

Lukas Baumanns, Benjamin Rott und Nina Sturm
(Hrsg.)

Mit Abstand die beste Tagung



WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Ars Inveniendi et Dejudicandi

Edited by
Torsten Fritzlar und Benjamin Rott
Volume 16

**Lukas Baumanns, Benjamin Rott
& Nina Sturm (Hrsg.)**

Mit Abstand die beste Tagung

Tagungsband der Herbsttagung
des
GDM-Arbeitskreises Problemlösen 2020

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese
Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte Informationen sind im Internet über
<http://www.dnb.de> abrufbar

Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf
ohne schriftliche Einwilligung des Verlags in
irgendeiner Form reproduziert oder unter Ver-
wendung elektronischer Systeme verarbeitet, ver-
vielfältigt oder verbreitet werden.

© WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und
Medien, Ferdinand-Freiligrath-Str. 26, Münster
Münster 2021 – E-Book
ISBN 978-3-95987-194-5
<https://doi.org/10.37626/GA9783959871945.0>

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort der Herausgeber*innen _____	1
Lukas Baumanns, Nina Sturm und Benjamin Rott	1
Zum flexiblen Umgang mit variierten mathematischen Anforderungen – Eine Interviewstudie zu einer Problemserie zum Rückwärtsarbeiten _____	3
Isabelle Gretzschel, Daniela Aßmus & Torsten Fritzlar	3
Revisiting Problem Posing: Versuch einer konzeptuellen Ordnung _____	19
Lukas Baumanns & Benjamin Rott	19
„Man muss rückwärts rechnen“ – Zur Arbeitsrichtung bei der 7-Tore- Aufgabe _____	35
Thomas Gawlick	35
Vom Schattenbild zur Abbildung _____	51
Wilfried Dutkowski	51
„Teil B – das sind doch alles problemhaltige Aufgaben.“ Zum Verständnis von problemhaltigen Aufgaben im Prüfungsformat der Besonderen Leistungsfeststellung. _____	65
Heike Hagelgans	65
Eine Adaption von Polymath für mathematisch begabte Schüler:innen: Ein Vorschlag (auch) für Distanzphasen _____	81
Karl Heuer, Benjamin Rott und Deniz Sarikaya	81
Gesucht: 4 spezielle Zahlen mit 45 in Summe – graphische Darstellungen als Erkenntnismittel _____	97
Inge Schwank	97
Problembearbeitungen unterstützen – Potential heuristischer Lösungsbeispiele als Lernangebotsformat im Mathematikunterricht _____	115
Annika Bachmann und Eva Müller-Hill	115

VORWORT DER HERAUSGEBER*INNEN

Lukas Baumanns, Nina Sturm und Benjamin Rott

Die durch das SARS-CoV-2 ausgelöste Pandemie hat weiterhin einen immensen Einfluss auf die Universitäten. Auch die Durchführung von Tagungen wird dadurch erschwert. Dennoch hat sich auch im vergangenen Jahr der GDM-Arbeitskreis Problemlösen zu seiner jährlichen Herbsttagung zusammengefunden. Diese wurde von der Universität zu Köln am 7. und 8. Oktober 2020 in einem Online-Format – und dadurch mit hinreichendem Abstand – organisiert und durchgeführt. Im Sinne des „Flipped Classrooms“ wurden die Vortragsvideos vorab von den Vortragenden erstellt und allen angemeldeten Personen vor der Tagung zur Verfügung gestellt, um den Austausch vorzubereiten. Dadurch bestanden die Beiträge während der Tagung aus einer kurzen ca. zehnminütigen Kurzversion bzw. Zusammenfassung und einer längeren, sehr ergiebigen Diskussionsphase, von der der wissenschaftliche Diskurs spürbar profitierte.

Insgesamt 38 Teilnehmende haben zehn Vorträge diskutiert, wobei eine große Bandbreite an wissenschaftlichen Studien und praktischen Erfahrungen zum mathematischen Problemlösen zusammengetragen wurden: So wurde unter anderem das Rückwärtsarbeiten aus konzeptueller und empirischer Perspektive beleuchtet. Ein anderer Beitrag hat die Aufgaben zentraler Prüfungen aus Thüringen und Sachsen auf ihre Problemhaftigkeit untersucht. Zudem wurde ein Format zur Förderung mathematisch befähigter Schüler*innen während der anhaltenden Pandemie vorgestellt. Aus diesen Vorträgen haben acht Beiträge ihren Weg in den vorliegenden Tagungsband gefunden.

Die Sprecher*innen des Arbeitskreises freuen sich, dass sich die Freund*innen des Problemlösens trotz räumlicher Distanz weiterhin thematisch nah sind.



Quelle

Baumanns, L., Sturm, N. & Rott, B. (2021). Arbeitskreis: Problemlösen. Online, 7./8. 10. 2020. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 110, 89–90.

ZUM FLEXIBLEN UMGANG MIT VARIERTEN MATHEMATISCHEN ANFORDERUNGEN – EINE INTERVIEWSTUDIE ZU EINER PROBLEMSERIE ZUM RÜCKWÄRTSARBEITEN

Isabelle Gretzschel, Daniela Aßmus & Torsten Fritzlär

Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

In der Auseinandersetzung mit mathematischen Problemstellungen werden Schülerinnen und Schüler immer wieder mit unterschiedlichen und auch für sie neuen Anforderungen konfrontiert. Für deren erfolgreiche und effiziente Bearbeitungen, abseits oft langwieriger willkürlich probierender Vorgehensweisen, sind Anpassungen an die jeweils vorliegenden Bedingungen erforderlich. Diese Fähigkeit wird nicht nur im alltäglichen Sprachgebrauch als Flexibilität bezeichnet. Vor diesem Hintergrund interessieren wir uns für den Umgang mit geringfügig variierten mathematischen Problemstellungen, bei deren Bearbeitungen zuvor verwendete Vorgehensweisen unter Anpassung an die veränderten Bedingungen erneut genutzt werden können. Im Rahmen einer Interviewstudie wurde dafür eine Problemserie zu unterschiedlichen Anforderungen zum Rückwärtsarbeiten entwickelt. Aus den Variationen der Probleme resultierte die Notwendigkeit, nicht probierend angelegte Vorgehensweisen zu verändern. Der Beitrag soll einen ersten Einblick in den Umgang von Schülerinnen und Schülern der sechsten Klassenstufe mit dieser Problemserie bieten. Die Bearbeitungen wurden mittels qualitativer Inhaltsanalyse kategoriebasiert ausgewertet und mit dem Verständnis von Flexibilität als Handlungsmerkmal in einem neu entwickelten Synthesemodell zusammengeführt, welches flexibles Handeln beim Bearbeiten mathematischer Probleme veranschaulichen soll.

1 EINLEITUNG

Problemlösen gilt als eine der bedeutendsten kognitiven Aktivitäten im alltäglichen Leben und zugleich als Herzstück der Mathematik (Halmos, 1980). So verwundert es auch nicht, dass die Entwicklung von Problemlösefähigkeit als anerkanntes Ziel des Mathematikunterrichts bereits für die Primarstufe gilt.

Da Probleme immer durch eine oder mehrere personenspezifische Barrieren gekennzeichnet sind und zumeist auch mit neuartigen oder veränderten Bedingungen für das Individuum einhergehen, stehen dem Individuum entweder noch keine passenden Vorgehensweisen zur Verfügung oder aber bereits bekannte Vorgehensweisen können nicht unmittelbar zur Anwendung gebracht werden (Lange, 2013, S. 28f.). Vielmehr müssen für eine erfolgreiche Bearbeitung neue Vorgehensweisen entwickelt werden. Dies kann auch dadurch

In L. Baumanns, N. Sturm & B. Rott (Hrsg.), *Mit Abstand die beste Tagung. Tagungsband der Herbsttagung des GDM-Arbeitskreises Problemlösen 2020* (S. 3–18). WTM.

<https://doi.org/10.37626/GA9783959871945.0.01>

gelingen, dass bereits bekannte Bearbeitungswege an die neuartigen oder veränderten Bedingungen angepasst werden.

Flexibilität kann Einfluss darauf haben, wie mit Problemanforderungen umgegangen wird und auch wesentlich zu erfolgreichen Bearbeitungen beitragen (Elia et al., 2009). Dementsprechend wird deren Bedeutung für das Problemlösen auch vielfach betont (Dina et al., 2018; Heinze et al., 2009).

Der Großteil der mathematikdidaktischen Studien zu Flexibilität untersucht die Nutzung von Strategien¹ in arithmetischen oder algebraischen Kontexten. Obwohl Flexibilität auch beim Problemlösen eine wesentliche Rolle spielt, wurde diesem Forschungsfeld jedoch bisher wenig Beachtung geschenkt.

In diesem Beitrag wollen wir uns dem Konstrukt der Flexibilität beim mathematischen Problemlösen nähern. Im Anschluss an einige theoretische Grundlagen erfolgt die Darstellung unserer ersten Fallstudie zu Flexibilität, in der Bearbeitungen von variierten Problemstellungen zum Rückwärtsarbeiten betrachtet werden.

2 THEORETISCHE RAHMUNG

2.1 Flexibilität als Fähigkeit – eine mathematikdidaktische Perspektive

Ganz allgemein und auch für den mathematikdidaktischen Kontext kann angemerkt werden, dass es sich bei Flexibilität um ein Konstrukt handelt, dem trotz verhältnismäßig umfangreicher Forschungstradition aufgrund unterschiedlicher Forschungsausrichtungen kein einheitliches Begriffsverständnis zugrunde liegt (Gagatsis et al., 2011; Verschaffel et al., 2009; Warner et al., 2002).

Zumeist wird Flexibilität jedoch als Fähigkeit zur Anpassung an bestimmte Situationen verstanden. Dabei wird üblicherweise auf beobachtbare Prozesse fokussiert, in denen diese Fähigkeit deutlich werden kann. In der Forschung wird das jeweils zugrundeliegende Begriffsverständnis auch durch den jeweils untersuchten Inhaltsbereich beeinflusst. So differenzieren beispielsweise Gagatsis et al. (2011, S. 37) unter anderem zwischen Definitionen, in denen Flexibilität als Fähigkeit auf den Umgang mit Repräsentationen bezogen wird und solchen, in denen diese Fähigkeit hinsichtlich der Nutzung von Strategien betrachtet wird.

¹ Insbesondere in internationalen Veröffentlichungen wird die Bezeichnung „Strategie“ verwendet. Da dies auf eine planvolle und bewusste Nutzung hindeutet, verwenden wir in diesem Beitrag für den Kontext des Problemlösens die Bezeichnung „Vorgehensweise“, die sowohl planvolle als auch eher spontane Bearbeitungen mit oder ohne heuristische Elemente umfasst.

Da für den Umgang mit strukturell variierten Problemstellungen vor allem Letztere bedeutsam sind, fokussieren wir diese.

Während Einigkeit darüber besteht, dass die konsistente Verwendung einer einzigen Strategie für verschiedene Anforderungen mit einem Mangel an Flexibilität assoziiert werden kann,² gibt es jedoch unterschiedliche Ansichten dazu, wie die Fähigkeit zur flexiblen Nutzung von Strategien konkret in Erscheinung treten kann. Beispielsweise setzen Heirdsfield und Cooper (2002, S. 59) in ihrer Studie zum Kopfrechnen Strategievelfalt mit Flexibilität gleich. Ähnlich konzeptualisieren auch Star und Kollegen Flexibilität im Hinblick auf die Bearbeitung von algebraischen Gleichungen, wobei für sie nicht nur die auf einem großen Strategierepertoire basierende Fähigkeit, Aufgaben auf verschiedenen Wegen lösen zu können, sondern auch das Wissen zur Effizienz der Strategien von Bedeutung ist (Star & Rittle-Johnson, 2008 S. 566; Star et al., 2009, S. 570; Star & Seifert, 2006, S. 282).

Andere Autoren betonen als Kennzeichen von Flexibilität im Zusammenhang mit der Nutzung von Strategien insbesondere das Wechseln zwischen diesen (Arslan & Yazgan, 2015; Elia et al., 2009; Selter, 2009). Nach Verschaffel et al. (2009) schließt dies sowohl Wechsel zwischen dem Individuum bereits bekannten Strategien als auch Wechsel hin zu modifizierten oder neu entwickelten Strategien ein. Für Selter (2009, S. 620) stellt die Fähigkeit, bekannte Strategien zu modifizieren oder neue Strategien zu entwickeln, jedoch kein Merkmal von Flexibilität dar. In seiner Konzeption werden diese Varianten durch den Aspekt der Kreativität trotzdem berücksichtigt.

Darüber hinaus wird in der gängigen Literatur für die Nutzung von Strategien auch mit Blick auf das Kriterium der Angemessenheit zwischen *Flexibilität* und *Adaptivität* differenziert. Ausgehend von einer umfangreichen von Verschaffel et al. (2009, S. 337) durchgeführten Literaturrecherche lassen sich diese beiden Konstrukte wie folgt unterscheiden:

„[...] the term ‘flexibility’ is primarily used to refer to *switching (smoothly) between different strategies*, whereas the term ‘adaptivity’ puts more emphasis on *selecting the most appropriate strategy*.”³

Diese Angemessenheit wird unterschiedlich interpretiert. Sie kann nicht nur in Hinblick auf die Aufgabenmerkmale betrachtet, sondern auch in Verbindung zu den persönlichen Vorlieben des Individuums oder dem sozialen Kontext

² Davon ausgenommen sind probierend angelegte Vorgehensweisen, die sich durch universelle Anwendbarkeit auszeichnen.

³ Trotz dieser recht etablierten Bedeutungsunterscheidung verwenden einige Autoren *Flexibilität* zur Beschreibung angemessener Strategienutzung. Im Gegensatz dazu wird *Adaptivität* jedoch nie nur als Verwendung mehrerer Strategien ausgelegt (Verschaffel et al., 2009, S. 337f.).

gesetzt werden (Verschaffel et al. 2009, S. 342).⁴ Eine für das Individuum angemessene Strategie muss somit nicht zwangsläufig die aus mathematischer Sicht optimale Strategie darstellen. Es kann sich dabei beispielsweise auch um eine Strategie handeln, deren Ausführung mit besonders hoher Sicherheit oder geringer geistiger Anstrengung für das Individuum verbunden ist.

Überlegungen zu Flexibilität beim mathematischen Problemlösen

Von Flexibilität in der Strategienutzung für arithmetische und algebraische Anforderungen ausgehend kann für das mathematische Problemlösen der Umgang mit heuristischen Elementen in den Blick genommen werden. Für diese erscheinen uns insbesondere Wechsel und Modifikationen von Vorgehensweisen als geeignete Charakteristika. Dem gegenüber sehen wir, anders als beispielsweise Star und Rittle-Johnson (2008), ein breites Strategierepertoire und auch Wissen über die Effizienz von Strategien nicht als Kennzeichen für Flexibilität, sondern eher als deren Voraussetzungen an, sodass wir diese hier nicht näher betrachten werden. Zudem ist es unseres Erachtens nach für den Kontext des mathematischen Problemlösens fraglich, inwieweit sich für Vorgehensweisen im Rahmen von Problembearbeitungen Aussagen zum Kriterium der individuellen Angemessenheit treffen lassen. Daher soll die Angemessenheit nicht als Beurteilungskriterium herangezogen werden.

Mit Blick auf den idealtypischen Problemlöseprozess nach Pólya (1949) kann Flexibilität vor allem für die Phasen des Aufstellens und Ausführens des Lösungsplans relevant werden. Dabei können Wechsel und Modifikationen von Vorgehensweisen nicht nur innerhalb einer einzelnen Problembearbeitung, sondern auch zwischen Bearbeitungen mehrerer Probleme erfolgen. Davon ausgehend lassen sich mit Blick auf die Nutzung von heuristischen Elementen die *intra-task*- und *inter-task*-Flexibilität voneinander unterscheiden. Letztere wird insbesondere dann erforderlich, wenn es aufgrund variierteter Problemstellungen einer Anpassung an veränderte Bedingungen bedarf.

2.2 Flexibilität als Handlungsmerkmal – eine psychologische Perspektive

Das Verständnis von Flexibilität als Fähigkeit kritisiert Brandes (1980) aufgrund seiner Annahme, dass Flexibilität in Abhängigkeit von konkreten Anforderungssituationen und dem verwendeten Kontext in unterschiedlichen Formen in Erscheinung treten kann. Daher konzeptualisiert er Flexibilität für seine

⁴ Für Untersuchungen zu Adaptivität hat sich der Einsatz der choice/no-choice Methode (Siegler & Lemaire, 1997) etabliert. Dabei können Bearbeitungen, die in der Auswahlbedingung (choice condition) ohne Vorgaben erfolgen, mit denen verglichen werden, die vorgegebenen Lösungsbeispielen folgend in den weiteren Testbedingungen (no choice conditions) entstehen.

empirische Untersuchung individueller Qualifizierungsprozesse als Handlungsmerkmal. Dieser Ansatz fand in der mathematikdidaktischen Forschung bisher keine Berücksichtigung, liefert aber neue interessante Aspekte für die Analyse von Flexibilität in Problembearbeitungsprozessen. Ausgehend von der von Brandes (1980) vertretenen Sichtweise auf Flexibilität eröffnet sich ein analytischer Zugang für empirische Forschung, bei dem der Fokus auf den beobachtbaren Vorgehensweisen liegen kann, ohne eine Bewertung der individuellen Fähigkeiten der Personen vorzunehmen.

Flexibles Handeln wird ausgehend von Veränderungen handlungsrelevanter Bedingungen notwendig, da diese dazu führen, dass die ursprünglich angedachten und vorab entwickelten Handlungspläne nicht mehr zur Ausführung kommen können. Aus diesen Bedingungsveränderungen können dann flexibilitätsfordernde Situationen mit absoluter subjektiver Neuheit resultieren, die das Individuum mit unbekanntem Anforderungen konfrontieren. Ebenso kann ein Flexibilitätserfordernis aber auch aus Situationen mit relativer subjektive Neuheit erwachsen, wenn sich das Individuum in einer Situation befindet, deren vorherrschende Bedingungen ihm zwar grundlegend bekannt sind, mit denen es jedoch ausgehend von seiner Handlungsplanung für die entsprechende Situation nicht gerechnet hat.

Im Modell zum Ablauf einer flexiblen Handlung (vgl. Abbildung 1) werden mögliche Reaktionen auf flexibilitätsfordernde Situationen durch Brandes (1980) beschrieben. Wird für eine Situation eine Bedingungsveränderung erkannt, schließt sich daran der Abbruch des ursprünglichen und vorab entwickelten Handlungsplans mit anschließender Beurteilung der Bedingungsveränderungen an. Ausgehend von einer flexibilitätsfordernden Situation muss dann beurteilt werden, ob die vorliegende Situation für das Individuum einen absoluten oder relativen subjektiven Neuheitswert aufweist. Anschließend können sogenannte „Aktionsprogramme“⁵ umstrukturiert bzw. ausgewechselt oder neue Handlungspläne durch einen Transfer oder den Neuerwerb von Kenntnissen entwickelt werden. Abschließend wird dann die modifizierte Handlung zur Ausführung gebracht.

⁵ Brandes (1980, S. 38f.) definiert Aktionsprogramme in Anlehnung an Hacker (1973, S. 115) als „hierarchische Prozesse des Organismus, welche die Ordnung regulieren, in der eine Folge von Operationen ablaufen soll“. Diese wirken somit auf die Handlungsausführung und können für diese generiert oder abgerufen sowie nach Bewertung aktualisiert oder eliminiert werden.

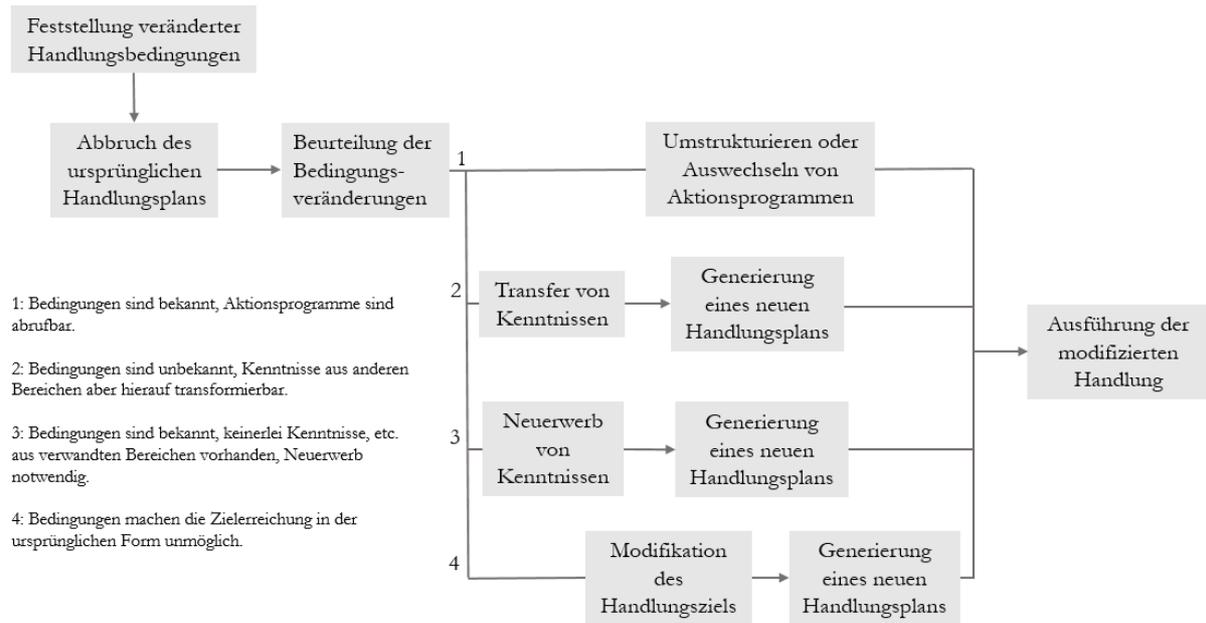


Abbildung 1: eigene Darstellung des Modells zum Ablauf einer flexiblen Handlung (in Anlehnung an Brandes, 1980, S. 75)

2.2.1 Überlegungen zu Flexibilität als Handlungsmerkmal für das mathematische Problemlösen

Auch wenn das Modell des flexiblen Handelns nach Brandes (1980) nicht direkt auf den Umgang mit mathematischen Problemstellungen angewendet werden kann, lassen sich einzelne Aspekte dieses Ansatzes auf Flexibilität im Kontext des mathematischen Problemlösens übertragen. Vom aktuellen Forschungsstand ausgehend wurde Flexibilität beim mathematischen Problemlösen nicht nur innerhalb von einzelnen Problemen, sondern auch zwischen oberflächlich und tiefenstrukturell verschiedenen mathematischen Problemstellungen untersucht (vgl. Arslan & Yazgan, 2015; Elia et al., 2009). Durch die leicht erkennbare Verschiedenheit der jeweils eingesetzten Problemstellungen scheinen unterschiedliche Vorgehensweisen und damit auch Wechsel zwischen diesen allerdings in besonderem Maße intendiert oder sogar provoziert zu werden, sodass zuverlässige Aussagen zu Flexibilität beim mathematischen Problemlösen von Schülerinnen und Schülern unseres Erachtens kaum möglich sind. Darüber hinaus zeigt das von Elia et al. (2009, S. 610) für ihre Studie angefertigte Kodierschema, dass für alle eingesetzten Problemstellungen die gleichen Strategien genutzt werden konnten. Somit wird deutlich, dass Flexibilität im Sinne von Wechseln für diese mathematischen Problembearbeitungen nicht zwangsläufig erforderlich ist.

Interessant für eine eigene empirische Erhebung erscheint uns daher, Flexibilität anhand von Problemstellungen zu untersuchen, die nicht von vornherein

die Notwendigkeit zu Veränderungen nicht probierend angelegter Vorgehensweisen nahelegen. In Anlehnung an Brandes (1980) können flexibilitätsfordernde mathematische Problemsituationen aus tiefenstrukturellen Variationen zwischen oberflächlich ähnlichen Problemstellungen resultieren. Aufgrund der so erzeugten handlungsrelevanten Bedingungsveränderungen müssen veränderte Vorgehensweisen zur Ausführung gebracht werden.

Ob der Einsatz variierten Problemstellungen dabei Situationen mit absoluter oder relativer subjektiver Neuheit hervorruft, lässt sich weder genau vorhersagen noch aus Bearbeitungen rekonstruieren, sodass unseres Erachtens nach statt der Beurteilung des Neuheitswertes auf das Ausmaß der Veränderungen von Vorgehensweisen fokussiert werden sollte.

Ausgehend von der theoretischen Rahmung aus mathematikdidaktischer Perspektive und den aus diesem psychologischen Zugang resultierenden Überlegungen wird Flexibilität für unsere empirische Studie als Handlungsmerkmal verstanden, das sich als Reaktion auf das Erkennen handlungsrelevanter Bedingungsveränderungen in Wechseln oder Modifikationen von Vorgehensweisen in Bearbeitungen äußern kann.

3 EMPIRIE

3.1 Forschungsvorhaben und Studiendesign

Das Anliegen unserer empirischen Untersuchung bezieht sich darauf, wie Schülerinnen und Schüler variierte Problemstellungen bearbeiten und inwiefern sich dabei Flexibilität in den jeweiligen Bearbeitungsprozessen äußert. Dafür haben wir eine aus drei Problemen bestehende Problemserie zu Anforderungen zum Rückwärtsarbeiten als Prozessumkehr⁶ entwickelt (vgl. Abbildung 2). Problemstellungen zum Rückwärtsarbeiten scheinen uns für gezielte Variationen geeignet zu sein. Tiefenstrukturelle Veränderungen der beschriebenen Transformationen in den Problemstellungen können Auswirkungen auf deren unmittelbare Umkehrbarkeit haben und somit mathematikbezogene Umkehrhürden erzeugen, aufgrund derer analoge Bearbeitungen, abseits probierender Vorgehensweisen, nicht möglich sind. Trotz dieser Variationen kann eine weiterhin nahezu identische Oberflächenstruktur der Problemstellungen gewährleistet werden.⁷

⁶ Die Prozessumkehr als Facette der heuristischen Vorgehensweise des Rückwärtsarbeitens wird aus mathematikdidaktischer Sicht auf Grundlage einer Systematisierung von Aßmus und Fritzlar (2020) vom klassischen Rückwärtsarbeiten unterschieden.

⁷ Eine ähnliche Oberflächenstruktur ist unserer Ansicht nach wichtig, da oberflächlich unterschiedliche geartete Probleme, wie sie beispielsweise bei Elia et al. (2009) oder auch Arslan et al.