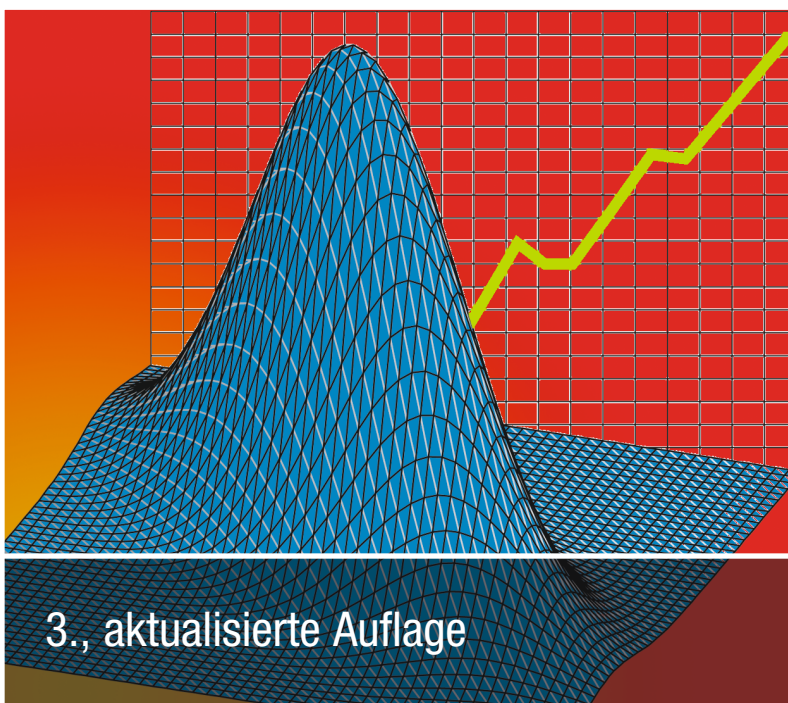


Christopher Dietmaier

Mathematik für Wirtschaftsingenieure

Lehr- und Übungsbuch



HANSER

Christopher Dietmaier

Mathematik für Wirtschaftsingenieure

Lehr- und Übungsbuch

3., aktualisierte Auflage

Mit 294 Bildern, 373 Beispielen sowie 243 Aufgaben



Fachbuchverlag Leipzig
im Carl Hanser Verlag

Prof. Dr. Christopher Dietmaier

Ostbayerische Technische Hochschule Amberg-Weiden,
Fachbereich Wirtschaftsingenieurwesen



Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen
Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet
über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-446-45431-6

E-Book-ISBN 978-3-446-45447-7

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 URG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Carl Hanser Verlag
© 2017 Carl Hanser Verlag München
www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Mirja Werner
Herstellung: Katrin Wulst
Satz: Christopher Dietmaier, Hainsacker
Druck und Bindung: Hubert & Co, Göttingen
Printed in Germany

Vorwort

Die Tätigkeiten und Verantwortungsbereiche von Wirtschaftsingenieuren sind geprägt von komplexen technischen und wirtschaftlichen Aufgaben- und Problemstellungen. Das Studium vermittelt dazu fundierte naturwissenschaftlich-technische und betriebswirtschaftliche Kenntnisse und Fähigkeiten. Grundlage und Voraussetzung hierfür ist die Mathematik. Zusätzlich zu den Gebieten und Problemstellungen der Ingenieurmathematik spielen für Wirtschaftsingenieure auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik sowie weitere mathematische Gebiete wie z.B. die lineare Optimierung eine wichtige Rolle. Weder Lehrbücher der Ingenieurmathematik noch Lehrbücher der Wirtschaftsmathematik behandeln alle diese Gebiete. Es besteht der Bedarf an einem Mathematiklehrbuch für Wirtschaftsingenieure, welches alle für das Studium und die Berufspraxis relevanten Gebiete der Mathematik mit technischen und wirtschaftlichen Anwendungsbeispielen behandelt.

Mit diesem Buch soll ein solches Lehrbuch bereitgestellt werden. Es ist als Lehr- und Übungsbuch konzipiert, mit dem man sich vorlesungsbegleitend oder im Selbststudium die von Wirtschaftsingenieuren benötigte Mathematik erarbeiten kann. Dabei spielen die Übungsaufgaben mit Musterlösungen sowie eine klare, aufeinander aufbauende Struktur eine wichtige Rolle. Durch diese klare Struktur und durch übersichtliche Hervorhebungen der wichtigsten Ergebnisse und Formeln eignet sich das Buch aber auch als Nachschlagewerk für die Praxis. Hauptzielgruppe dieses Buches sind Studenten des Studienganges Wirtschaftsingenieurwesen an Fachhochschulen. Da die Ingenieurmathematik einen Teil des Inhalts bildet, eignet es sich aber auch für reine Ingenieurstudiengänge an Fachhochschulen. Entsprechend dieser Zielgruppe ist eine strenge, durchgängige und vollständige Beweisführung nicht das oberste Ziel dieses Buches, weshalb auf eine Aneinanderreihung von Sätzen und Beweisen verzichtet wird. Auch aus didaktischen Gründen wird viel Wert auf die Darstellung des Anwendungsbezuges gelegt. Anwendungsbeispiele werden nicht nur als Abschluss, sondern oft am Anfang eines Gebietes vorgestellt, um dann induktiv in das Thema einzudringen und Aussagen herzuleiten. Sätze erscheinen dann als Ergebnisse dieser Ausführungen und nicht einfach hingeschrieben, um anschließend bewiesen zu werden. Entsprechend der Zielsetzung des Buches kann und soll nicht alles bewiesen werden. Manche Herleitungen werden nur skizziert, anderes wird nicht in voller All-

gemeinheit hergeleitet, manches bleibt unbewiesen. Trotzdem kann und soll jedoch nicht auf Herleitungen und Beweise verzichtet werden. Mathematik als Werkzeugkasten, aus dem man lediglich Werkzeuge (Formeln) herausnimmt und anwendet, reicht als Grundlage für das Studium und die Berufspraxis nicht aus. Vielmehr muss man in der Lage sein, die Funktionsweise und Einsatzmöglichkeiten der Werkzeuge zu verstehen und ggf. selbst Werkzeuge zu entwickeln, d.h. Ergebnisse herzuleiten.

Es war eine Herausforderung, die Fülle der für Wirtschaftsingenieure relevanten mathematischen Gebiete in einem einbändigen Werk zu behandeln. Ein sinnvoller und geeigneter Weg im Spannungsfeld von mathematischer Präzision und Verständlichkeit, Abstraktion und Anschaulichkeit, Ausführlichkeit und prägnanter Darstellung, Theorie und Anwendungsbezug musste gefunden werden. Da in der Praxis mathematische Problemstellungen oft den Einsatz von Computern erfordern, widmet sich ein eigenes Kapitel der Lösung mathematischer Probleme mit dem Computer. Am Beispiel des Mathematik-Softwaresystems Maple® wird gezeigt, wie die in diesem Buch behandelten mathematischen Probleme mit Hilfe eines solchen Systems gelöst werden können. Das System Maple® war (in Verbindung mit der Grafiksoftware Corel®) auch unerlässliches Werkzeug für die Erstellung der Bilder.

In der dritten Auflage wurden Druckfehler korrigiert. Für entsprechende Hinweise bedanke ich mich, ebenso im Voraus für weitere Anregungen und Verbesserungsvorschläge. Für die Arbeit mit diesem Buch wünsche ich allen Lesern viel Freude an der Mathematik!

Weiden, im Juli 2017

Christopher Dietmaier

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	15
1.1	Aussagen	15
1.2	Mengen	18
1.3	Abbildungen und Verknüpfungen	21
1.4	Die reellen Zahlen und Teilmengen der reellen Zahlen	22
1.4.1	Eigenschaften der reellen Zahlen	22
1.4.2	Wichtige Teilmengen der reellen Zahlen	25
1.5	Summen, Produkte und vollständige Induktion	25
1.6	Aufgaben	29
2	Komplexe Zahlen und algebraische Gleichungen	30
2.1	Komplexe Zahlen	31
2.1.1	Einführung	31
2.1.2	Grundbegriffe	33
2.1.3	Rechenoperationen	34
2.1.4	Exponentialdarstellung von komplexen Zahlen	36
2.1.5	Anwendungen	41
2.2	Algebraische Gleichungen	45
2.3	Aufgaben	50
3	Vektorrechnung	51
3.1	Einführung und Grundbegriffe	51
3.2	Rechnen mit Vektoren	54
3.2.1	Addition von Vektoren und Multiplikation mit einer Zahl	54
3.2.2	Skalarprodukt und Betrag von Vektoren	55
3.2.3	Winkel zwischen Vektoren, Zerlegung von Vektoren	57
3.2.4	Basisvektoren	60
3.2.5	Das Vektorprodukt	61
3.2.6	Das Spatprodukt und Mehrfachprodukte	63
3.3	Vektorrechnung und Geometrie	65

3.3.1	Punkte im Raum.....	65
3.3.2	Geraden im Raum	65
3.3.3	Ebenen im Raum	66
3.3.4	Abstände	66
3.3.5	Winkel.....	69
3.4	Aufgaben	71
4	Matrizen, Determinanten und lineare Gleichungssysteme	73
4.1	Matrizen und Determinanten.....	74
4.1.1	Grundbegriffe und spezielle Matrizen	74
4.1.2	Addition und Multiplikation von Matrizen	77
4.1.2.1	Addition von Matrizen und Multiplikation mit einer Zahl.....	77
4.1.2.2	Multiplikation von Matrizen und inverse Matrix	78
4.1.3	Determinante einer Matrix	81
4.1.4	Inversion einer Matrix mit Determinanten.....	86
4.2	Lineare Gleichungssysteme	88
4.2.1	Lösung mit dem Gaußschen Algorithmus	89
4.2.2	Lösung mit Determinanten: Cramersche Regel.....	96
4.2.3	Inversion von Matrizen als Lösung von Gleichungssystemen	97
4.2.4	Kondition eines Gleichungssystems	100
4.3	Aufgaben	102
5	Funktionen von einer Variablen	105
5.1	Grundlagen.....	106
5.2	Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen.....	116
5.2.1	Folgen.....	116
5.2.2	Grenzwert einer Funktion.....	118
5.2.2.1	Grenzwert für $x \rightarrow x_0$	118
5.2.2.2	Grenzwert für $x \rightarrow \pm \infty$ und Asymptoten	121
5.2.3	Stetigkeit einer Funktion.....	122
5.3	Elementare Funktionen	123
5.3.1	Polynomfunktion	123
5.3.2	Gebrochenrationale Funktionen	125
5.3.3	Die Exponentialfunktion	127
5.3.3.1	Definition und Eigenschaften der Exponentialfunktion	128
5.3.3.2	Anwendungsbeispiele der Exponentialfunktion.....	131
5.3.4	Die Logarithmusfunktion	132
5.3.5	Die Exponentialfunktion zur Basis a	133
5.3.6	Die Logarithmusfunktion zur Basis a	134

5.3.7	Potenz- und Wurzelfunktionen	136
5.3.8	Trigonometrische Funktionen	139
5.3.9	Arkusfunktionen	144
5.3.10	Hyperbelfunktionen	146
5.3.11	Areafunktionen	148
5.4	Aufgaben	149
6	Differenzialrechnung mit Funktionen einer Variablen	152
6.1	Einführung und Grundlagen	152
6.2	Ableitungsregeln	157
6.3	Ableitung elementarer Funktionen	160
6.4	Berechnung von Grenzwerten	161
6.5	Extrema, Krümmung und Wendepunkte	164
6.5.1	Extrema von Funktionen	164
6.5.2	Krümmung einer Funktion und Wendepunkte	175
6.6	Kurvendiskussion	178
6.7	Anwendungsbeispiele	181
6.8	Aufgaben	183
7	Integralrechnung mit Funktionen von einer Variablen	185
7.1	Einführung und Grundlagen	185
7.2	Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	188
7.3	Grundintegrale	191
7.4	Eigenschaften des Integrals	192
7.5	Integrationsmethoden	193
7.5.1	Partielle Integration	193
7.5.2	Integration durch Substitution	194
7.5.3	Logarithmische Integration	197
7.5.4	Integration durch Partialbruchzerlegung	198
7.6	Uneigentliche Integrale	200
7.7	Anwendungsbeispiele	203
7.8	Aufgaben	206
8	Reihen und Reihenentwicklung von Funktionen	208
8.1	Grundlagen	210
8.1.1	Die endliche geometrische Reihe	210
8.1.2	Unendliche Reihen	211
8.2	Potenzreihen	213
8.3	Taylorreihen, Taylorentwicklung	215
8.4	Fourierreihen, Fourierentwicklung	222

8.5	Aufgaben	229
9	Der n-dimensionale Raum und Raumkurven	231
9.1	Der n-dimensionale Raum	231
9.1.1	Grundbegriffe	231
9.1.2	Koordinaten im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$	234
9.1.2.1	Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$	234
9.1.2.2	Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3$	235
9.1.2.3	Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$	235
9.2	Raumkurven	237
9.2.1	Tangential- und Normalenvektoren	239
9.2.2	Bogenlänge	241
9.2.3	Krümmung	243
9.3	Aufgaben	245
10	Differenzialrechnung mit Funktionen von mehreren Variablen	246
10.1	Funktionen von mehreren Variablen	246
10.2	Partielle Ableitung und partielle Differenzierbarkeit	249
10.3	Differenzierbarkeit, Linearisierung und Taylorentwicklung	253
10.3.1	Differenzierbarkeit und totales Differenzial	253
10.3.2	Ableitung nach einem Parameter	257
10.3.3	Taylorentwicklung	258
10.4	Extrema von Funktionen von mehreren Variablen	261
10.4.1	Extrema ohne Nebenbedingungen	262
10.4.2	Extrema mit Nebenbedingungen	272
10.5	Aufgaben	278
11	Integralrechnung mit Funktionen von mehreren Variablen	279
11.1	Bereichsintegrale	279
11.1.1	Bereichsintegral einer Funktion von zwei Variablen	279
11.1.1.1	Integration in kartesischen Koordinaten	281
11.1.1.2	Integration in Polarkoordinaten	286
11.1.2	Bereichsintegral einer Funktion von drei Variablen	290
11.1.2.1	Integration in kartesischen Koordinaten	291
11.1.2.2	Integration in Zylinderkoordinaten	293
11.1.2.3	Integration in Kugelkoordinaten	294
11.2	Kurvenintegrale	296
11.3	Aufgaben	300

12	Gewöhnliche Differenzialgleichungen.....	302
12.1	Einführung und Grundlagen	304
12.2	Gewöhnliche Differenzialgleichungen erster Ordnung.....	306
12.2.1	Separable Differenzialgleichungen: Trennung der Variablen	306
12.2.2	Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung.....	311
12.2.2.1	Homogene lineare Differenzialgleichung erster Ordnung	311
12.2.2.2	Inhomogene lineare Differenzialgleichung erster Ordnung.....	312
12.3	Gewöhnliche Differenzialgleichungen zweiter Ordnung	314
12.3.1	Homogene lineare Differenzialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	315
12.3.2	Inhomogen lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	319
12.4	Aufgaben.....	324
13	Wahrscheinlichkeitsrechnung	326
13.1	Kombinatorik.....	327
13.1.1	Permutationen	327
13.1.2	Variationen	329
13.1.3	Kombinationen.....	331
13.1.4	Zusammenfassung.....	333
13.1.5	Aufgaben zu Abschnitt 13.1	333
13.2	Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeit.....	334
13.2.1	Zufallsexperimente	334
13.2.2	Klassische Wahrscheinlichkeit nach Laplace	335
13.2.3	Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung.....	339
13.2.4	Bedingte Wahrscheinlichkeit, stochastische Unabhängigkeit, totale Wahrscheinlichkeit und Formel von Bayes.....	340
13.2.5	Zusammenfassung.....	343
13.2.6	Aufgaben zu Abschnitt 13.2	345
13.3	Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilung	347
13.3.1	Diskrete Zufallsvariablen	348
13.3.1.1	Wahrscheinlichkeitsfunktion und Verteilungsfunktion	348
13.3.1.2	Parameter einer diskreten Verteilung.....	350
13.3.2	Stetige Zufallsvariablen	352
13.3.2.1	Verteilungsfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte.....	352
13.3.2.2	Parameter einer stetigen Verteilung	354
13.3.3	Zweidimensionale stetige Zufallsvariablen.....	356
13.3.3.1	Verteilungsfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte.....	357
13.3.3.2	Parameter einer zweidimensionalen Zufallsvariablen	360
13.3.3.3	Summen von Zufallsvariablen	361

13.4	Spezielle Verteilungen.....	363
13.4.1	Diskrete Verteilungen	364
13.4.1.1	Die Binomialverteilung	364
13.4.1.2	Die hypergeometrische Verteilung.....	366
13.4.1.3	Die Poissonverteilung	369
13.4.2	Stetige Verteilungen	370
13.4.2.1	Die Normalverteilung	370
13.4.2.2	Die Lognormalverteilung.....	373
13.4.2.3	Die Exponentialverteilung	375
13.4.2.4	Die Weibullverteilung	377
13.4.2.5	Die t-Verteilung.....	378
13.4.2.6	Die Chi-Quadrat-Verteilung	379
13.4.2.7	Die F-Verteilung.....	380
13.4.3	Anwendungsbeispiele in der Qualitätssicherung.....	381
13.4.4	Die zweidimensionale Normalverteilung.....	384
13.5	Grenzwertsätze und Näherungen.....	386
13.5.1	Die Binomialverteilung als Näherung für die hypergeometrische Verteilung	386
13.5.2	Die Poissonverteilung als Näherung für die Binomialverteilung	387
13.5.3	Der zentrale Grenzwertsatz und das Gesetz der großen Zahlen.....	387
13.6	Aufgaben zu den Abschnitten 13.3 bis 13.5	392
14	Deskriptive Statistik	394
14.1	Einführung und Grundbegriffe	394
14.2	Univariate deskriptive Statistik	396
14.2.1	Häufigkeitsverteilung und grafische Darstellungen.....	397
14.2.1.1	Keine Klassenbildung.....	397
14.2.1.2	Klassenbildung	398
14.2.2	Maßzahlen	402
14.2.2.1	Lagemaßzahlen	402
14.2.2.2	Streuungsmaßzahlen	406
14.2.2.3	Konzentrationsmaßzahl: Gini-Koeffizient.....	407
14.3	Bivariate deskriptive Statistik	410
14.3.1	Häufigkeitstabellen und grafische Darstellungen	410
14.3.2	Maßzahlen	413
14.4	Aufgaben	415
15	Schließende Statistik	416
15.1	Einführung und Grundbegriffe	416

15.2	Schätzen von Parametern	417
15.2.1	Eigenschaften von Schätzfunktionen.....	418
15.2.2	Maximum-Likelihood-Schätzung	420
15.2.3	Konfidenzintervalle	422
15.2.4	Aufgaben zu Abschnitt 15.2	430
15.3	Statistische Tests.....	432
15.3.1	Einführung, Grundbegriffe und Vorgehensweise bei Tests.....	432
15.3.2	Spezielle Parametertests	443
15.3.2.1	Test für den Erwartungswert einer normalverteilten Größe	443
15.3.2.2	Test für die Varianz einer normalverteilten Größe.....	444
15.3.2.3	Test für den Erwartungswert einer beliebig verteilten Größe.....	444
15.3.2.4	Test für den Parameter p einer binomialverteilten Größe.....	445
15.3.2.5	Test für den Vergleich der Erwartungswerte zweier Größen.....	447
15.3.2.6	Test für den Vergleich der Varianzen zweier normalverteilter Größen	448
15.3.2.7	Test für den Vergleich der Parameter zweier binomialverteilter Größen	449
15.3.2.8	Test für den Korrelationskoeffizienten einer zweidimensionalen Normalverteilung	449
15.3.3	Der Chi-Quadrat-Anpassungstest	451
15.3.4	Unabhängigkeits- und Homogenitätstests.....	454
15.3.4.1	Der Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest	454
15.3.4.2	Der Chi-Quadrat-Homogenitätstest	456
15.3.5	Der Mann-Whitney-Wilcoxon-Test	457
15.3.6	Aufgaben zu Abschnitt 15.3	459
16	Lineare Optimierung	463
16.1	Grafische Lösung und Simplex-Algorithmus	463
16.1.1	Grafische Lösung.....	465
16.1.2	Der Simplex-Algorithmus.....	467
16.1.3	Sonderfälle	476
16.1.4	Zusammenfassung des Simplex-Algorithmus.....	484
16.1.5	Aufgaben zu Abschnitt 16.1	486
16.2	Transportprobleme.....	487
16.2.1	Die Struktur von Transportproblemen	487
16.2.2	Der Transportalgorithmus.....	491
16.2.3	Aufgaben zu Abschnitt 16.2	495
17	Mathematik mit dem Computer	497
17.1	Einführung.....	497

17.2	Lösung mathematischer Probleme mit Maple.....	503
17.2.1	Einführung.....	503
17.2.2	Lösungsbeispiele.....	505
17.2.2.1	Lösen von Gleichungen.....	505
17.2.2.2	Rechnen mit komplexen Zahlen.....	507
17.2.2.3	Vektoren, Matrizen, lineare Gleichungssysteme	509
17.2.2.4	Funktionsgraphen	512
17.2.2.5	Differenzialrechnung	514
17.2.2.6	Integralrechnung.....	515
17.2.2.7	Summen, unendliche Reihen und Reihenentwicklung von Funktionen	517
17.2.2.8	Grenzwerte.....	518
17.2.2.9	Differenzialgleichungen	518
17.2.2.10	Wahrscheinlichkeitsrechnung.....	518
17.2.2.11	Lineare Optimierung.....	520
A	Lösungen der Aufgaben	521
B	Statistik-Tabellen.....	568
B.1	Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.....	568
B.2	Quantile der t-Verteilung	569
B.3	Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung	570
B.4	Quantile der F-Verteilung.....	572
B.5	Werte für den Mann-Whitney-Wilcoxon-Test	588
	Literaturverzeichnis	590
	Sachwortverzeichnis.....	593

1 Grundlagen

1.1 Aussagen

Mathematik besteht aus *Aussagen* und logischem Schließen und basiert damit auf der *Aussagenlogik*.

Eine Aussage ist eine Behauptung, die entweder wahr oder falsch ist.

Entscheidend ist nicht, dass man feststellen kann, ob die Behauptung wahr oder falsch ist, sondern dass feststeht, dass sie genau eines von beiden ist. Aussagen werden durch Zeichen (hier: Großbuchstaben) dargestellt. Diese Zeichen als Platzhalter für Aussagen heißen Aussagevariablen. Jede Aussage besitzt also genau einen der zwei Wahrheitswerte „wahr“ oder „falsch“. Der Wahrheitswert „wahr“ wird durch die 1, der Wahrheitswert „falsch“ durch die 0 dargestellt. Im folgenden Beispiel handelt es sich bei der Behauptung *C* nicht um eine Aussage. Die Behauptung *B* ist eine Aussage, auch wenn der Wahrheitswert sich vielleicht niemals feststellen lässt. Die Behauptung *A* ist eine (falsche) Aussage.

Beispiel 1.1

- a) *A*: Die Zahl π ist eine rationale Zahl.
- b) *B*: In anderen Galaxien (außerhalb der Milchstraße) gibt es Lebewesen.
- c) *C*: Mathematik ist das schönste Fach im Studium Wirtschaftsingenieurwesen.

Aussagenoperationen bzw. *Aussagenverknüpfung* machen aus einer Aussage eine neue Aussage bzw. verknüpfen zwei Aussagen zu einer neuen Aussage. Die elementarsten Aussagenoperationen und Aussagenverknüpfungen sind die folgenden:

<i>Negation:</i>	$\bar{A}$	„nicht <i>A</i> “
<i>Konjunktion:</i>	$A \wedge B$	„ <i>A</i> und <i>B</i> “
<i>Disjunktion:</i>	$A \vee B$	„ <i>A</i> oder <i>B</i> “
<i>Implikation:</i>	$A \Rightarrow B$	„aus <i>A</i> folgt <i>B</i> “

Diese Aussagenoperation und Aussagenverknüpfungen lassen sich dadurch definieren, dass man für alle möglichen Wahrheitswerte von *A* bzw. von *A* und *B* angibt,

welchen Wahrheitswert die neue Aussage haben soll. Dies geschieht in einer Wahrheitstabelle:

A	B	$\bar{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1

Vielleicht nicht intuitiv unmittelbar einleuchtend sind die ersten zwei Werte in der Definition der Implikation. Intuitiv einsehbar ist jedoch die Gleichwertigkeit der Aussage „Wenn A gilt, dann gilt auch B “ mit der Aussage „Wenn B nicht gilt, dann gilt auch A nicht“. Diese Gleichwertigkeit von $A \Rightarrow B$ mit $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ lässt sich mit der Wahrheitstabelle zeigen:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\bar{B}$	$\bar{A}$	$\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1

Für jede mögliche Kombination der Wahrheitswerte von A und B hat die Aussage $A \Rightarrow B$ immer den gleichen Wahrheitswert wie die Aussage $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$. Wäre der erste Wert in der Definition der Implikation 0 statt 1, so wäre diese Gleichwertigkeit nicht mehr gegeben. In der folgenden Tabelle werden zwei weitere Verknüpfungen, die *Äquivalenz* $A \Leftrightarrow B$ und das *ausschließende Oder* $A \vee_e B$ („entweder oder“, „exclusive or“) definiert:

A	B	$A \vee_e B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Für diese Verknüpfungen gilt:

$$A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

$$A \vee_e B = (A \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge B)$$

Das Gleichheitszeichen ist so zu verstehen, dass für alle möglichen Kombinationen der Wahrheitswerte der eingehenden Aussagenvariablen die Aussagen links und

rechts des Gleichheitszeichens immer den gleichen Wahrheitswert haben. In diesem Sinne gelten auch die folgenden Gleichungen, die sich mit Wahrheitstabellen leicht beweisen lassen:

$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B} \quad (1.1)$$

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B} \quad (1.2)$$

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

Eine Gleichheit zweier Aussagen wie z.B. $A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ kommt auch dadurch zum Ausdruck, dass die Äquivalenz der beiden Aussagen immer wahr ist. Man nennt dies auch eine **Tautologie**:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Die Gleichheit $A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ findet Verwendung beim **indirekten Beweis**. Statt aus einer wahren Aussage A eine Aussage B zu folgern nimmt man an, dass B nicht gilt und schließt daraus, dass dann auch A nicht gilt.

Beispiel 1.2 Indirekter Beweis

Wir beweisen, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist. Wäre $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl, so ließe sich $\sqrt{2}$ als Quotient teilerfremder natürlicher Zahlen darstellen. Es soll nun bewiesen werden, dass dies nicht möglich ist.

A : p und q teilerfremde natürliche Zahlen

$$B: \sqrt{2} \neq \frac{p}{q}$$

Statt der Folgerung $A \Rightarrow B$ erfolgt beim indirekten Beweis die Folgerung $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

$$\overline{B}: \sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2 \text{ gerade} \Rightarrow p \text{ gerade} \Rightarrow p = 2p'$$

$$\Rightarrow p^2 = 4p'^2 \Rightarrow 2q^2 = 4p'^2 \Rightarrow q^2 = 2p'^2 \Rightarrow q^2 \text{ gerade} \Rightarrow q \text{ gerade} \Rightarrow q = 2q'$$

$$\Rightarrow p \text{ und } q \text{ besitzen den gemeinsamen Teiler } 2 \Rightarrow \overline{A}.$$

In der Mathematik nennt man Aussagen, die als wahr betrachtet, jedoch nicht hergeleitet werden, **Axiome**. Ersetzt man in einer Aussage A eine Konstante durch die Variable x , so entsteht eine **Aussageform** $A(x)$.

Beispiel 1.3 Aussageform

Ersetzt man in der wahren Aussage $A: 3^2 + 4^2 = 5^2$ die Zahl 2 durch eine Variable x , so entsteht die Aussageform $A(x): 3^x + 4^x = 5^x$. Diese Aussageform ist wahr für $x=2$ und falsch für alle anderen Zahlen x .

Ergänzt man eine Aussageform $A(x)$ zu einer der folgenden Aussagen

- $A(x)$ für alle x
- Es existiert mindestens ein x mit der Eigenschaft $A(x)$

so erhält man wieder Aussagen. Diese Ergänzungen heißen *Quantoren*. Besonders wichtig sind die zwei genannten Quantoren:

- $\forall x$ „... für alle x “
- $\exists x$ | ... „Es existiert (mindestens) ein x mit der Eigenschaft ...“

Beispiel 1.4 Quantoren

Die Aussage $3^x + 4^x = 5^x \forall x$ ist eine falsche Aussage.

Die Aussage $\exists x | 3^x + 4^x = 5^x$ ist eine wahre Aussage.

1.2 Mengen

Wir betrachten bestimmte, unterscheidbare Objekte, die durch eine *Zugehörigkeit* zu einer so genannten *Grundmenge*, gekennzeichnet sind: Alle Objekte gehören zur Grundmenge G .

Eine *Menge* M ist ein Objekt mit folgender Eigenschaft: Bestimmte Elemente aus der Grundmenge gehören zu M , alle anderen Elemente nicht.

Die Menge, zu der kein Element gehört, heißt *leere Menge*. Mengen werden i.d.R. mit Großbuchstaben, Elemente mit Kleinbuchstaben dargestellt. Zur Beschreibung einer Menge werden die Elemente in geschweiften Klammern aufgezählt oder mit Hilfe von Aussageformen beschrieben:

- a) Aufzählung der Elemente $M = \{a_1, a_2, \dots\}$
- b) Beschreibung mit Hilfe von Aussageformen $M = \{x | A(x)\}$

Die leere Menge wird mit dem Symbol $\{ \}$ oder $\emptyset$ bezeichnet. Für die *Zugehörigkeit* eines Elementes a zu einer Menge M verwendet man folgende Schreib- bzw. Sprechweisen:

Zugehörigkeit:	$a \in M$	„a ist Element von M“
Keine Zugehörigkeit:	$a \notin M$	„a ist nicht Element von M“

Die Aussagen $A \subset B$ und $A = B$ haben folgende Bedeutung:

$$A \subset B \Leftrightarrow x \in B \quad \forall x \in A$$

A ist *Teilmenge* von B

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$$

Gleichheit von A und B

Mengen werden häufig mit Euler-Venn-Diagrammen anschaulich dargestellt.

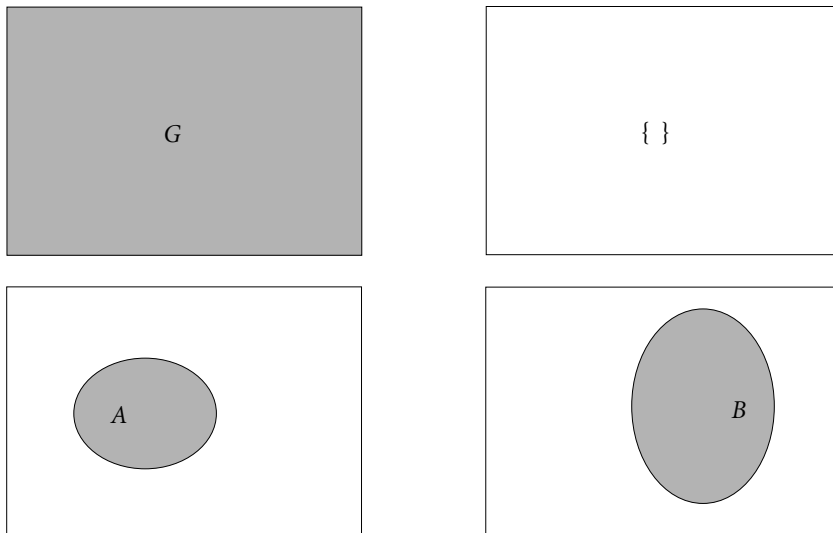


Bild 1.1 Euler-Venn-Diagramme

Die folgenden *Mengenoperationen* werden jeweils durch ein Euler-Venn-Diagramm veranschaulicht.

Schnittmenge $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Vereinigungsmenge

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

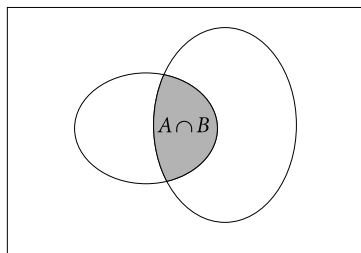


Bild 1.2

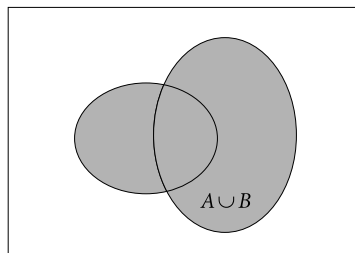


Bild 1.3

Differenzmenge $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ **Komplement** $\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}$

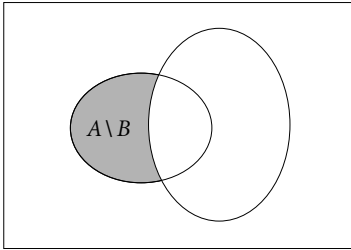


Bild 1.4

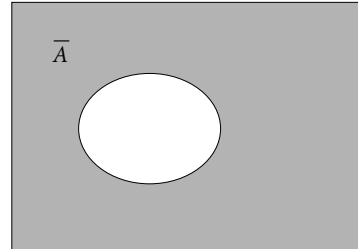


Bild 1.5

Für die Mengenoperationen gelten folgende Gesetze:

Kommutativgesetze	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$
Assoziativgesetze	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Distributivgesetze	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Neutralität	$A \cap G = A$ $A \cup \{\} = A$
Komplementarität	$A \cap \bar{A} = \{\}$ $A \cup \bar{A} = G$ $G = \bar{\{\}}$ $\bar{G} = \{\}$
De Morgansche Regeln	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Unter einer **Produktmenge** $A \times B$ zweier Mengen A und B versteht man die Menge

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Beispiel 1.5 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$

Entsprechend sind Produktmengen mehrerer Mengen definiert:

$$M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in M_1 \wedge \dots \wedge x_n \in M_n\}$$

Beispiel 1.6 $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$

1.3 Abbildungen und Verknüpfungen

Bei einer Menge $M \subset D \times B$ mit den zwei Eigenschaften

1. Zu jedem $x \in D$ gibt es ein $y \in B$ mit $(x, y) \in M$.
2. Für alle $x \in D$ und $y, z \in B$ gilt: $(x, y) \in M \wedge (x, z) \in M \Rightarrow y = z$

spricht man von einer **Abbildung** der Menge D auf die Menge B .

Schreibweise: $D \rightarrow B$

Bei einer Abbildung $D \rightarrow B$ ist *jedem* Element von D *genau ein* Element von B zugeordnet. Sind D und B Teilmengen der reellen Zahlen, so spricht man von einer **Funktion**. Die Gleichung $y = f(x)$, die angibt, welche Zahl $y \in B$ einer Zahl $x \in D$ zugeordnet wird, heißt Funktionsgleichung.

Beispiel 1.7 $D = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$, $B = \mathbb{R}$, $M = \{(x, y) \mid x \in D \wedge y = \sqrt{1 - x^2}\}$

Jedem $x \in D$ ist genau ein $y \in B$ zugeordnet. Es liegt eine Abbildung vor. Die Funktionsgleichung lautet $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Beispiel 1.8 $D = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$, $B = \mathbb{R}$, $M = \{(x, y) \mid x \in D \wedge x^2 + y^2 = 1\}$

Es handelt sich nicht um eine Abbildung, da jedem $x \in]-1, 1[\subset D$ die zwei Elemente $y = \pm \sqrt{1 - x^2}$ zugeordnet sind.

Eine Abbildung $M_1 \times M_2 \rightarrow M_3$, die jedem Element $(a, b) \in M_1 \times M_2$ ein Element $a \circ b \in M_3$ zuordnet, heißt **Verknüpfung**.

Beispiel 1.9 Das Vektorprodukt

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \vec{a}, \vec{b} \rightarrow \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Für Verknüpfungen $M \times M \rightarrow M$ wird Folgendes definiert:

Die Verknüpfung heißt **assoziativ**, wenn

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \quad \forall a, b, c \in M.$$

Die Verknüpfung heißt **kommutativ**, wenn

$$a \circ b = b \circ a \quad \forall a, b \in M.$$

e heißt **neutrales Element**, wenn

$$a \circ e = e \circ a = a \quad \forall a \in M.$$

a^{-1} heißt das zu a **inverse Element**, wenn

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e.$$

Beispiel 1.10 Addition reeller Zahlen

Die Verknüpfung $+$ (Addition) für reelle Zahlen ist assoziativ und kommutativ. Das neutrale Element ist die Zahl 0 , das zu einer Zahl a inverse Element ist die Zahl $-a$.

Beispiel 1.11 Vektorprodukt

Das in Beispiel 1.8 aufgeführte Vektorprodukt ist weder assoziativ noch kommutativ. Es gibt kein neutrales und damit auch kein inverses Element.

Eine *Gruppe* ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $\circ$ und folgenden Eigenschaften:

- Die Verknüpfung ist assoziativ.
- Es existiert ein neutrales Element.
- Zu jedem $a \in G$ existiert ein inverses Element.

Eine Gruppe mit einer kommutativen Verknüpfung heißt *kommutative Gruppe*.

Beispiel 1.12

Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen bildet mit der Addition $+$ eine kommutative Gruppe.

Ein *Körper* ist eine Menge K mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ und folgenden Eigenschaften (e^+ ist das neutrale Element der Verknüpfungen $+$):

- K bildet mit der Verknüpfung $+$ eine kommutative Gruppe.
- $K \setminus \{e^+\}$ bildet mit der Verknüpfung $\cdot$ eine kommutative Gruppe.
- Es gilt das Distributivgesetz: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall x, y, z \in K$.

Beispiel 1.13

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen bildet mit der Addition $+$ und der Multiplikation $\cdot$ einen Körper.

1.4 Die reellen Zahlen und Teilmengen der reellen Zahlen**1.4.1 Eigenschaften der reellen Zahlen**

Bei der Einführung von Zahlenmengen beginnt man häufig mit der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. Nach der Erklärung der Addition und Multiplikation stellt man fest, dass nicht alle Gleichungen, die mit diesen Verknüpfungen gebildet werden können, eine Lösung besitzen. Die Forderung der Lösbarkeit von Gleichungen und der Existenz von inversen Elementen führt zu einer Erweiterung der Zahlenmenge

über die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen und die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen schließlich zu der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

Zahlenmenge M	Beispiel für Gleichungen, die in M nicht lösbar sind	Nicht existent in M
Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$ ↓	$3 + x = 2$	Inverse Elemente für Addition Inverse Elemente für Multiplikation
Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$ ↓	$3 \cdot x = 2$	Inverse Elemente für Multiplikation
Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ ↓	$x \cdot x = 2$	
Reelle Zahlen $\mathbb{R}$	$x \cdot x = -2$	

Dieser Weg von den natürlichen zu den reellen Zahlen soll hier nicht nachvollzogen werden. Stattdessen sollen hier die Ergebnisse dargestellt werden: Die grundlegenden Eigenschaften der reellen Zahlen, aus denen alle weiteren Eigenschaften gefolgert werden können. Da diese Eigenschaften auch dazu verwendet werden, die reellen Zahlen axiomatisch einzuführen, heißen sie *Axiome der reellen Zahlen*.

Körperaxiom

Es gibt zwei Verknüpfungen $+$ (*Addition*) und $\cdot$ (*Multiplikation*) mit folgender Eigenschaft: Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen bilden mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ einen Körper.

Das neutrale Element der Addition bzw. Multiplikation ist die Zahl 0 bzw. 1. Das zu einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ inverse Element bez. Addition bzw. Multiplikation wird mit $-a$ bzw. mit a^{-1} bezeichnet. Mit den inversen Elementen definiert man die Subtraktion und Division:

Subtraktion: $a - b = a + (-b)$

Division: $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$

Anordnungsaxiome

Es gibt eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ (*positive Zahlen*) mit folgenden Eigenschaften:

- Für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Aussagen:
 $a \in M$, $a = 0$, $-a \in M$
- $a \in M \wedge b \in M \Rightarrow a + b \in M$
- $a \in M \wedge b \in M \Rightarrow a \cdot b \in M$

Für $a \in M$ schreibt man $a > 0$. Der Ausdruck $a > b$ bzw. $a < b$ bedeutet $a - b > 0$ bzw. $b - a > 0$. Die Aussage $a \geq b$ bzw. $a \leq b$ ist äquivalent zu $a > b \vee a = b$ bzw. $a < b \vee a = b$. Die Menge M wird auch mit $\mathbb{R}^+$ bezeichnet. Die Körper- und Anordnungsaxiome beinhalten die bekannten Rechenregeln für das Rechnen mit reellen Zahlen.

Vollständigkeitsaxiom

Eine Menge M heißt *nach oben beschränkt* bzw. *nach unten beschränkt*, wenn es eine Zahl a gibt (*obere Schranke* bzw. *untere Schranke*) mit $x \leq a \ \forall x \in M$ bzw. $x \geq a \ \forall x \in M$. Die kleinste obere bzw. größte untere Schranke einer Menge M heißt *Supremum* bzw. *Infimum* der Menge M und wird mit $\sup M$ bzw. $\inf M$ bezeichnet. Gehört das Supremum bzw. Infimum zur Menge M , so wird es *Maximum* bzw. *Minimum* der Menge M genannt und mit $\max M$ bzw. $\min M$ bezeichnet. Das Vollständigkeitsaxiom lautet:

Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum $a \in \mathbb{R}$.

Das Vollständigkeitsaxiom kann auch folgendermaßen formuliert werden:

Für jede Zerlegung der Menge $\mathbb{R}$ in zwei nichtleere Teilmengen $A \subset \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}$ mit den zwei Eigenschaften („Dedekindscher Schnitt“)

1. $A \cup B = \mathbb{R}$
2. $x < y \ \forall x \in A, y \in B$

gibt es genau eine „Trennungszahl“ $t \in \mathbb{R}$ mit

$$x \leq t \leq y \ \forall x \in A, y \in B$$

Für die Menge der rationalen Zahlen gilt das Vollständigkeitsaxiom nicht. Um dies zu sehen, zerlegen wir die Menge $\mathbb{Q}$ in die Mengen

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2 \vee x < 0\} \text{ und } B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2 \wedge x > 0\}.$$

Für diese Zerlegung gilt:

$$A \cup B = \mathbb{Q} \text{ und } x < y \ \forall x \in A, y \in B.$$

Für die „Trennungszahl“ $t = \sqrt{2}$ gilt:

$$x \leq t \leq y \ \forall x \in A, y \in B$$

Diese Zahl gehört weder zu A noch zu B (s. Beispiel 1.2). Sie liegt „zwischen“ den Mengen A und B . Auf der Zahlengeraden gibt es einen Punkt, der weder zu A noch zu B gehört. Die Menge der Punkte auf der Zahlengeraden, welche rationale Zahlen dar-

stellen, hat „Lücken“. Das Vollständigkeitsaxiom drückt aus, dass die reellen Zahlen im Gegensatz zu den rationalen Zahlen ein „lückenloses Kontinuum“ bilden: Jeder reellen Zahl entspricht ein Punkt auf der Zahlengeraden und umgekehrt. Es gibt keinen Punkt auf der Zahlengeraden, der keine reelle Zahl darstellt.

1.4.2 Wichtige Teilmengen der reellen Zahlen

Natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{x \mid x \in \mathbb{N} \vee -x \in \mathbb{N} \vee x = 0\}$

Rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{x \mid x = p/q, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

Positive reelle Zahlen $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
 $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Intervalle

$[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	$]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
$] -\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	$] -\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

ε -Umgebungen

In der Analysis werden häufig sog. ε -Umgebungen betrachtet. Darunter versteht man die folgenden Mengen:

ε -Umgebungen $U_\varepsilon(x_0)$ von x_0 :

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \mid x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\} =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$$

Punktierte ε -Umgebungen $U_\varepsilon^\bullet(x_0)$ von x_0 :

$$U_\varepsilon^\bullet(x_0) = U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\} =]x_0 - \varepsilon, x_0[\cup]x_0, x_0 + \varepsilon[$$

1.5 Summen, Produkte und vollständige Induktion

Für Summen und Produkte von n Zahlen werden folgende Schreibweisen verwendet:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \qquad a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{k=1}^n a_k$$

Das Summen- bzw. Produktzeichen Σ bzw. Π kann auch mehrfach verwendet werden. Für die Summe bzw. das Produkt der mn Zahlen

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

schreibt man

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ik} = a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n} + \dots + a_{m1} + a_{m2} + \dots + a_{mn} \text{ bzw.}$$

$$\prod_{k=1}^n \prod_{i=1}^m a_{ik} = a_{11} \cdot a_{12} \cdot \dots \cdot a_{1n} \cdot \dots \cdot a_{m1} \cdot a_{m2} \cdot \dots \cdot a_{mn}$$

Wir schreiben die Summe

$$s_n = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n$$

zweimal mit verschiedener Reihenfolge der Summanden auf.

$$\begin{array}{rcllclcl} s_n & = & 1 & + & 2 & + & \dots & + & (n-1) & + & n \\ s_n & = & n & + & (n-1) & + & \dots & + & 2 & + & 1 \\ 2s_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

Wir addieren die zwei Reihen und erhalten $2s_n = n(n+1)$. Es gilt also

$$s_n = \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

Dieses Ergebnis lässt sich auch auf eine andere Weise herleiten. Dazu betrachtet man eine Aussageform $A(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$. Will man beweisen, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, so muss man zeigen, dass $A(n)$ für $n=1$ gilt und dass aus der Gültigkeit von $A(n)$ die Gültigkeit von $A(n+1)$ folgt. Dieses Verfahren heißt Beweis durch *vollständige Induktion*.

Beweis durch vollständige Induktion

Zu beweisen:	$A(n) \forall n \in \mathbb{N}$
1. Schritt:	$A(1)$
2. Schritt:	$A(n) \Rightarrow A(n+1)$

Beispiel 1.14

Zu beweisen: $A(n): s_n = \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$

1. Schritt: $A(1): s_1 = \sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1}{2}1 \cdot 2$

2. Schritt: $A(n): s_n = \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^n k \right) + (n+1) = \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) \\ &= \frac{1}{2}(n(n+1) + 2(n+1)) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \Rightarrow A(n+1) \end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion lässt sich auch der folgende Satz beweisen:

Binomischer Lehrsatz

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \end{aligned} \quad (1.3)$$

In (1.3) treten die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ auf. Um die Definition der Binomialkoeffizienten angeben zu können, müssen wir die *Fakultät* $n!$ einer Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ definieren:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \text{ für } n \in \mathbb{N} \quad (1.4)$$

$$0! = 1 \quad (1.5)$$

Der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ wird nun folgendermaßen definiert:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ mit } n, k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } k \leq n \quad (1.6)$$

Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ kann man auch aus dem „Pascal-Dreieck“ ablesen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 \ddots & & \ddots & & & & \ddots & & \ddots
 \end{array}$$

Die in diesem Dreieck auftretenden Zahlen haben folgende Bedeutung:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 \ddots & & \ddots & & & & \ddots & & \ddots
 \end{array}$$

Für die Binomialkoeffizienten gelten folgende Beziehungen, deren Gültigkeit man am Pascalschen Dreieck erkennt und mit (1.6) leicht beweisen kann.

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n} \quad (1.7)$$

$$\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1} \quad (1.8)$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (1.9)$$

Aus dem Binomischen Lehrsatz erhält man z.B. die Formeln:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

1.6 Aufgaben

Aufgabe 1.1

Beweisen Sie mit Hilfe von Wahrheitstabellen die De Morganschen Regeln (1.1) und (1.2) der Aussagenlogik.

Aufgabe 1.2

Zeigen Sie: Wählt man bei der Definition der Implikation in der Wahrheitstabelle die ersten zwei Werte anders, als dies in Abschnitt 1.1 geschehen ist, so gilt entweder die Gleichheit $A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ nicht mehr oder man erhält die Gleichheit $A \Rightarrow B = B \Rightarrow A$.

Aufgabe 1.3

Beweisen Sie indirekt, dass $\sqrt{3}$ keine rationale Zahl ist. Hinweis: Das Produkt zweier ganzer Zahlen ist genau dann durch 3 teilbar, wenn mindestens ein Faktor durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 1.4

Zeigen Sie, dass folgende Gleichung gilt:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Aufgabe 1.5

Beweisen Sie durch vollständige Induktion die folgenden Formeln:

a) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

b) $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

c) $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$

d) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

e) $(1+x)^n \geq 1+nx$ für $x \geq -1$