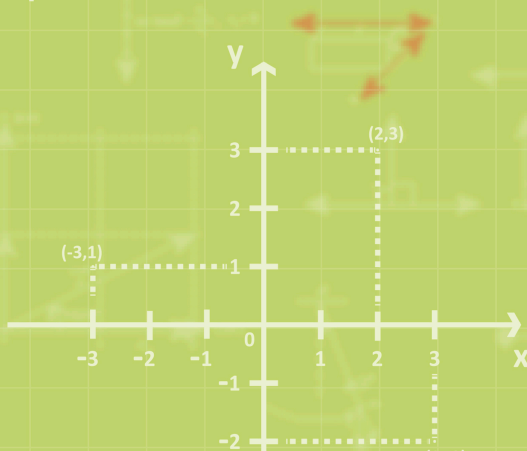
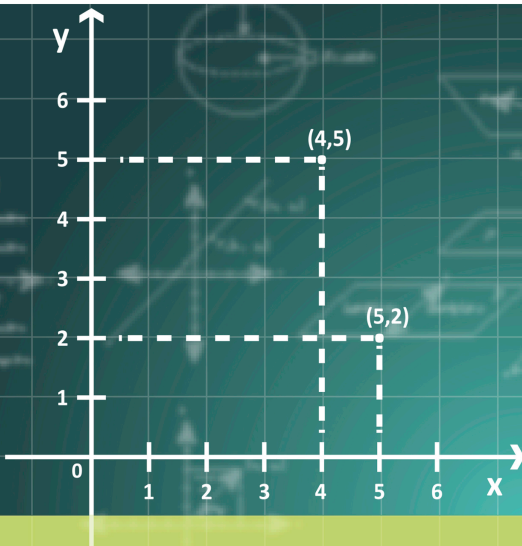


Introducción a la proporción y a los vectores

Carlos Javier Rojas Álvarez



CARLOS JAVIER ROJAS ÁLVAREZ

Profesor investigador del Departamento de Matemática y Estadística de la Universidad del Norte (Colombia). Licenciado en Matemática y Física de la Universidad del Atlántico. Magíster en Educación de la Universidad del Norte. Es autor de los libros *Introducción a la Geometría* (2.^a ed.) (2016), *Geometría para Diseño Gráfico* (2017), *Razonamiento Cuantitativo* (2.^a ed.) (2018) y *Aplicaciones de las funciones algebraicas* (2019), y coautor de los libros *Estadística Descriptiva y Distribuciones de probabilidad* (2005) y *Matemáticas Básicas* (2015), todos publicados por la Editorial Universidad del Norte. Ha sido ganador del premio Innovación Pedagógica Uninorte en los años 2004, 2007, 2011 y 2013.

Introducción a la proporción y a los vectores

Introducción a la proporción y a los vectores

Carlos Javier Rojas Álvarez

Área metropolitana
de Barranquilla (COLOMBIA), 2021

 **UNIVERSIDAD
DEL NORTE**
Editorial

Rojas Álvarez, Carlos Javier.

Introducción a la proporción y a los vectores / Carlos Javier Rojas Álvarez. – Barranquilla, Colombia : Editorial Universidad del Norte, 2021.

183 p. : il. ; 24 cm.

Incluye referencias bibliográficas (página 175)

ISBN 978-958-789-202-4 (PDF)

1. Geometría — Enseñanza. I. Tít.

(516.3 R741 ed.23) (CO-BrUNB)



Vigilada Mineducación

www.uninorte.edu.co

Km 5, vía a Puerto Colombia, A.A. 1569

Área metropolitana de Barranquilla (Colombia)

© Universidad del Norte, 2021

Carlos Javier Rojas Álvarez

Coordinación editorial

María Margarita Mendoza

Asistencia editorial

Leonardo Carvajalino

Diseño de portada y diagramación

Munir Kharfan de los Reyes

Hecho en Colombia

Made in Colombia

© Reservados todos los derechos. Queda prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio reprográfico, fónico o informático así como su transmisión por cualquier medio mecánico o electrónico, fotocopias, microfilm, *offset*, mimeográfico u otros sin autorización previa y escrita de los titulares del *copyright*. La violación de dichos derechos constituye un delito contra la propiedad intelectual.

CONTENIDO

Introducción 1

Organización del contenido	1
Estructura y metodología de cada unidad	2

UNIDAD P

Preliminares 5

P. 1. Términos primitivos	6
P. 2. Posición relativa de puntos	9
P. 3. Segmento	11
P. 4. Rayos	12
P. 5. Ángulos	13
P. 6. Triángulos	25
P. 7. Cuadriláteros	36
P. 8. Polígonos	39
P. 9. La circunferencia	46
P. 10. Sólidos	49
P. 11. Referencias	70

UNIDAD 1

Razón y proporción.....71

1. 1. Proporción	74
1. 2. La pendiente de la recta	87
1. 3. Referencias	102

UNIDAD 2

Vectores 103

2. 1 Escalares y vectores	107
2. 2 Componentes de un vector	119
2. 3 Suma de vectores	139
2. 4 Referencias	175

Respuestas 177

Unidad 1	177
Unidad 2	180

Introducción

Este libro nació de una necesidad que se presenta en el programa de Arquitectura en los temas de escalas, pendiente, vectores y sistema de ecuaciones lineales, en la asignatura Álgebra y Trigonometría, los cuales, posteriormente, serán de gran utilidad en el semestre que sigue, en particular en la asignatura Estática. Por tal razón, el propósito es presentar dichos temas, o en su mayoría, con aplicaciones en la vida real que motivan al alumno a alcanzar los siguientes resultados de aprendizaje generales:

- Aplicar las definiciones y las propiedades de los objetos geométricos en la solución de problemas de proporción y de vectores.
- Transferir las propiedades de la proporción en situaciones problema de escalas y pendientes de escaleras y rampas.
- Resolver situaciones problema relacionados con suma de vectores y la primera ley de Newton.

El resultado es un libro que organiza el contenido en diversos aspectos adecuados a las necesidades de los alumnos de Arquitectura. A continuación, se detalla la organización del contenido, así como la estructura y la metodología de cada unidad.

ORGANIZACIÓN DEL CONTENIDO

Este libro presenta un glosario de términos geométricos, el tema de la proporción y el de vectores.

El **glosario de términos geométricos** se organiza de manera axiomática: parte de los conceptos primitivos (conceptos no definidos en geometría) que son el punto, la recta y el plano. Luego, se exponen las definiciones de los puntos según su posición, las de los segmentos, los rayos, los ángulos, los triángulos, los cuadriláteros, los polígonos, la circunferencia y los sólidos, con las propiedades cuando sea necesario. Se utiliza el término *propiedades* para los postulados y los teoremas. Esta unidad está basada en la unidad de Conceptos preliminares del libro *Introducción a la geometría* (2.^a edición) y del libro *Geometría para diseño gráfico*, ambos del mismo autor de la presente obra.

La **unidad de proporción** hace énfasis en la escala, de gran utilidad en arquitectura, así como en la pendiente de escaleras y rampas. Esta unidad está basada en la unidad de Semejanza del libro *Introducción a la geometría* (2.^a edición) y en la unidad de Proporciones del libro *Geometría para diseño gráfico*, ambas del autor de la presente obra.

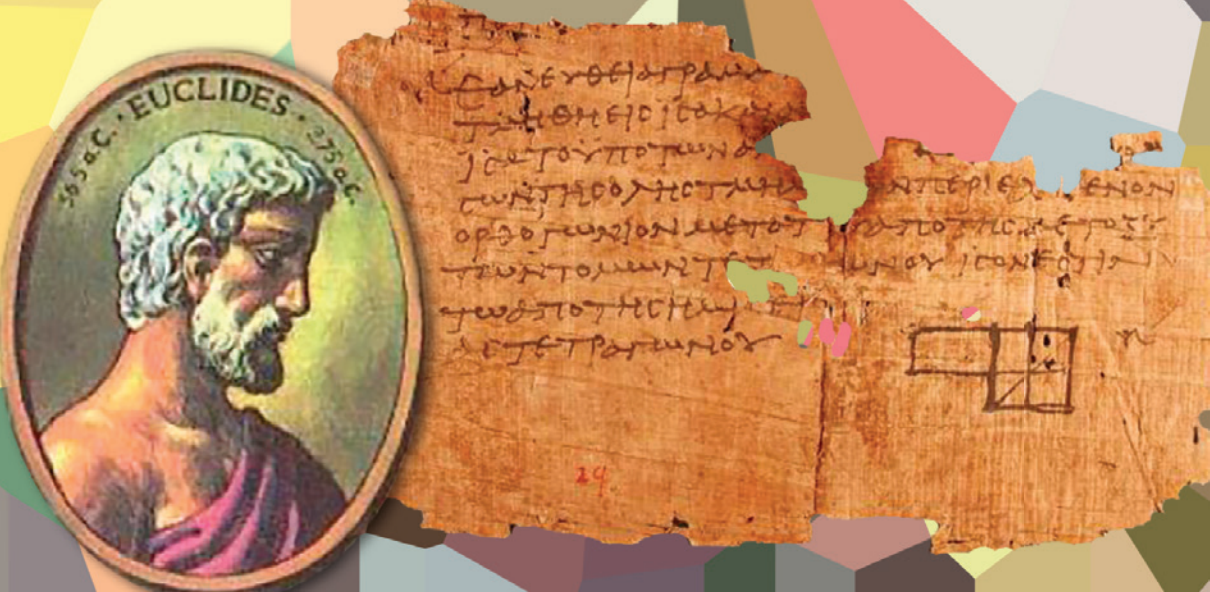
La **unidad de vectores** contiene sus elementos característicos, con énfasis en la dirección a través del rumbo por medio de la carta solar, y la suma de vectores. También incluye situaciones de la primera ley de Newton que conducen a un sistema de ecuaciones lineales. Esta unidad está basada en la unidad de Vectores del libro *Introducción a la geometría* (2.^a edición) del autor de la presente obra.

ESTRUCTURA Y METODOLOGÍA DE CADA UNIDAD

La estructura y la metodología de las unidades 1 y 2 es la siguiente:

- *Resultados de aprendizaje.* Es el inicio de la unidad. Su propósito es establecer lo que se espera que el alumno aprenda de la unidad.
- *Resumen.* Proporciona una visión sintética del contenido y de las principales aplicaciones de la respectiva unidad.

- *Problema.* Es una situación problema de la vida cotidiana que pretende explorar los conocimientos previos del alumno con respecto al concepto central de la unidad. El alumno debe tratar de solucionar dicha situación problema.
- *Contenido con conexiones y ejemplos.* El contenido de cada sección de una unidad se distribuye en las definiciones, las propiedades (si las hubiere) y los ejemplos que ilustran las aplicaciones de las definiciones y de las propiedades. El objetivo de las conexiones es conectar con la realidad algunos de los conceptos de la unidad.
- *Recapitulación.* Es un repaso de las definiciones de la unidad.
- *Preguntas de análisis.* El objetivo es permitir la reflexión de los alumnos alrededor de los conceptos de la sección.
- *Aplicaciones.* Contiene las situaciones problema cuyo propósito es aplicar las definiciones y propiedades de la sección. Algunos tienen un contexto real y otros son “ideales”, pero constituyen un inicio en el estudio (por ejemplo, de la primera ley de Newton). Lo aconsejable en el estudio de las leyes de Newton es simplificar la situación problema (al no tener en cuenta algunos factores), de manera que en cursos posteriores se complejiza dicha situación al contar con los factores que no se tuvieron en cuenta al inicio.
- *Integración de conceptos de la unidad.* La integración se presenta a manera de un mapa conceptual que muestra la conexión de los principales conceptos de la unidad.
- *Autoevaluación.* Son situaciones problema que, en su mayoría, integran los conceptos y las propiedades de las secciones de la unidad, por lo que su complejidad es mayor que la de las aplicaciones de las secciones de la respectiva unidad.
- *Referencias.* Muestra los libros y los documentos consultados para la elaboración de la estructura de cada unidad.



Fuente: Composición a partir Baldor, A. (1987). *Álgebra*, p. 97, y Rooney, A. (2009). *Historia de las matemáticas: de la construcción de las pirámides hacia la exploración del infinito*, p. 80.

Figura 1. Euclides (325-275 a. d. C.). Primero en la Edad de Oro de la geometría griega. Fundó en Alejandría su escuela. Fue también el primero en sistematizar los conocimientos de la geometría de ese entonces —lo que hoy conocemos como “el método axiomático”— en el libro *Elementos*, por lo que a la geometría se le identifica también como “Geometría elemental”.

UNIDAD P

Preliminares

P.1	Términos primitivos	6
P.2	Posición relativa de puntos	9
P.3	Segmento	11
P.4	Rayos	12
P.5	Ángulos	13
P.6	Triángulos	25
P.7	Cuadriláteros	36
P.8	Polígonos	39
P.9	La circunferencia	46
P.10	Sólidos	49
P.11	Referencias	70

Nota: Esta unidad está basada en la unidad de Conceptos preliminares del libro *Introducción a la geometría*, 2ª edición, 2016, y del libro *Geometría para diseño gráfico*, 2017, ambos de la editorial Universidad del Norte.

RESUMEN

El propósito de esta unidad, denominada "Conceptos preliminares", es proporcionar las definiciones y las propiedades de la geometría elemental, algunas de las cuales se trabajan en las unidades 1 y 2. Por tal razón, no contiene ejemplos ni aplicaciones.

P.1. TÉRMINOS PRIMITIVOS

El método axiomático es el fundamento del método deductivo y surgió con Euclides cuando escribió *Elementos*. Si bien en el método axiomático los términos que son propios de una teoría (*geometría*, o *teoría de conjuntos*, por ejemplo) no se presentan sin una definición previa, no se puede aplicar este principio de manera indefinida, por lo que es necesario partir de conceptos que no se definen, denominados "conceptos indefinidos", "conceptos no definidos" o "términos primitivos". En síntesis, los conceptos indefinidos constituyen la base del método axiomático, pues sobre estos se construyen las definiciones, y sobre estas los postulados (propiedades), y sobre todos los anteriores los teoremas (propiedades), de manera que se forma así el "edificio matemático". La geometría fue la primera rama de la matemática que fue axiomatizada.

Geometría, del griego $\gamma\eta$ “tierra”, y $\mu\epsilon\tau\rho\epsilon\omega$ “medir”, etimológicamente significa “medida de la tierra”. Proviene también del latín *geometrein*, *gaia* o *ge* “tierra”, y *metrein* “medir”.

El método axiomático parte de conceptos que no se definen, denominados “términos primitivos”. En función de estos se formulan las definiciones. La combinación de estos dos permite establecer los postulados, los cuales son proposiciones que se admiten como verdaderas. Por último, se encuentran los teoremas, que son proposiciones que deben demostrarse a partir de las definiciones, los postulados y teoremas previamente demostrados. Este método se repite cada vez que se estudia una nueva unidad, con excepción de los conceptos primitivos, los cuales se establecen solo al principio de la geometría elemental.

La figura 2 ilustra el método axiomático.



Figura 2. Método axiomático

En geometría elemental, los términos primitivos son el punto, la recta y el plano.

Término primitivo 1.1

El **punto** solo tiene posición, no tiene medida. Se simboliza con letras mayúsculas. En la figura 3, el punto A .



Figura 3.

Término primitivo 1.2

La **recta** es delgada, no tiene longitud finita. Se simboliza con letras minúsculas cursivas como l , m , n , etc., o con dos letras mayúsculas, que corresponden a dos puntos de ella, con un símbolo de flecha doble sobre dichas letras. En la figura 4, la recta l o la recta \overleftrightarrow{AB} .

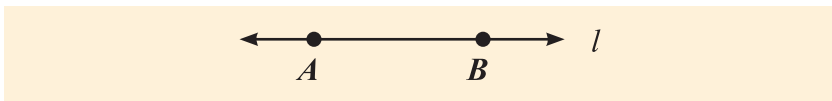


Figura 4.

Término primitivo 1.3

El **plano** es delgado y se extiende indefinidamente en todas las direcciones. Se simboliza con letras mayúsculas. En la figura 5, el plano P .

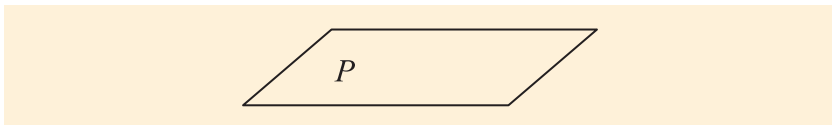


Figura 5.

□

P.2. POSICIÓN RELATIVA DE PUNTOS

DEFINICIÓN P.2.1

El conjunto de todos los puntos se denomina **espacio**.

DEFINICIÓN P.2.2

Dada una recta l y un plano P que la contiene, los puntos del plano que no están en la recta forman dos conjuntos denominados *semiplanos*. A la recta l se le denomina la *arista* o el *borde* de cada uno de los semiplanos. En la figura 6, el semiplano P .



Figura 6.

DEFINICIÓN P.2.3

Los puntos de un conjunto son **colineales** o están **alineados** si y solo si hay una recta que los contiene a todos.

En la figura 7, los puntos A , B y C son colineales porque están en la recta q , mientras que los puntos A , B , C y D no son colineales porque no pertenecen a la recta q .

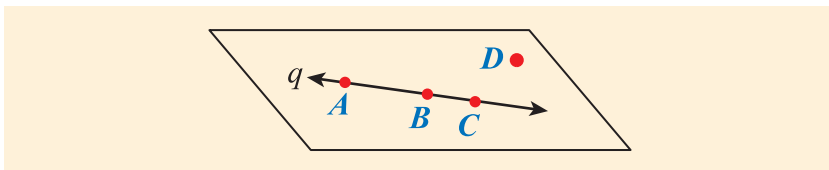


Figura 7.

DEFINICIÓN P.2.4

Los puntos de un conjunto son **coplanares** si y solo si hay un plano que los contiene a todos.

En la figura 8, los puntos Q , P y R son coplanares porque están en el plano A ; mientras que los puntos Q , P , R y S no son coplanares porque no están, todos, en el plano A .

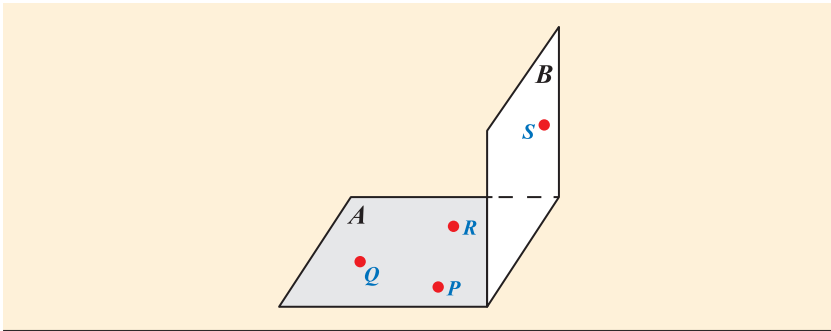


Figura 8.

PROPIEDAD P.2.1

Dados dos puntos distintos cualesquiera, existe exactamente una recta que los contiene.

□

P.3. SEGMENTO

DEFINICIÓN P.3.1

El **segmento** es el conjunto de los puntos A y B , y de todos los puntos que están entre ellos. A y B se denominan los *extremos* de \overline{AB} . La *distancia* AB es la longitud del segmento \overline{AB} .

En la figura 9, el segmento \overline{AB} .



Figura 9.

En la figura 10, D está entre A y B , cuando estos tres puntos son colineales y $AD + DB = AB$. Se denota por $A-D-B$.

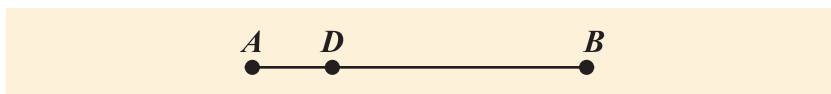


Figura 10.

DEFINICIÓN P.3.2

Segmentos congruentes son segmentos que tienen la misma longitud.

En la figura 11, los segmentos \overline{AB} y \overline{CD} son congruentes. Se simboliza por $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ o $AB = CD$. El símbolo \cong se lee "es congruente con".

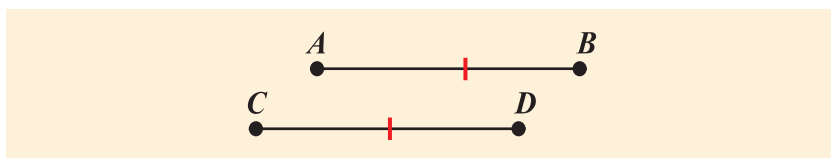


Figura 11.

DEFINICIÓN P.3.3

El **punto medio** de un segmento es el punto que está entre los extremos de un segmento y que lo divide en dos segmentos congruentes. En la figura 12, M es el punto medio del segmento \overline{AB} .

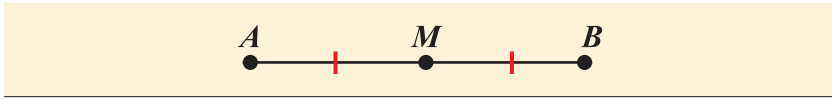


Figura 12.

□

P.4. RAYOS**DEFINICIÓN P.4.1**

El **rayo** \overrightarrow{AB} es un subconjunto de una recta formado por la unión del segmento \overline{AB} y el conjunto de todos los puntos que están del mismo lado de A , como B . El punto A se llama el extremo de \overrightarrow{AB} . En la figura 13, el rayo \overrightarrow{AB} .

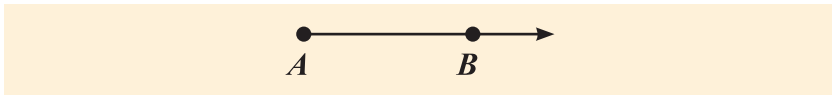


Figura 13.

DEFINICIÓN P.4.2

Los **rayos opuestos** son rayos que tienen el mismo extremo, pero que van en direcciones opuestas. En la figura 14, los rayos \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} son rayos opuestos.

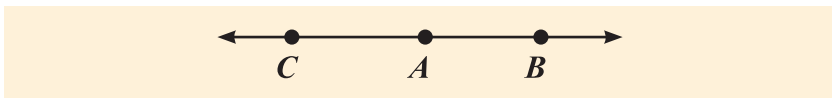


Figura 14.

□