es nicht üblich, die Variablensymbole formal zu vertauschen. Das würde zur Verwirrung führen, weil hier die Variablensymbole meistens nicht formal gewählt, sondern mit bestimmten Inhalten belegt sind.

Zur Definition der Umkehrfunktion wird der Begriff der Eineindeutigkeit benötigt.

Eine Funktion $y = f(x)$, $x \in D(f)$, heißt **eineindeutig**, wenn verschiedenen Argumenten immer verschiedene Funktionswerte zugeordnet sind, d. h., wenn

$$f(x_1) \neq f(x_2) \text{ für alle } x_1, x_2 \in D(f) \text{ mit } x_1 \neq x_2. \tag{1.18}$$

Eineindeutige Funktionen zeichnen sich dadurch aus, dass ihr Graph nicht nur von jeder Parallelen zur y-Achse, sondern auch von jeder Parallelen zur x-Achse höchstens einmal geschnitten oder tangiert wird. Das gilt von den vier Graphen aus den *Bildern 1.1* bis *1.4* nur für den im *Bild 1.1*.

Von den Grundfunktionen sind alle Potenzfunktionen (1.2) mit ungeradzahligem Exponenten n, alle Exponentialfunktionen (1.6) ebenso wie alle Logarithmusfunktionen (1.7) eineindeutig. Potenzfunktionen (1.2) mit geradzahligem Exponenten n erweisen sich dagegen als nicht eineindeutig. Allerdings kann man durch Einschränkung des Definitionsbereiches auch für sie eineindeutige Parabeläste erhalten. So sind z. B. die Funktionen $y = x^n$, $0 \leqq x < +\infty$, auch für geradzahligen Exponenten n eineindeutig. Die Überlegung, durch Einschränkung des Definitionsbereiches einer Funktion deren Eineindeutigkeit zu erreichen, ist in Anwendungsproblemen von Bedeutung.

BEISPIEL

1.18 Eineindeutige Funktion und Einschränkung einer nicht eineindeutigen Funktion auf eineindeutige Äste

Die Funktion $y = 0{,}5x+1$, $-3 \leqq x \leqq 6$, ist eineindeutig (vgl. *Beispiel 1.3*). Die Funktion $y = (x-3)^2+1$, $0 \leqq x \leqq 5$, ist nicht eineindeutig (vgl. B*eispiel 1.3*). Aber jede ihrer beiden Einschränkungen $f_1(x) = (x-3)^2+1$, $0 \leqq x \leqq 3$, und $f_2(x) = (x-3)^2+1$, $3 \leqq x \leqq 5$, sind eineindeutige Funktionen. ■

Es sei

$$y = f(x),\ x \in D(f),$$

eine eineindeutige Funktion. Dann existiert eine Funktion f^{U}, die $W(f)$ auf $D(f)$ abbildet, und für die $f^{\mathrm{U}}(f(x)) = x$ für alle $x \in D(f)$ gilt. Sie wird **Umkehrfunktion** von f genannt und mit f^{-1} bezeichnet.

Aus der Definition der Umkehrfunktion f^{-1} ergibt sich (vgl. mit $p^{\mathrm{U}}(p(x)) = x$ im *Beispiel 1.17*)

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ für alle } x \in D(f). \tag{1.19}$$

Für Definitions- und Wertebereich von f^{-1} folgen die Relationen

$$D(f^{-1}) = W(f) \quad \text{und} \quad W(f^{-1}) = D(f). \tag{1.20}$$

Weiter gilt: Wenn f eineindeutig ist, dann ist es auch ihre Umkehrfunktion f^{-1}, wobei

$$(f^{-1})^{-1} = f, \tag{1.21}$$

d. h., die *Umkehrfunktion von einer Umkehrfunktion ist* – wie nicht anders zu erwarten – *gleich der Ausgangsfunktion*. Die Relation (1.21) erinnert an die für Zahlen $a \neq 0$ gültige Gleichung $(a^{-1})^{-1} = a$, muss aber von ihr unterschieden werden. Die hochgestellte -1 im Symbol der Umkehrfunktion hat keineswegs die Bedeutung eines Exponenten wie bei a^{-1}.

Deshalb muss die Umkehrfunktion f^{-1} auch prinzipiell vom Kehrwert $\frac{1}{f}$ einer Funktion unterschieden werden:

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}. \tag{1.22}$$

Ein relativ einfaches Hilfsmittel für den Nachweis der Existenz der Umkehrfunktion ist die Monotonie. Es gilt nämlich: Wenn f eine *streng* monotone Funktion ist, dann existiert f^{-1}. Die Umkehrung dieser Aussage gilt i. Allg. nicht, d. h., es gibt Funktionen f, die nicht streng monoton sind, deren Umkehrfunktion jedoch existiert.

Für die praktische Ermittlung der Umkehrfunktion f^{-1} von $y = f(x)$, $x \in D(f)$, skizzieren wir hier zwei Wege.

Beim analytischen Weg wird versucht, die Zuordnungsvorschrift $y = f(x)$ nach x aufzulösen. Wenn die Auflösung eindeutig möglich ist, dann liefert sie bereits die Umkehrfunktion

$$x = f^{-1}(y),\ y \in D(f^{-1}) = W(f). \tag{1.23}$$

Zu beachten ist hier, dass Existenz der Umkehrfunktion nicht automatisch die Auflösbarkeit der Zuordnungsvorschrift $y = f(x)$ nach x im Sinne eines geschlossenen mathematischen Terms $f^{-1}(y)$ bedeutet. So kann z. B. von der Funktion $y = f(x)$ mit $f(x) = \mathrm{e}^x - 3x$, $x \geqq 2$, gezeigt werden (siehe Aufgabe 2.18), dass sie streng monoton wachsend ist, sodass ihre Umkehrfunktion f^{-1} existiert. Dennoch gelingt es nicht, die Zuordnungsvorschrift $y = \mathrm{e}^x - 3x$ so nach x aufzulösen, dass man einen geschlossenen mathematischen Term $f^{-1}(y)$ erhält. Möglich ist es hier lediglich, für jeden konkreten Wert $y \in W(f)$ mit einem Näherungsverfahren (siehe *Abschnitt 2.2.6*) den zugehörigen x-Wert zu berechnen. Beispielsweise liefert $y = 2 \in W(f)$ den Wert $x = 2{,}125\,391\,2$. Man erhält ihn als (eindeutige!) Lösung der nichtlinearen Gleichung $2 = \mathrm{e}^x - 3x$.

Der grafische Weg zur Lösung des Problems der Umkehrfunktion bietet sich an, wenn der Graph von f bereits vorliegt. Dann ist zunächst zu prüfen, ob alle Parallelen zur x-Achse den Graphen von f höchstens einmal schneiden oder tangieren. Ist das der Fall, existiert die Umkehrfunktion f^{-1}, und ihren Graphen erhält man einfach dadurch, dass der Graph von f einschließlich der Koordinatenachsen an der Geraden $y = x$ (Winkelhalbierende des 1. Quadranten) gespiegelt wird (vgl. die *Bilder 1.16* sowie *1.17* und siehe *Beispiel 1.19*).

BEISPIEL

1.19 Bildung einer Umkehrfunktion

Gegeben sei die (streng monoton wachsende) Kostenfunktion

$K(x) = 0{,}05x^2 + 0{,}25x + 2, \quad 1 \leqq x \leqq 10, \quad \text{also} \quad D(K) = [1;\ 10].$

(Diese Kostenfunktion ist durch monoton wachsende Kostenzuwächse charakterisiert und gehört damit zu den sogenannten neoklassischen Kostenfunktionen).

Aus der Monotonie von $K(x)$ folgt zunächst, dass

$K(1) = 2{,}3 \leqq K \leqq 9{,}5 = K(10)$ gilt, d. h.

$W(K) = [2{,}3;\ 9{,}5] = \{x \in \mathbf{R}\colon 2{,}3 \leqq K \leqq 9{,}5\}.$

Stellt man sich die Frage, welche Produktmenge x für einen Kostenbetrag von $K \in W(K)$ hergestellt werden kann, so erfordert das die Ermittlung der Umkehrfunktion K^{-1}. Dazu versuchen wir die Zuordnungsvorschrift $K=0{,}05x^2+0{,}25x+2$ nach x aufzulösen. Multiplikation mit 20 schafft zunächst bei x^2 den Faktor 1 und liefert

$20K = x^2 + 5x + 40$ oder $x^2 + 5x - 20(K-2) = 0$.

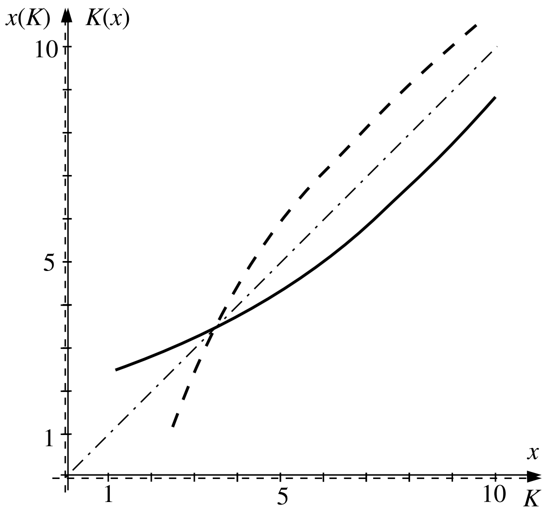

Bild 1.18

Diese quadratische Gleichung besitzt formal die beiden Lösungen

$x_{1,2} = -2{,}5 \pm \sqrt{2{,}5^2 + 20(K-2)}$,

von denen aber der negative Wert $x_1 = -2{,}5 - \sqrt{2{,}5^2 + 20(K-2)}$ ausscheidet, weil er nicht zu $D(K)$ gehört. Also ist die Auflösung von $K = K(x)$ nach x hier eindeutig möglich und liefert die Umkehrfunktion

$K^{-1}: \quad x = -2{,}5 + \sqrt{6{,}25 + 20(K-2)}, \quad 2{,}3 \leqq K \leqq 9{,}5.$

Im *Bild 1.18* sind $K(x)$ und ihre Umkehrfunktion (gestrichelt) grafisch dargestellt, wobei zum besseren Erkennen der spiegelsymmetrischen Lage die Gerade $K = x$ als Hilfsgerade eingezeichnet ist. ■

Unter den Grundfunktionen stehen Exponential- und Logarithmusfunktion im Verhältnis von Umkehrfunktionen zueinander. Deshalb gilt für jedes fixierte $a > 0$, $a \neq 1$ (vgl. (1.19))

$$\log_a a^x = x \text{ für alle } x \in \mathbf{R} \text{ sowie } a^{\log_a x} = x \text{ für alle } x > 0. \qquad (1.24)$$

Diese Relationen können hilfreich bei der Lösung gewisser nichtlinearer Gleichungen sein (s. Aufgabe 1.15).

Für die Übertragung von Monotonie und Krümmung einer Funktion f auf deren Umkehrfunktion f^{-1} gelten die **Aussagen**:

A1.4 Existiert f^{-1} von f, und ist f in $I \subseteq D(f)$ streng monoton wachsend (fallend), dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} in $f(I) \subseteq W(f)$ ebenfalls streng monoton wachsend (fallend).
A1.5 Existiert f^{-1} von f, und ist f in $I \subseteq D(f)$ konvex, dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} in $f(I) \subseteq W(f)$ konkav.
A1.6 Existiert f^{-1} von f, und ist f in $I \subseteq D(f)$ konkav, dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} in $f(I) \subseteq W(f)$ konvex.

Hierbei bezeichnet $f(I)$ den Teil des Wertebereiches $W(f)$, der sich ergibt, wenn x alle Werte des Intervalls $I \subseteq D(f)$ durchläuft.

1.2 Funktionen für ökonomische Zusammenhänge

Produktions- und Kostentheorie stellen wesentliche Gebiete der Betriebswirtschaftslehre dar, denen Funktionen immanent sind. Deshalb nutzen sie zu Recht und mit Erfolg dieses mathematische Hilfsmittel. Dabei geht es neben der Berechnung bestimmter Werte vor allem um die Gewinnung von Informationen über die jeweiligen Zusammenhänge. In Einzelfällen hat das bis zur Erkennung und Formulierung von Gesetzmäßigkeiten geführt. Produktions- und Kostenfunktionen bilden daher auch im *Kapitel 2* wesentliche Schwerpunkte der Anwendungen. Ergänzt werden diese beiden Klassen von Funktionen durch einige weitere funktionale Zusammenhänge, die typisch für betriebswirtschaftliche Untersuchungen sind.

Für die Darstellung von mengenmäßigen Beziehungen zwischen ökonomischen Größen mittels Funktionen sind einige Vereinbarungen erforderlich. So werden wir zwischen **Einfluss-** oder **Faktorgrößen** – kurz Faktor – einerseits und **Ziel-** oder **Wirkungsgrößen** – kurz Wirkung – unterscheiden. Im *Beispiel 1.1* der Kostenfunktion übt die Produktmenge Einfluss auf die Kosten bzw. Durchschnittskosten aus. Deshalb stellt die Produktmenge hier die Einflussgröße dar, während Kosten und Durchschnittskosten Zielgrößen sind. Die Einteilung ökonomischer Größen in Einfluss- und Zielgrößen hängt von der Spezifik der jeweiligen Beziehung ab. Sie kann sich daher von Fall zu Fall ändern. So wird im *Beispiel 1.19* von einer Kostenfunktion ausgegangen, für die die eben genannte Einteilung in Einfluss- und Zielgrößen gilt. Die dort anschließend behandelte Frage nach den herstellbaren Produktmengen zu gegebenen Kostenbeiträgen kehrt diese Einteilung genau um: Die Kosten werden zur Einflussgröße und die Produktmenge zur Zielgröße. Die Symbole werden – ähnlich wie in der Physik – in Anlehnung an die bezeichneten ökonomischen Größen gewählt.

In *Tabelle 1.2* sind einige Funktionen angegeben. Mit [...] sind die Maßeinheiten der jeweiligen ökonomischen Größe bezeichnet. Dabei bedeuten $\mathrm{ME_r}$ – Mengeneinheiten der Ressource, $\mathrm{ME_x}$ – Mengeneinheiten des Produktes, GE – Geldeinheiten.

Für einige der Funktionen lassen sich bestimmte Eigenschaften angeben, die auf inhaltlich-ökonomischen Sachverhalten beruhen. So ist es ökonomisch unmittelbar plausibel, dass Kosten- und Erlösfunktion streng monoton wachsend sind. Dagegen ist die Preis-Absatz-Funktion für ein normales Konsumgut streng monoton fallend. Da der Gewinn sich als Differenz der beiden streng monoton wachsenden Größen Erlös minus Kosten darstellt, besitzt die Gewinnfunktion kein eindeutiges Monotonieverhalten. Allgemein zeigt sich, dass der Gewinnverlauf in zwei Phasen zerfällt: Zunächst steigt der Gewinn bis zu einem absoluten Maximum, und danach sinkt er (vgl. *Abschnitt 2.5.2*). Die Entwicklung der Kosten in Abhängigkeit vom