

Spektrum  
der Wissenschaft

KOMPAKT

# PRIMZAHLEN

Die Stars der Mathematik

**The Big Bang Theory**

Die Sheldon-Vermutung

**Primpolynome**

Mehr statt weniger

**Juristisches**

Verbotene Zahlen



Manon Bischoff  
E-Mail: [m.bischoff@spektrum.de](mailto:m.bischoff@spektrum.de)

## Liebe Leserin, lieber Leser,

wenn ich erzähle, was ich beruflich mache, ernte ich manchmal verwunderte Blicke. »Was gibt es denn über Mathematik zu berichten? Weiß man nicht schon längst alles?« Solche Aussagen überraschen mich immer wieder, schließlich gibt es in diesem Fach etliche offene Fragen.

Bei einigen dieser Rätsel muss man nicht einmal Experte sein, um sie zu verstehen. Tatsächlich fiel mir letztes Jahr ein Kinderbuch in die Hände, in dem es um so genannte Primzahlzwillinge geht. Das sind Primzahlpaare, die eine Differenz von zwei haben, wie 11 und 13, 17 und 19 und so weiter. Dass es ein solches Thema in ein Kinderbuch schafft, hat mich sehr amüsiert, denn es hängt mit einer der bekanntesten Vermutungen der Zahlentheorie zusammen: dass es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt. Und das ist nur eins der Rätsel rund um die Stars der Mathematik, das wir Ihnen in dieser Ausgabe vorstellen.

Eine spannende Lektüre wünscht Ihnen

Erscheinungsdatum dieser Ausgabe: 29.07.2019

Folgen Sie uns:



**CHEFREDAKTEURE:** Prof. Dr. Carsten Könneker (v.i.S.d.P.)  
**REDAKTIONSLEITER:** Dr. Daniel Lingenhöhl  
**ART DIRECTOR DIGITAL:** Marc Grove  
**LAYOUT:** Oliver Gabriel, Marina Männle  
**SCHLUSSREDAKTION:** Christina Meyberg (Ltg.), Sigrid Spies, Katharina Werle  
**BILDREDAKTION:** Alice Krüßmann (Ltg.), Anke Lingg, Gabriela Rabe  
**PRODUKTMANAGEMENT DIGITAL:** Antje Findeklee, Dr. Michaela Maya-Mrschtik  
**VERLAG:** Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft mbH, Tiergartenstr. 15–17, 69121 Heidelberg, Tel. 06221 9126-600, Fax 06221 9126-751; Amtsgericht Mannheim, HRB 338114, UStd-Id-Nr. DE229038528  
**GESCHÄFTSLEITUNG:** Markus Bossle  
**MARKETING UND VERTRIEB:** Annette Baumbusch (Ltg.), Michaela Knappe (Digital)  
**LESER- UND BESTELLSERVICE:** Helga Emmerich, Sabine Häusser, Ilona Keith, Tel. 06221 9126-743, E-Mail: [service@spektrum.de](mailto:service@spektrum.de)

**BEZUGSPREIS:** Einzelausgabe € 4,99 inkl. Umsatzsteuer  
**ANZEIGEN:** Wenn Sie an Anzeigen in unseren Digitalpublikationen interessiert sind, schreiben Sie bitte eine E-Mail an [service@spektrum.de](mailto:service@spektrum.de).

Sämtliche Nutzungsrechte an dem vorliegenden Werk liegen bei der Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft mbH. Jegliche Nutzung des Werks, insbesondere die Vervielfältigung, Verbreitung, öffentliche Wiedergabe oder öffentliche Zugänglichmachung, ist ohne die vorherige schriftliche Einwilligung des Verlags unzulässig. Jegliche unautorisierte Nutzung des Werks berechtigt den Verlag zum Schadensersatz gegen den oder die jeweiligen Nutzer. Bei jeder autorisierten (oder gesetzlich gestatteten) Nutzung des Werks ist die folgende Quellenangabe an branchenüblicher Stelle vorzunehmen: © 2019 (Autor), Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft mbH, Heidelberg. Jegliche Nutzung ohne die Quellenangabe in der vorstehenden Form berechtigt die Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft mbH zum Schadensersatz gegen den oder die jeweiligen Nutzer. Bildnachweise: Wir haben uns bemüht, sämtliche Rechteinhaber von Abbildungen zu ermitteln. Sollte dem Verlag gegenüber der Nachweis der Rechtsinhaberschaft geführt werden, wird das branchenübliche Honorar nachträglich gezahlt. Für unaufgefordert eingesandte Manuskripte und Bücher übernimmt die Redaktion keine Haftung; sie behält sich vor, Leserbriefe zu kürzen.





SHELDON-VERMUTUNG

# Mathematische Entdeckung dank »Big Bang Theory«

von Manon Bischoff

Eine Aussage von Sheldon Cooper in der beliebten Fernsehserie bringt Zahlentheoretiker ins Grübeln – und führt dazu, dass sie eine neue Eigenschaft von Primzahlen entdecken.

Die 73. Folge der US-Sitcom »The Big Bang Theory« ist für Mathematiker schon länger eine besondere: »Welches ist die beste Zahl, die bekannt ist?«, fragt Sheldon Cooper darin an einer Stelle. »Es ist die 73«, sagt der geniale, aber wenig lebensstaugliche Physiker letztlich selbst.

Sheldons Begründung ist ein Fest für Zahlenfans: »73 ist die 21. Primzahl, ihre Spiegelzahl – die 37 – die 12., und deren Spiegelzahl (die 21) ist das Produkt der Multiplikation von – haltet euch fest: 7 und 3.« Was bei den anderen Seriencharakteren und vielen Zuschauern für Lacher sorgte, brachte professionelle Mathematiker ins Grübeln: Gibt es noch mehr so genannte Sheldon-Primzahlen, die genau solche Eigenschaften teilen?

Der Zahlentheoretiker Carl Pomerance vom Dartmouth College in New Hampshire hat nun zusammen mit seinem Kollegen Christopher Spicer vom Morningside College in Iowa eine Antwort gefunden:

Die 73 sei tatsächlich die einzige Primzahl, welche die von Sheldon genannten Kriterien erfüllt, schreiben die Forscher in einer im »American Mathematical Monthly« erscheinenden Veröffentlichung.

Schon kurz nach der Ausstrahlung der »The Big Bang Theory«-Folge im Jahr 2015 definierte Spicer, zusammen mit zwei Kollegen, eine Sheldon-Primzahl als die  $n$ . Primzahl  $p_n$ , für die das Produkt ihrer Ziffern  $n$  ist und deren Spiegelzahl  $\text{rev}(p_n)$  die  $\text{rev}(n)$ . Primzahl  $p_{\text{rev}(n)}$  ergibt. Etwas verständlicher ausgedrückt, bedeutet das für die  $xyz$ . Primzahl  $abcd$ : Einerseits ergibt  $a \cdot b \cdot c \cdot d = xyz$ , und außerdem ist  $dcba$  die  $zyx$ . Primzahl. Als die drei Forscher die ersten zehn Millionen Primzahlen auf diese Eigenschaften hin prüften, stellten sie fest, dass nur die 73 beide gleichzeitig erfüllt. Daraufhin äußerten sie die Vermutung, dass es bloß diese eine Sheldon-Primzahl gibt.

Der endgültige Beweis von Pomerance und Spicer ließ dann aber noch Jahre auf sich warten. In einem ersten Schritt zeigten

die beiden Mathematiker, dass es keine Sheldon-Primzahl geben kann, die größer als  $10^{45}$  ist. Zu diesem Schluss kommen sie dank dem berühmten Primzahlsatz aus dem Jahr 1896, der die Mindestanzahl aller Primzahlen in einem bestimmten Zahlenintervall angibt. Tatsächlich kann die Bedingung, dass das Produkt aller Ziffern einer Sheldon-Primzahl  $p_n$  die Zahl  $n$  ergibt, für Zahlen größer als  $10^{45}$  nicht mehr erfüllt werden. Denn in einem solchen Fall ist die Anzahl  $n$  der Primzahlen in dem Intervall  $[2, p_n]$  gemäß dem Primzahlsatz immer größer als das Produkt der Ziffern von  $p_n$ .

Diese Abschätzung ist der zentrale Punkt der Arbeit. Denn auch wenn  $10^{45}$  eine unvorstellbar große Zahl ist, so ist sie dennoch endlich. Das heißt, man kann systematisch alle Primzahlen zwischen 2 und  $10^{45}$  mit einem Computer abklappern, um nach weiteren Sheldon-Primzahlen zu suchen. Doch ganz ohne Tricks geht das natürlich nicht. Einen Algorithmus Zahlen mit 45 Ziffern untersuchen zu lassen, stellt

selbst für die beste Hardware eine Herausforderung dar. Daher schränkten Pomerance und Spicer die möglichen Sheldon-Kandidaten mit Hilfe der geforderten Eigenschaften immer weiter ein, nutzten zudem Näherungsformeln, um extrem große Primzahlen durch Integrale anzunähern, und sortierten so nach und nach alle Sheldon-Anwärter aus – bis irgendwann nur noch die 73 übrig blieb.

Als der wissenschaftliche Berater von »The Big Bang Theory«, David Saltzberg, von dem Beweis der beiden Mathematiker erfuhr, entschied er, ihnen in einer erstmals im April 2019 ausgestrahlten Folge Tribut zu zollen: In einer Szene steht im Hintergrund ein Whiteboard, das Ausschnitte einzelner Berechnungen von Pomerances und Spicers Arbeit enthält. »Es ist wie eine Show innerhalb der Show«, sagte Pomerance laut einer Mitteilung des Dartmouth College dazu. »Es hat nichts mit dem Plot der Folge zu tun, und es lässt sich auch nur schwer im Hintergrund erkennen. Wenn man aber weiß, wonach man sucht, entdeckt man unsere Veröffentlichung!« ↩

(Spektrum – Die Woche, 21/2019)

Spektrum  
der Wissenschaft  
**KOMPAKT**

# DES RÄTSELS LÖSUNG

Mathematische Beweise  
und ihre Entdecker

Gruppentheorie | Rettung des Riesentheorems  
Polygone | Das Ende der Fünfecksaga  
Zahlentheorie | Von Unendlichkeit zu Unendlichkeit

HIER DOWNLOADEN

FÜR NUR  
€ 4,99

TEPUNQT / GETTY IMAGES / ISTOCK

ENDZIFFERZWILLINGE

# Mysteriöses Primzahlen-Muster fasziniert Mathematiker

von Lars Fischer

Aufeinander folgende Primzahlen haben seltener gleiche Endziffern als erwartet – und das ist erst der Anfang der Merkwürdigkeiten.

**P**rimzahlen, jene natürlichen Zahlen, die nur durch eins und sich selbst teilbar sind, gehören zu den rätselhaftesten Phänomenen der Mathematik. Sie wirken wie zufällig unter die Zahlen gestreut. Aber das stimmt nicht ganz. Immer wieder finden Enthusiasten und Fachleute seltsame Auffälligkeiten ihrer Verteilung, die auf unbekannte, verborgene Gesetzmäßigkeiten hinzudeuten scheinen.

Ein weiteres solches Muster entdeckten zwei Mathematiker von der Stanford University in Kalifornien in der ersten Milliarde Primzahlen. Wie Kannan Soundararajan und Robert Lemke Oliver berichten, haben aufeinander folgende Primzahlen deutlich seltener die gleiche letzte Ziffer, als man es nach dem Zufall erwarten könnte. Demnach sollte statistisch betrachtet jede mögliche Kombination von Endziffern in den ersten hundert Millionen Primzahlen etwa 6,25 Millionen Mal auftreten. Die »Endzifferzwillinge« tauchen jedoch nur jeweils etwa 4,5 Millionen Mal auf.

Bemerkenswert ist nach Ansicht der beiden Wissenschaftler außerdem, dass Primzahlen bekanntermaßen zwar etwas häufiger auf 3 oder 7 enden als auf 1 oder 9. Be-

trachtet man die Endzifferzwillinge, ist das Verhältnis jedoch umgekehrt – die selteneren Endziffern folgen etwa 5 Prozent öfter aufeinander. Insgesamt schwanken die Häufigkeiten der Endzifferkombinationen drastisch: Auf eine 1 folgt lediglich 5,4 Millionen Mal eine 9, während nahezu 8 Millionen Mal auf eine 9 eine 1 folgt.

Erstaunlicherweise gilt das Muster mit den selteneren Endzifferzwillingen nicht nur für das gewohnte Zehnersystem, sondern auch, wenn man andere Zahlen zur Basis nimmt. Mathematisch gesprochen sind also sowohl Primzahlpaare, die kongruent Modulo 10 sind, als auch solche, für die das modulo 7 oder bezüglich einer beliebigen anderen Basis gilt, seltener, als die Zufallsannahme erwarten lässt. Warum das so ist, darüber können die Autoren derzeit nur spekulieren. ↩

(Spektrum – Die Woche, 11/2016)

Spektrum  
der Wissenschaft

KOMPAKT

AUCH ALS  
GEDRUCKTE  
AUSGABE  
ERHÄLTlich!

# SCHMERZ

Neue Wege **aus der Pein**

Migräne | Behandlung mit Antikörpern

Psychotrauma | Schäden der

Vergangenheit

Virtual Reality | Hilfe bei

chronischen Beschwerden

HIER DOWNLOADEN

Print: 5,90 Euro • Download: 4,99 Euro