

Vom Wolfgang Tschirk Spiegel des Universums

Eine Geistesgeschichte
der Mathematik

SACHBUCH



Springer

Vom Spiegel des Universums

Wolfgang Tschirk

Vom Spiegel des Universums

Eine Geistesgeschichte der
Mathematik

2. Auflage

 Springer

Wolfgang Tschirk
Wien, Österreich

ISBN 978-3-662-62065-6 ISBN 978-3-662-62066-3 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-62066-3>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Ursprünglich erschienen bei Edition Va Bene, Wien, Klosterneuburg, 2007
© Der/die Herausgeber bzw. der/die Autor(en), exklusiv lizenziert durch
Springer-Verlag GmbH, DE, ein Teil von Springer Nature 2021

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Einbandabbildung: © Vitaly/stock.adobe.com

Planung/Lektorat: Iris Ruhmann
Springer ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Inhaltsverzeichnis

1	Von den Zahlen	1
2	Von den Figuren	15
3	Von den Gleichungen	33
4	Von Differential und Integral	49
5	Von den Räumen	65
6	Vom Zufall	79
7	Von den Mengen	91
8	Von der Logik	103
	Namenregister	115



1

Von den Zahlen

Vor zweitausend Jahren stand die Erde im Mittelpunkt der Welt; um sie drehten sich die Sterne, gebettet in Kugelschalen aus Äther. Was Licht war, wusste niemand so recht. Heron von Alexandria hatte aber herausgefunden, dass die Augen Sehstrahlen entsenden und sie, reflektiert von den Gegenständen, wieder auffangen. Krankheiten waren Störungen im Gleichgewicht der Körpersäfte. Die Götter wohnten im Olymp; sie aßen und tranken, lachten, stritten und benahmen sich auch sonst recht gewöhnlich. Es gab keine größte Primzahl – zu jeder noch so großen musste es eine geben, die sie übertraf, das hatte Euklid gezeigt.

Tausend Jahre später sah der Kosmos im Großen nicht viel anders aus, im Kleinen schon: Die Sehstrahlen waren verschwunden, Licht sandte Gott den Menschen als Gnade, Krankheiten als Strafe. Er selber war allmächtig und gütig geworden und in den Himmel umgezogen. Aber noch immer gab es keine größte Primzahl, noch immer konnte man durch zwei Punkte eine Gerade ziehen und einen Winkel mit Zirkel und Lineal halbieren, und noch immer aus

denselben Gründen: jenen, die Euklid um 300 vor Christus in seinen *Elementen* festgehalten hatte.

Heute hat das Universum gar kein Zentrum, und sein Medium ist nicht der Äther, sondern das Licht: ein rätselhaftes Etwas, das sich einmal als Teilchen, ein andermal als Welle zeigt. Krank machen Viren, Stress und fettes Essen. Den Göttern reicht es: Sie packen, und es könnte durchaus sein, dass sie diesmal keine Anschrift hinterlassen. Wo man hinsieht, glauben wir heute etwas anderes als früher und haben dafür andere Gründe. Aber in Stein gemeißelt stehen Euklids Primzahlsatz und seine Geometrie, geschaffen in einer fernen Epoche, die uns eher als Traumbild erscheint denn als historisches Faktum. Die *Elemente* umfassen dreizehn Bücher, zusammen ein Kleinformat mittlerer Dicke in heutigem Druck. Sie enthalten fast fünfhundert Behauptungen und ebenso viele Beweise über Zahlen, Verhältnisse, Figuren und Körper – und *alle* stimmen noch heute!

Naturwissenschaftliche Theorien kommen und gehen. Nur wenigen war das Glück beschieden, in einer umfassenderen als Sonderfall weiterzuleben, wie Newtons Mechanik in den Relativitätstheorien; die meisten sind sang- und klanglos dahin: Sterne werden nicht mehr vom Äther auf ihre Bahnen gezwungen, wie noch Ptolemäus glaubte, auch nicht von magnetischen Kräften, wie Kepler annahm, oder durch Wirbel eines feinen Stoffes, wovon Descartes überzeugt war. Herons Sehstrahlen stehen nur mehr als Kuriosum in den Büchern, und ob die Seele aus den Feueratomen des Demokrit gemacht ist, sei dahingestellt. Und wenn nicht kürzlich ein Wunder geschehen ist, dann wird man einst von Freuds Traumdeutung und Skinners Behaviorismus ebenso viel halten wie vom Urknall und der Stringtheorie: nämlich gar nichts. Ganz anders ergeht es da der Mathematik: „Ein mathematischer Satz, korrekt bewiesen nach den strengen Regeln der Logik, ist ein Satz für immer“, sagt der Historiker William Dunham, und wir fühlen, dass das im Grunde

stimmt, selbst wenn, wie wir noch sehen werden, auch die Logik ein paar saftige Überraschungen auf Lager hat.

Für uns begann die Mathematik mit den Griechen. Nicht, dass sie das Rechnen erfunden hätten – dieses gab es schon lange vor ihnen in Ägypten und Babylonien, wo praktische Probleme der Landvermessung, des Handels und der Astronomie zur Lösung anstanden. In den Büchern der Ägypter: dem Rhind-Papyrus, dem Moskau-Papyrus und der Lederrolle finden sich Hinweise auf ein Dezimalsystem und die vier Grundrechenarten, auf Bruchrechnungen und die Bestimmung der Flächeninhalte von Dreiecken, Rechtecken und Trapezen. Bezeichnenderweise konnten die Ägypter das Volumen einer Pyramide ermitteln. Sie lösten einfache lineare und quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten, formulierten sie aber in normaler Sprache, weil ihnen die Gleichungsnotation noch fremd war. Als Näherung für π nahmen sie $(16/9)^2$, was nur wenig höher liegt als der richtige Wert, der etwa 3,14 beträgt. Die Basiszahl der Babylonier hingegen war 60; ihr Sexagesimalsystem hat sich zur Unterteilung der Zeit von der Stunde abwärts sowie der Winkel erhalten. Sie fanden ein Verfahren zum Ziehen der Quadratwurzel und verfügten über Tabellen der Quadrate, Kuben, Quadrat- und Kubikwurzeln sowie der Kehrwerte. Die Babylonier lösten quadratische Gleichungen, die komplizierter sein durften als die der Ägypter, und einfache kubische. Ihre geometrischen Berechnungen waren häufig ungenau; meist verwendeten sie einfach 3 anstelle von π , möglicherweise auch $3 + 1/8$, was wiederum beinahe korrekt ist.

Die bekannten ägyptischen und babylonischen Texte beschränken sich auf Aufgaben und deren rezeptartig angeführte Lösungen, lassen keine Theorie erkennen und vor allem nirgends einen Beweis. Diese Elemente haben erst die Griechen, beginnend mit Thales von Milet, eingeführt und damit die Mathematik im heutigen Sinn begründet. Das sture Rechnen übergaben sie den Logistikern: den Rech-

nern, die nicht selten Sklaven waren, und im Übrigen zählte die Logistik gar nicht zur Mathematik; denn in der Mathematik ging es den Griechen nur um die Freude am Wissen und nicht um praktische Vorteile.

In diesem Kapitel sprechen wir von den Zahlen, und damit zuallererst von Pythagoras, der im sechsten Jahrhundert vor Christus lebte. Ihm wird der Satz „Alles ist Zahl“ zugeschrieben; er spiegelt einen geradezu religiösen Glauben an die Macht der Arithmetik wider. Ausschlaggebend dafür soll Pythagoras' Entdeckung gewesen sein, dass die Längenverhältnisse der Saiten, auf denen die Intervalle der Tonleiter entstehen, mittels ganzer Zahlen ausgedrückt werden können: bei der Quarte durch das Verhältnis $4 : 3$, bei der Quinte durch $3 : 2$ und bei der Oktave, die aus einer Quarte und einer Quinte besteht, durch $2 : 1$. Die Zahlen 1, 2, 3 und 4 bildeten die heilige Vierzahl, die Tetraktys. In rechtwinkligen Dreiecken fanden die Pythagoräer das Verhältnis $3 : 4 : 5$ der Seitenlängen, und überhaupt schien ihnen alles in der Natur den Zahlen nachgebildet, auch dort, wo wir heute keine mehr erblicken. Sie stießen auf Zahlen, die nicht weiter teilbar sind: die Primzahlen, und fassten sie als Strecken auf; eine Zahl, die in zwei Faktoren zerfällt, galt als flächig, entsprechend einem Rechteck, dessen Fläche das Produkt zweier Größen ist, und eine Zahl, die drei Faktoren besitzt, demnach als räumlich. Hier grenzt die Mathematik der Pythagoräer schon ans Mystische, und da ihre Lehre auch die Verbote enthielt, Bohnen zu essen, Brot zu brechen oder einen weißen Hahn anzurühren, weiß man heute nicht, ob bei ihnen eher die Vernunft regierte oder der Aberglaube. Auf Pythagoras und seine Schüler geht das Quadrivium zurück, die Einteilung des Studiums in die Gegenstände Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie, die zusammen mit dem Trivium: Grammatik, Rhetorik und Dialektik die sieben freien Künste bildeten, die bis in die Neuzeit den Unterricht bestimmten.

Die Pythagoräer dachten, alle Verhältnisse in der Natur ließen sich durch ganze Zahlen beschreiben. So bestand für sie eine Strecke aus einer bestimmten Anzahl von Punkten, und daher mussten die Längen zweier Strecken im Verhältnis ganzer Zahlen zueinander stehen. Doch eines Tages war es mit diesem Glauben vorbei, und die Schuld daran trug ausgerechnet der berühmte Satz des Pythagoras. Dieser besagt, dass in einem rechtwinkligen Dreieck das Quadrat jener Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, so groß ist wie die Quadrate der beiden anderen Seiten zusammen. Nun bestimmen zwei Seiten eines Quadrates gemeinsam mit einer Diagonalen ein rechtwinkeliges Dreieck. Daher steht nach dem Satz von Pythagoras die Diagonale zur Seite im Verhältnis $\sqrt{2}$, einem Verhältnis von so grundlegender Bedeutung, dass es sich durch ganze Zahlen ausdrücken lassen *musste*, dass es also ganze Zahlen m und n geben musste mit $m : n = \sqrt{2}$. Doch genau diese gibt es nicht, wie der Pythagoräer Hipposos zum Entsetzen seiner Glaubensbrüder – und vermutlich auch zu seinem eigenen – erkannte. Der Sachverhalt lässt sich auch so aussprechen: Seite und Diagonale eines Quadrates haben kein gemeinsames Maß; es gibt keine Länge, von der sowohl Seite als auch Diagonale ein ganzzahliges Vielfaches wären. Nun kannte man aber keine Zahlen außer den natürlichen: 1, 2, 3, ... und den Verhältnissen zwischen ihnen. Deshalb bedeutete Hipposos' Entdeckung nicht weniger, als dass man die Natur überhaupt nicht in Zahlen fassen könne. Als einziger Ausweg blieb ein ganz unpythagoräischer: Konnte man die $\sqrt{2}$ schon nicht in Zahlen schreiben, so konnte man sie immerhin mit Zirkel und Lineal konstruieren, nämlich als Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge 1. Die Geometrie schien also der Arithmetik überlegen, und so wurde sie zur dominierenden Disziplin der Antike. Allerdings galt es aufzuräumen: Nicht wenige Sätze der Geometrie waren bewiesen worden unter

der pythagoräischen Annahme, je zwei beliebige Strecken besäßen ein gemeinsames Maß. Nun hingen diese Beweise in der Luft, und ein Jahrhundert sollte vergehen, ehe Eudoxos die Proportionenlehre auf den Fall von Strecken ohne gemeinsames Maß übertrug und dem „logischen Skandal der griechischen Geometrie“ ein Ende setzte.

In der Folge fand man noch weitere unausdrückbare Größen, denn auch die $\sqrt{3}$ erwies sich als solche und, wie Theaitetos zeigte, ist jede Quadratwurzel unausdrückbar, sofern sie nicht aus einer Quadratzahl gezogen wird, ebenso wie jede Kubikwurzel, die nicht von einer Kubikzahl stammt. Diese Größen interpretierte man ausschließlich geometrisch, denn das Reich der Zahlen beschränkte sich weiterhin auf die natürlichen, also die positiven ganzen. Eine Null gab es nicht, und an negative Zahlen war schon gar nicht zu denken.

* * * * *

Unter den natürlichen Zahlen stachen die Primzahlen hervor: Gleich den Atomen, in denen Demokrit die Grundbausteine alles Seienden erblickte, waren sie die Grundbausteine aller Zahlen. Denn jede Zahl außer der Einheit ist entweder selbst eine Primzahl: 2, 3, 5, ... oder ein Produkt von Primzahlen: $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$ usw., und die Zerlegung ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig. Das bezeichnen wir als Fundamentalsatz der Arithmetik. Von den Atomen gab es vier Sorten: jene des Feuers, des Gesteins, der Luft und des Wassers. Aber wie viele Primzahlen gibt es? Mit der Antwort auf diese Frage tauchte zum ersten Mal der Begriff des Unendlichen anders auf als in der Form radikaler Verneinung. Aristoteles hatte festgestellt, dass es ein Unendliches nicht gibt. Der Kosmos der Griechen war endlich, er reichte bis zur Sphäre der Fixsterne. Die Materie war endlich; sie zerfiel in Atome, und diese konnten nicht weiter unterteilt werden. Schreibt man hingegen die Primzahlen in eine Liste,

kommt man nie zu einem Ende – es gibt also keine letzte und damit keine größte Primzahl. Sehen wir einmal, wie Euklid diesen Satz bewiesen hat, und beachten wir dabei den Rückgriff auf ein in der Mathematik gern verwendetes Prinzip, das der indirekten Beweisführung. Dabei nimmt man an, die Aussage, die man beweisen will, wäre falsch, und zeigt, dass das nicht sein kann. Kann sie aber nicht falsch sein, so muss sie, nach Aristoteles' Satz vom ausgeschlossenen Dritten, richtig sein und ist damit bewiesen.

Euklid nahm also an, es gäbe eine größte Primzahl, und zeigte, dass das nicht sein kann. Gibt es eine größte Primzahl p , so kann man eine Liste *aller* Primzahlen aufstellen: $2, 3, 5, \dots, p$. Nun bildet man eine Zahl q , indem man die Primzahlen miteinander multipliziert und dann 1 addiert: $q = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p + 1$. Da q größer als die größte Primzahl ist, kann es selbst keine sein; man muss es durch mindestens eine Primzahl teilen können. Versucht man aber, q durch 2 zu teilen, bleibt ein Rest von 1. Dasselbe geschieht, wenn man q durch 3 zu teilen versucht, und so geht es immer weiter: Keine einzige Primzahl von 2 bis p ist imstande, q zu teilen. Unter der Annahme, es gäbe eine größte Primzahl, hätte man also mit q eine Zahl gefunden, die weder eine Primzahl ist noch durch eine solche teilbar. Da aber nach dem Fundamentalsatz der Arithmetik jede Zahl entweder selbst prim ist oder in Primfaktoren zerfällt, ist die Annahme ad absurdum geführt und ihr Gegenteil bewiesen: Es gibt *keine* größte Primzahl.

Lassen wir den Beweis Revue passieren, dann stellen wir fest, dass er auf einer Reihe von Annahmen ruht: So hat Euklid vorausgesetzt, Zahlen könnten miteinander multipliziert werden und das Resultat wäre wieder eine Zahl; weiters, man könnte 1 addieren und erhielte wieder eine Zahl; er hat sich auf den Fundamentalsatz der Arithmetik berufen und dadurch, dass er den Beweis indirekt geführt hat, auf den Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Von diesen

Voraussetzungen war nur der Fundamentalsatz zuvor bewiesen worden, die anderen hat Euklid ohne Bestätigung angenommen. Da kein Beweis ohne Bedingungen auskommt und man irgendwo anfangen muss, bleibt stets ein Rest von Unsicherheit über die allerersten Annahmen. Ist auch nur *eine* Prämisse falsch, fällt der gesamte Schluss in sich zusammen. Hinter dieser scheinbaren Fragilität der Mathematik versteckt sich in Wirklichkeit ihre Stärke, denn es gilt umgekehrt: Wenn die Voraussetzungen richtig sind, ist das Bewiesene über jeden Zweifel erhaben. Mathematische Beweise fügen nämlich ihren Voraussetzungen nichts hinzu, sie drücken sie nur anders aus. Sie sind zudem unabhängig von Beobachtung, sinnlicher Wahrnehmung und der Qualität von Messgeräten. Ihre Objekte sind nicht unermesslich fern wie die Sterne oder ausgestorben wie die Dinosaurier, nicht klein und flüchtig wie die Positronen, und sie weigern sich auch nicht partout, zu erscheinen, sobald ein Skeptiker im Raum ist. Der Mathematiker genießt also das Privileg, seinen Gegenstand jederzeit bei sich zu haben – er muss sich nur hinsetzen und nachdenken.

Mit Euklid nähern wir uns der Spätzeit der griechischen Mathematik. Zentrum der Wissenschaften war Alexandria am Nildelta mit seiner Akademie, dem Museion, an dem Euklid lehrte, und der sagenhaften Bibliothek, die in ihrer Blütezeit mehr als eine halbe Million Papyri umfasst haben soll. Einer ihrer Direktoren, Eratosthenes, erfand das nach ihm benannte „Sieb“, eine Methode zum Auffinden von Primzahlen. Seine größte Leistung aber war die bis auf 600 Kilometer genaue Berechnung des Erdumfanges aus dem Einfallswinkel der Sonnenstrahlen. Alexandria versammelte die bedeutendsten Gelehrten der Periode, die nach dem Stadtgründer die alexandrinische heißt, und selbst jene, die wie Archimedes andernorts wirkten, hatten den Großteil ihres Wissens in der ägyptischen Metropole erworben. An Grundlagen entstand nicht mehr allzu viel. Archimedes, der man-