

}essentials{

Thomas Bedürftig · Karl Kuhlemann

Grenzwerte oder infinitesimale Zahlen?

Über Einstiege in die Analysis und
ihren Hintergrund



Springer Spektrum

essentials

essentials liefern aktuelles Wissen in konzentrierter Form. Die Essenz dessen, worauf es als „State-of-the-Art“ in der gegenwärtigen Fachdiskussion oder in der Praxis ankommt. *essentials* informieren schnell, unkompliziert und verständlich

- als Einführung in ein aktuelles Thema aus Ihrem Fachgebiet
- als Einstieg in ein für Sie noch unbekanntes Themenfeld
- als Einblick, um zum Thema mitreden zu können

Die Bücher in elektronischer und gedruckter Form bringen das Expertenwissen von Springer-Fachautoren kompakt zur Darstellung. Sie sind besonders für die Nutzung als eBook auf Tablet-PCs, eBook-Readern und Smartphones geeignet. *essentials*: Wissensbausteine aus den Wirtschafts-, Sozial- und Geisteswissenschaften, aus Technik und Naturwissenschaften sowie aus Medizin, Psychologie und Gesundheitsberufen. Von renommierten Autoren aller Springer-Verlagsmarken.

Weitere Bände in der Reihe <http://www.springer.com/series/13088>

Thomas Bedürftig · Karl Kuhlemann

Grenzwerte oder infinitesimale Zahlen?

Über Einstiege in die Analysis und
ihren Hintergrund

 Springer Spektrum

Thomas Bedürftig
Leibniz Universität Hannover
Hannover, Deutschland

Karl Kuhlemann
Leibniz Universität Hannover
Altenberge, Deutschland

ISSN 2197-6708
essentials

ISSN 2197-6716 (electronic)

ISBN 978-3-658-31907-6

ISBN 978-3-658-31908-3 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-658-31908-3>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Der/die Herausgeber bzw. der/die Autor(en), exklusiv lizenziert durch Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2020

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Andreas Rüdinger

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Was Sie in diesem *Essential* erwartet

- Der Weg von den alten infinitesimalen Größen bei Leibniz über die Grenzwerte bis in die Wende der Mathematik im 19. Jahrhundert.
- Die Darstellung der Problematik des Grenzwertbegriffs und des Hintergrundes der reellen Zahlen.
- Die Wiederkehr der infinitesimalen Größen als infinitesimale Zahlen und ihre Rolle im Einstieg in die Analysis.
- Gegenüberstellung und Vergleich, Beobachtung und Diskussion der Besonderheiten der Einstiege.
- Argumente für die Erweiterung von Standard um Nichtstandard.

Vorwort

Jeder, der den ganzen Verlauf der wissenschaftlichen Entwicklung kennt, wird natürlich viel freier und richtiger über die Bedeutung einer gegenwärtigen wissenschaftlichen Bewegung denken als derjenige, welcher nur die augenblickliche Bewegungsrichtung wahrnimmt.

Ernst Mach

„Grenzwerte oder infinitesimale Zahlen?“ Manch ein Leser wird stutzen, wenn er die Titelfrage liest.

- Frage: Gibt es eine Alternative zu den Grenzwerten?

Die Antwort ist doppelt.

- Ja! Mathematisch.
- Vereinzelt! Methodisch.

Die infinitesimalen Zahlen, unendlich kleine Zahlen, *sind* die Alternative. Es gibt sie seit 60 Jahren. Sie und die hyperreellen Zahlen, die mit ihnen entstehen, gehören zur sogenannten *Nichtstandard-* oder *Nonstandardanalysis*. In der Forschung ist Nichtstandard längst Standard, in der elementaren Lehre aber und im Unterricht wird die Nichtstandardanalysis weitgehend ignoriert. Und sie wird gern abschätzig kommentiert, wie wir gleich lesen werden. Für ihre Anerkennung und gegen Ignoranz zu schreiben und um Klarheit zu schaffen, hierin liegt ein wesentliches Motiv für dieses Essential.