DIE BLAUE STUNDE DER INFORMATIK

Lutz Priese

Aspekte des Unendlichen

Eine kleine Erzählung für Nichtmathematiker

Springer Vieweg

Die blaue Stunde der Informatik

Die blaue Stunde – die Zeit am Morgen zwischen Nacht und Tag, die Zeit am Abend ehe die Nacht anbricht. Wenn alles möglich scheint, die Gedanken schweifen, wenn Zeit für anregende Gespräche ist und Neugier auf Zukünftiges wächst, auf alles, was der nächste Tag bringt.
Genau hier setzt diese Buchreihe rund um Themen der Informatik an: Was war, was ist, was wird sein, was könnte sein?
Von lesenswerten Biographien über historische Betrachtungen bis hin zu aktuellen Themen umfasst diese Buchreihe alle Perspektiven der Informatik – und geht noch darüber hinaus. Mal sachlich, mal nachdenklich und mal mit einem Augenzwinkern lädt die Reihe zum Weiter- und Querdenken ein. Für alle, die die bunte Welt der Technik entdecken möchten.

Weitere Bände in der Reihe http://www.springer.com/series/15985

Lutz Priese

Aspekte des Unendlichen

Eine kleine Erzählung für Nichtmathematiker

Springer Vieweg

Lutz Priese
Koblenz, Deutschland

Die blaue Stunde der Informatik
ISBN 978-3-658-27211-1 ISBN 978-3-658-27212-8 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-27212-8

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Vieweg

Springer Vieweg ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Inhaltsverzeichnis

Das Unendliche

1

1.1 Was man wissen muss: Unendlich viele Primzahlen

Ein gebildeter Kulturmensch umschifft zahlreiche Fauxpas. Er ordnet die Nighthawks nicht Dennis Hopper und die Ausstellung „Double Standard“ nicht Edward Hopper zu. Er hört die Stimmen von Ingeborg Brandenburg oder Annett Louisan im Kopf, wenn man über sie spricht. Er weiß, dass Herbert von Karajan sowohl die Berliner als auch die Wiener Philharmoniker dirigiert hat, und besitzt möglichst Aufnahmen von Caruso. Auch wenn er nie in der Schule Griechisch gelernt hat, weiß er, das penta fünf bedeutet, allein schon wegen des US-Verteidigungsministeriums. In Japan übergibt er seine Visitenkarte mit beiden Händen und weiß, dass ein Spaziergang über den Philosophenweg ein Muss ist, wenn man nach Kyoto kommt.

Nun kennen die meisten mindestens einen gebildeten Menschen mit einer humanistischen Ausbildung mit Grundkenntnissen in Griechisch und Latein, der fast stolz darauf ist, von Mathematik und Naturwissenschaften nichts zu verstehen. Fragen, etwa wie der innerste Planet heißt oder ob die Venus ein innerer oder äußerer Planet ist, kommentiert er mit Schulterzucken. Dass gebildete Humanisten ungestraft Astronomie, Mathematik, Physik etc. mit Desinteresse abtun dürfen, sollte aber nicht akzeptiert werden.

Was weiß denn ein jeder Abiturient über den Merkur? Der Name kommt vom lateinischen Mercurius, der Gott des Handels mit geflügeltem Helm und Flügelschuhen, dem römischen Pendant des griechischen Götterboten Hermes. Händler und ein Götterbote mit Flügelschuhen stehen auch für Schnelligkeit. Quecksilber ist „schnelles Silber“ und heißt im Englichen „mercury“. Ferner sind Planeten und Monde meist nach der römischen Mythologie benannt; der Zusammenhang zwischen dem Planeten Merkur und Schnelligkeit ist offensichtlich. Jetzt muss man nur noch wissen, dass ein Planet sich um so schneller bewegt, je enger seine Umlaufbahn um die Sonne führt. Einfach, um den Absturz in die Sonne zu vermeiden. Das ist hier das einzige naturwissenschaftliche Halbwissen, das man braucht. Merkur ist also der

L. Priese, *Aspekte des Unendlichen,* Die blaue Stunde der Informatik,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-27212-8_1

schnellste Planet, dessen Bahn am engsten um die Sonne führt, also der innerste, der erste. Was ist mit der Venus? Innerer oder äußerer Planet? Nun, innere Planeten sind solche, deren Bahn innerhalb der Erdbahn verläuft, äußere, deren Bahn außerhalb der Erdbahn liegt. Die inneren Planeten sind also näher an der Sonne als die Erde, gehen also mit etwas Vor- oder Nachlauf mit der Sonne unter und sind mitten in der Nacht nicht sichtbar. Die Venus ist nun auch die Göttin der Schönheit, also ein besonders schön leuchtender Stern, und wird auch Abend- oder Morgenstern genannt. Sie geht, je nach ihrer Position auf ihrer Umlaufbahn, kurz vor oder nach der Sonne unter, wenn sie überhaupt sichtbar ist. Sie muss nur auf Grund dieser bildungsbürgerlichen Überlegung ein innerer Planet sein. Das ist doch nicht schwer, und sollte ein Klacks für Absolventen eines Gymnasiums sein.

Von einem gebildeten Bürger darf man einen einigermaßen befriedigenden Umgang mit Mathematik erwarten. Sätze wie: „Ach, von Mathematik verstehe ich gar nichts." sollte man vermeiden können. Natürlich muss man wissen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Aber das reicht nicht! Von einem sehr gebildeten Menschen würde ich sogar erwarten, dass er solch einen einfachen Fakt auch beweisen kann. Zumindest muss man einen Beweis dafür schon im Detail gelesen und zu verstehen versucht haben. Denn es ist ganz leicht!

Was eine Primzahl ist, weiß wohl jeder: eine positive, ganze (also natürliche) Zahl größer als 1, die nur durch 1 und sich selbst teilbar ist. Die ersten Primzahlen sind 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ... Die Primzahlen sind quasi die Atome des Zahlenuniversums und alle Zahlen sind Produkte von Primzahlen. Man überlegt sich nun leicht, dass jede natürliche Zahl größer als 1 durch mindestens eine Primzahl ohne Rest teilbar ist. Das sieht man etwa wie folgt: Die kleinste natürliche Zahl größer als 1 ist 2. 2 ist selbst eine Primzahl und daher durch eine Primzahl (sich selbst) ohne Rest teilbar. Die Aussage gelte bereits für alle Zahlen kleiner als N, dann gilt sie aber auch schon für N, denn: Ist N selbst eine Primzahl, so ist N wieder durch N ohne Rest teilbar. Ist N keine Primzahl, dann ist N ein Produkt $N = a \cdot b$ zweier natürlicher Zahlen a, b, die beide größer als 1 und kleiner als N sind. a und b besitzen damit bereits beide eine Primzahl als Teiler, die dann auch Teiler von $N = a \cdot b$ ist. Als Konsequenz ist jede natürliche Zahl größer als 1 ein Produkt von Primzahlen.

Wir haben hier mittels vollständiger Induktion argumentiert. Nun scheuen viele Nicht-Mathematiker aber vollständige Induktion. Wenn auch Sie Angst vor vollständiger Induktion haben, so vergessen Sie einfach, dass diese gerade benutzt wurde, und argumentieren Sie leicht anders: Falls es eine natürliche Zahl größer als 1 geben sollte, die durch keine Primzahl teilbar ist, so müsste es auch solche kleinste natürliche Zahl $N_{min} > 1$ geben. N_{min} kann selbst keine Primzahl sein, also $N_{min} = a \cdot b$ mit zwei natürlichen Zahlen a, b mit $1 < a, b < N_{min}$. Und da N_{min} die kleinste natürliche Zahl größer 1 sein soll, die sich durch keine Primzahl ohne Rest teilen lässt, lassen sich die kleineren Zahlen a, b jeweils durch mindestens eine Primzahl ohne Rest teilen. Dann lässt sich entgegen unserer Annahme aber auch deren Produkt N_{min} ohne Rest durch mindestens eine Primzahl teilen.

Schon von Euklid (wahrscheinlich um 300 v.Chr.) wurde ein uralter, aber wunderschöner und sehr einfacher Beweis, dass unendlich viele Primzahlen existieren, publiziert. Nehmen wir an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen. Dann muss es auch eine größte Primzahl geben. Diese nennen wir p_{max}. Für alle Primzahlen p muss also $p \leq p_{max}$ gelten. Wir bilden nun einfach das Produkt aller Primzahlen. Dieses sei P, eine endliche Zahl, da es per Annahme nur endlich viele Primzahlen geben soll. Damit sind alle Primzahlen ein Teiler von P. Zu P addieren wir noch die Zahl 1 und erhalten $N = P + 1$. Damit ist N größer als 1 und durch keine Primzahl teilbar, da bei diesen Divisionen stets der Rest 1 bleibt. Ein Widerspruch zu unserem bereits bekannten Fakt, dass alle Zahlen größer als 1 durch (mindestens) eine Primzahl teilbar sind. Also ist die Annahme, dass eine größte Primzahl existiere, falsch und es muss unendlich viele Primzahlen geben. **qed**

Ich möchte Ihnen ab und zu ein paar Fragen stellen. Diese Aufgaben sind für das Verständnis des Buches hilfreich. Bitte versuchen Sie sich an den Fragen nur, falls Ihnen das auch Spaß macht. Falls Sie keine Freude an Aufgaben haben, dann lassen Sie es einfach.

Frage 1 *Können Sie etwa 10 Varianten von Edward Hoppers Gemälde „Nighthawks“ finden?*

Frage 2 *Welches Objekt von Dennis Hopper hat zu dem Namen „Double Standard“ seiner Ausstellung geführt?*

Frage 3 *Ist Ihrer Meinung nach das Werk von Dennis Hopper von den Nighthawks beeinflusst?*

1.2 Was man wissen darf: Irrationale Zahlen und der Satz des Pythagoras

In dem letzten kurzen Abschnitt haben wir uns einen wunderschönen und äußerst einfachen Beweis, dass es unendlich viele Primzahlen geben muss, angeschaut, und ich habe argumentiert, dass man diesen Beweis kennen soll. Ich möchte noch zwei weitere uralte und wichtige Beweise vorstellen, die in ihrer verblüffenden Einfachheit überraschen. Von denen würde ich aber nicht mehr behaupten, dass sie jeder kennen sollte. Verstehen ja, aber kennen im Sinn von parat haben, wäre hier zu viel verlangt.

Zum Einstieg: Primzahlen sind quasi atomare natürliche Zahlen und die natürlichen Zahlen sind die positiven ganzen Zahlen, die man auch mit $\mathbb{N}$ abkürzt. Also $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Eine viel elegantere Beschreibung von $\mathbb{N}$, ohne Pünktchen, erhalten wir, indem wir $\mathbb{N}$ als die kleinste Menge erklären, die die Zahl 1 enthält und mit jeder Zahl i auch die Zahl $i + 1$. Addieren wir Zahlen aus $\mathbb{N}$, so erhalten wir wieder eine Zahl aus $\mathbb{N}$. Leider gilt das für die Subtraktion nicht, denn $3-3$ ist 0, $4-7$ ist -3, beides sind keine natürlichen Zahlen. Um dieses Manko zu beheben wurden die ganzen Zahlen eingeführt. Sie werden mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet und bestehen aus den natürlichen Zahlen, den negativen natürlichen Zahlen und der Zahl Null. Mit den Pünktchen als