

Ulrike Kipman

# Problemlösen

Begriff – Strategien – Einflussgrößen –  
Unterricht – (häusliche) Förderung

*2. Auflage*



Springer Gabler

---

# Problemlösen

---

Ulrike Kipman

# Problemlösen

Begriff – Strategien – Einflussgrößen –  
Unterricht – (häusliche) Förderung

2. Auflage

Ulrike Kipman  
Pädagogische Hochschule Salzburg  
Salzburg, Österreich

ISBN 978-3-658-26803-9      ISBN 978-3-658-26804-6 (eBook)  
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-26804-6>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

### Springer Gabler

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, 2020

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Springer Gabler ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

---

## Vorwort zur 2. Auflage

Die Handreichung aus der 1. Auflage meines Buches (unter dem Titel „Problemlösen“ bei Springer Gabler erschienen) sowie die Aufgaben zur Kombinatorik und zur Förderung im schulischen Kontext sind erfreulich gut von den Studierenden, Lehrpersonen, Kollegen, aber auch von Eltern und diversen Förderinstitutionen angenommen worden, sodass nun schon nach relativ kurzer Zeit eine 2. Auflage vorliegt, in der die Kapitel zur Kombinatorik und zur schulischen und häuslichen Förderung der Problemlösekompetenz um wesentliche Aspekte und weitere Aufgaben und Spiele erweitert und mithilfe der Rückmeldungen der Studierenden und Kollegen noch besser strukturiert wurden.

Ich danke allen Lesern, die mich auf missverständliche Formulierungen und Fehler im Buch hingewiesen haben, die nun behoben werden konnten, und vor allem den Studierenden, Lehrpersonen und deren Schülerinnen und Schülern, die die Spiele und Aufgaben aus dem Buch in allen erdenklichen Settings getestet haben und mir wertvolle Rückmeldungen und Hinweise im Hinblick auf die Verständlichkeit und Durchführbarkeit der Förderung gegeben haben.

Die fallweise komplexe Thematik sollte einfach, gefällig und nachvollziehbar dargestellt werden, um das Verständnis nicht zu erschweren und den Anwendern einen niederschweligen Zugang zu ermöglichen, wobei ich gleichzeitig darauf geachtet habe, alle wichtigen Grundlagen aufzugreifen und nichts auszusparen. Ich hoffe, damit einen guten Weg gefunden zu haben, dem Leser einerseits einen umfassenden Überblick zum Problemlösen zu geben und andererseits dem Förderer eine Handreichung bereitzustellen, die in dieser einfachen Form bislang (noch) nicht existiert hat.

Bitte zögern Sie nicht, mir Rückmeldungen, Ideen und Vorschläge an [ulrike.kipman@phsalzburg.at](mailto:ulrike.kipman@phsalzburg.at) zu senden.

Salzburg, Österreich  
April 2019

Ulrike Kipman

---

## Vorwort zur 1. Auflage

Problemlösen gilt als eine der Schlüsselqualifikationen des 21. Jahrhunderts, wahrscheinlich auch deshalb, weil dies eben (noch) nicht von den immer schneller und besser werdenden Rechnern erledigt werden kann, die alle möglichen Kombinationen von Ereignissen innerhalb kürzester Zeit miteinander abgleichen, gewichten und die entsprechend günstigste Entscheidung errechnen. Es geht beim Problemlösen nicht nur darum, Informationen sinnvoll zu vernetzen, dynamisch in Beziehung zu setzen, Wahrscheinlichkeiten zu berechnen und eine Kette richtiger Entscheidungen zu treffen, sondern auch vielfach darum, eine Vielzahl an Außenkriterien zu berücksichtigen und ein entsprechendes „Weltwissen“ an den Tag zu legen, welches einer künstlichen Intelligenz nicht zur Verfügung steht. Abgesehen davon ist es nicht möglich, für alle Entscheidungen eine künstliche Intelligenz zu befragen.

Dieses Buch soll die Frage beantworten, wie man zu einem guten Problemlöser/einer guten Problemlöserin werden kann bzw. warum bestimmte Personen bei der Lösung von Problemen erfolgreicher sind als andere. Nach einer umfassenden Zusammenstellung der Literatur zu diesem Thema werden Einflussgrößen auf das Problemlösen analysiert und miteinander abgeglichen und Ideen für den Unterricht in der Primarstufe und Sekundarstufe I präsentiert. Zudem werden verschiedene Arten des Unterrichts im Hinblick auf die Wirksamkeit für unterschiedliche Personengruppen diskutiert, dies vor dem Hintergrund, dass nicht nur Problemstellungen stark variieren sondern auch die Problemlöser/innen selbst. Eine Handreichung mit Brettspielen, die die Kriterien des Problemlösens erfüllen, ist ebenfalls Teil dieses Buches. Letztendlich wird ein Modell vorgeschlagen, welches erfolgreiches Problemlösen vielschichtig zu erklären versucht.

Salzburg, Österreich  
2017

Ulrike Kipman

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung und Gliederung</b> .....	1
1.1	Überlegungen und Aufbau .....	2
	Literatur .....	5
<b>2</b>	<b>Definitionen</b> .....	7
2.1	Was ist ein Problem? .....	7
2.2	Was bedeutet Problemlösekompetenz? .....	10
2.3	Gibt es verschiedene Problemtypen? .....	12
2.3.1	Analytische Probleme .....	14
2.3.2	Synthetische Probleme .....	15
2.3.3	Dialektische Probleme .....	16
2.4	Der Prozess des Problemlösens .....	17
2.4.1	Verstehen der Aufgabe .....	18
2.4.2	Ausdenken eines Plans .....	18
2.4.3	Ausführen des Plans .....	19
2.4.4	Rückschau .....	19
2.5	Problemlösestrategien (Heuristiken) .....	20
2.5.1	Heuristische Hilfsmittel .....	23
2.5.2	Heuristische Prinzipien .....	26
2.5.3	Heuristische Strategien .....	29
2.6	Zusammenfassung .....	32
	Literatur .....	32
<b>3</b>	<b>Voraussetzungen erfolgreichen Problemlösenlernens</b> .....	35
3.1	Übungseffekte .....	36
3.2	Problemisomorphie .....	36
3.3	Heuristiken anwenden und Transferleistungen erbringen können .....	36
3.4	Handlungsorientierter Unterricht .....	38
3.5	Training .....	41
3.6	Persönlichkeit und Problemlösekompetenz .....	42
3.7	Intelligenz und Problemlösekompetenz .....	43

3.8	Expertise und Problemlösekompetenz. . . . .	44
3.9	Motivation, Emotion und Problemlösekompetenz. . . . .	44
3.10	Planungsfähigkeit und Problemlösekompetenz. . . . .	48
3.11	Hintergrundmerkmale und Problemlösekompetenz. . . . .	49
3.12	Zusammenfassung . . . . .	50
3.13	Storyboard . . . . .	50
3.14	Abgeleitete Fragestellungen. . . . .	51
3.15	Überlegungen zu den Forschungsfragen . . . . .	52
3.16	Abgeleitete Modelle zu den Einflussgrößen . . . . .	55
3.17	Abgeleitete Modelle zur Strategienutzung. . . . .	57
	Literatur. . . . .	58
<b>4</b>	<b>Die Problemlösekompetenzen der österreichischen Schüler. . . . .</b>	<b>67</b>
4.1	Die Erhebung von Problemlösekompetenzen in Large Scale Assessments. . . . .	68
4.2	Allgemeine Informationen zur PISA-Studie . . . . .	69
4.3	Die PISA-Problemlöseaufgaben . . . . .	70
4.3.1	Beispiel 1 – Anschlusszüge . . . . .	70
4.3.2	Beispiel 2 – Bewässerung . . . . .	70
4.3.3	Beispiel 3 – Ferienlager . . . . .	70
4.3.4	Beispiel 4 – Bibliothekensystem . . . . .	70
4.4	Allgemeines zur Auswertung und Interpretation der PISA-Daten . . . . .	73
4.4.1	Metrik. . . . .	73
4.4.2	Zuteilung zu den Kompetenzstufen . . . . .	76
4.4.3	Die Gewichtung bei PISA . . . . .	82
4.4.4	Die Plausible Values bei PISA . . . . .	85
4.4.5	Die Standardfehlerberechnung bei PISA. . . . .	85
4.5	Die Problemlösekompetenzen der österreichischen Schüler im Ländervergleich . . . . .	87
4.6	Die Verteilung der Schüler auf die Kompetenzstufen im Ländervergleich . . . . .	88
4.7	Geschlechtsunterschiede im Problemlösen . . . . .	89
4.8	Sozioökonomischer Hintergrund und Problemlösekompetenzen . . . . .	90
4.8.1	Operationalisierung der Variablen . . . . .	91
4.8.2	Analysen . . . . .	92
4.8.3	Ergebnisse . . . . .	94
4.9	Emotionale Faktoren (Selbstkonzept, Motivation ...) und Problemlösekompetenzen . . . . .	95
4.9.1	Operationalisierung der Variablen . . . . .	96
4.9.2	Analysen . . . . .	99
4.9.3	Ergebnisse . . . . .	100



4.10	Kombinationen aus Hintergrundmerkmalen und Persönlichkeitsmerkmalen . . . . .	104
4.11	Zusammenfassung . . . . .	106
	Literatur. . . . .	108
<b>5</b>	<b>IQ und EQ – ist der Mix entscheidend und macht der Problemtyp einen Unterschied?</b> . . . . .	<b>109</b>
5.1	Allgemeines . . . . .	110
5.2	Erhobene Konstrukte . . . . .	110
5.2.1	Emotionale Selbstwirksamkeit. . . . .	111
5.2.2	Allgemeine Selbstwirksamkeit . . . . .	112
5.2.3	Proaktive Einstellung . . . . .	112
5.2.4	Coping . . . . .	112
5.2.5	Selbstregulation . . . . .	113
5.2.6	Intelligenz . . . . .	113
5.2.7	Problemlösekompetenz . . . . .	114
5.3	Analysen . . . . .	114
5.4	Ergebnisse . . . . .	115
5.4.1	Skaleninformatonen . . . . .	115
5.4.2	Inhaltliche Analysen. . . . .	115
5.5	Zusammenfassung und Schlussfolgerung . . . . .	121
	Literatur. . . . .	122
<b>6</b>	<b>Kombinatorik und Problemlösen?</b> . . . . .	<b>123</b>
6.1	Was ist Kombinatorik? . . . . .	124
6.1.1	Allgemeines Zählprinzip . . . . .	125
6.1.2	Permutation ohne Wiederholung . . . . .	126
6.1.3	Permutation mit Wiederholung . . . . .	126
6.1.4	Variation ohne Wiederholung . . . . .	127
6.1.5	Variation mit Wiederholung. . . . .	128
6.1.6	Kombination ohne Wiederholung . . . . .	129
6.1.7	Kombination mit Wiederholung. . . . .	129
6.2	Kombinatorik zum Problemlösenlernen? . . . . .	130
6.2.1	Lösungen mit Baumdiagrammen (Skizzen). . . . .	131
6.2.2	Lösungen mit Gleichungen . . . . .	131
6.2.3	Lösungen mit Lösungsgraphen . . . . .	131
6.2.4	Lösungen mithilfe von Tabellen. . . . .	132
6.3	Wahrscheinlichkeiten und Kombinatorik. . . . .	134
6.4	Zusammenfassung . . . . .	134
	Literatur. . . . .	135

<b>7</b>	<b>Einflussfaktoren auf die Leistung in Kombinatorik</b>	<b>137</b>
7.1	Allgemeines	138
7.2	Operationalisierung der Konstrukte	138
7.2.1	Sozialer Hintergrund	138
7.2.2	Mathematische Fähigkeiten	138
7.2.3	Mathematisches Interesse	139
7.2.4	Note in Mathematik	139
7.2.5	Lesekompetenz	139
7.2.6	Intelligenz	139
7.2.7	Kombinatorikfähigkeiten	139
7.3	Analysen	141
7.4	Ergebnisse	143
7.5	Zusammenfassung	148
	Literatur	148
<b>8</b>	<b>Strategien zur Lösung von Kombinatorikaufgaben</b>	<b>149</b>
8.1	Allgemeines	149
8.2	Operationalisierung der Strategien	151
8.3	Vorgegebene Aufgaben	152
8.4	Analysen	153
8.5	Ergebnisse	154
8.5.1	Kombination und Variation mit den Eiskugeln	154
8.5.2	Variation und Kombination mit den Autos	156
8.5.3	Permutation mit den Tieren (3 und 4 Elemente)	157
8.5.4	Vergleich Papier-Bleistift-Lösungen vs. Einzelsetting mit Materialien	159
8.6	Exkurs: Lösungsstrategien bei Erwachsenen	159
8.6.1	Kombination und Variation mit den Eiskugeln (Erwachsene)	160
8.6.2	Kombination mit den Autos (Erwachsene)	162
8.6.3	Permutation mit den Tieren (3 und 4 Elemente)	162
8.7	Vergleich Lösungshäufigkeiten und Strategien	163
8.8	Zusammenfassung	165
	Literatur	166
<b>9</b>	<b>Wie kann man die Kombinatorikleistung verbessern?</b>	<b>167</b>
9.1	Allgemeines	168
9.2	Analysen	170
9.3	Ergebnisse	170
9.3.1	Voranalysen	170
9.3.2	Leistungszuwachs	171
9.3.3	Tieferegehende Analysen	172
9.4	Zusammenfassung	175
	Literatur	175

<b>10</b>	<b>Stochastische Fähigkeiten bei Spitzenschülern im Grundschulalter</b>	177
10.1	Allgemeines	177
10.2	Analysen	178
10.3	Ergebnisse	178
10.4	Zusammenfassung	179
<b>11</b>	<b>Spielen und dabei Problemlösen lernen? Spiele zur Förderung von Problemlösekompetenzen</b>	181
11.1	Allgemeines	181
11.2	Brettspiele zur Kompetenzerweiterung im Bereich Problemlösen	182
11.2.1	Uluru	182
11.2.2	Dimension	184
11.2.3	Der bunte Hund	186
11.2.4	Corona	188
11.2.5	Scotland Yard (Master)	191
11.2.6	Rush Hour	194
11.2.7	Master Mind	196
11.2.8	Big Band	198
11.2.9	Pinguintanz	202
11.2.10	Allein im Drachenlabyrinth	204
11.2.11	Tatort Nachtexpress	205
11.2.12	EXIT	207
11.2.13	Metro Ville	208
11.2.14	Captain Sonar	210
11.2.15	Robo Rally	213
11.2.16	Wave Breaker	216
11.2.17	Onitama	218
11.2.18	Weitere Spiele zum Problemlösenlernen	220
11.3	Zusammenfassung	222
	Literatur	222
<b>12</b>	<b>Handlungsorientierte Kombinatorikaufgaben für den Unterricht in der Primarstufe und der Sekundarstufe I</b>	225
12.1	Allgemeines	225
12.2	Problemlöseaufgaben aus der Kombinatorik für den Unterricht	226
12.2.1	Bälle in Schachteln sortieren	226
12.2.2	Stifte im Federpennal	226
12.2.3	Autos	227
12.2.4	Haus mit Lift und Treppen	227
12.2.5	Restaurant	228
12.2.6	Test	228
12.2.7	Schüler kommen in die Klasse	229
12.2.8	Tresor	229

12.2.9.	Licht	230
12.2.10.	Badematten	230
12.2.11.	Skilager	231
12.2.12.	Snowboarden	231
12.2.13.	Spielplatz	232
12.2.14.	M&Ms	232
12.2.15.	Zug	233
12.2.16.	Auto	233
12.2.17.	Fototermin	234
	Literatur	234
<b>13</b>	<b>Zusammenfassung und Resümee</b>	<b>235</b>
13.1	Zu den Hintergrundvariablen	241
13.2	Zu den Persönlichkeitsvariablen und zur Kognition	243
13.3	Zu den kombinierten Merkmalen	245
13.4	Weitere interessante Ergebnisse	246
	Literatur	247
<b>14</b>	<b>Ein neues dynamisches Modell zum Problemlösen/Ausblick</b>	<b>251</b>
14.1	Vorschlag für ein dynamisches Modell	251
14.2	Ausblick	255



## Zusammenfassung

In Kap. 1 werden nach einer kurzen Einleitung die Überlegungen, die diesem Buch zugrunde liegen, sowie der Aufbau des Buches zusammengestellt.

Wenn der Begriff „Problemlösen“ fällt, dann stößt man entweder auf Begeisterung oder auf ablehnende Gesten. Es gibt kaum Menschen, die auf diesen Begriff neutral reagieren. Fragt man Personen, was sie mit diesem Begriff assoziieren, fallen Begriffe wie „Denken“, „Intelligenz“ oder „Hochbegabung“ und neuerdings auch immer wieder Begriffe wie „Exit Games“ oder „Escape the Room Games“, wo sich bei den Spielen dieselbe Polarisierung wie bei der Begriffsnennung alleine zeigt. Während die einen fast süchtig danach sind und schon auf die Neuauflage warten, können die anderen mit derartigen Spielen wenig anfangen.

Es taucht natürlich die Frage auf, was „die einen“ haben und „die anderen“ nicht. Man versucht, dem auf den Grund zu gehen und verschiedenste Personengruppen beim Problemlösen zu beobachten, indem man Denksportaufgaben stellt, graphentheoretische Probleme, Spiele mit hohem Problemlösegehalt vorgibt und Umkehraufgaben produzieren lässt. Die Thesen, die sich aus der unsystematischen Beobachtung ergeben, sind so vielfältig, wie die Personen selbst. Man stellt sich die Frage, ob es mit der „Persönlichkeit“ zu tun haben könnte (und, wenn ja, mit welchen Merkmalen die Freude und der Erfolg beim Problemlösen konfundiert sind: Ist es die Selbstwirksamkeit, ist es die proaktive Einstellung, ist es die Extraversion, oder ist es eine Kombination aus vielen Persönlichkeitsmerkmalen?) oder ob die Motivation ausschlaggebend ist (sind es diejenigen, die eine hohe Leistungsmotivation haben?) oder ob es schlichtweg die kognitiven Voraussetzungen sind, die dazu führen, dass „die einen“ das Problemlösen lieben und „die anderen“ nicht.

Schließlich beschließt man, dem Ganzen systematischer auf den Grund zu gehen, Definitionen zu durchforsten, wissenschaftliche Artikel zu lesen, mit den verschiedensten Experten auf diesem Gebiet zu reden, und macht selbst diverse Versuche mit Kindern, Jugendlichen und Erwachsenen. Man nimmt Anleihen an PISA, überlegt sich, wie man die Definitionen in Experimente umsetzen kann, und schließlich stellt man sich auch die Frage, ob die Kompetenzen womöglich erlernbar sind und, wenn ja, wie das – im Idealfall – in der Schule oder in der häuslichen Förderung bewerkstelligt werden kann. Im Laufe der Experimente ergeben sich immer wieder neue Fragen und im Zuge vieler Gespräche neue Ideen. Alles, was dazu bis jetzt von mir herausgefunden wurde (teilweise in groß angelegten Studien, teilweise in kleineren Experimenten), ist in diesem Buch übersichtlich zusammengestellt.

Was auf jeden Fall schon vorab gesagt werden kann, ist, dass Problemlösen eine fächerübergreifende Schlüsselqualifikation und für das gesamte Leben – nicht nur für das Berufsleben – von Bedeutung ist.

Wenn man sich jetzt fragt, „wo denn das Problem beim Problemlösen eigentlich liegt“, ist das durchaus verständlich. Die Frage wurde mir auch schon einige Male gestellt: „Wenn Ausgangszustand und Zielzustand definiert sind, dann muss man ja ‚nur noch‘ die Operationen finden, um von A nach Z zu kommen!“ Das Problem liegt – ganz einfach – in der Beschreibung der Zustände. Es gibt im „echten“ Leben ganz wenige sogenannte geschlossene Probleme (SEND + MORE = MONEY oder WEIN + WEIB = LIEBE wären solche sogenannten kryptarithmetischen Probleme). Die meisten Probleme sind jedoch komplexer: offener Ausgangszustand bzw. die Frage, was alles zum Ausgangszustand gehört („Weltwissensproblematik“), oder offener Zielzustand oder unklare Mittel (dazu mehr bei den Definitionen in Kap. 2). Man denke zum Beispiel an 9/11 oder den Irakkrieg oder auch an den legendären Versuch von Dörner, der (vor 40 Jahren schon!) als erster eine Computersimulation zur Erforschung von „komplexem Problemlösen“ eingesetzt hat. Somit soll dieses Buch auch den Markt an Büchern zu diesem Thema erweitern, da gerade das komplexe Problemlösen und das „Üben zum Problemlösen mit einfachen Mitteln“ noch wenig Nien Werken gefunden haben.

---

## 1.1 Überlegungen und Aufbau

Vor dem Verfassen eines Buches schaut man zunächst in die vorhandene Literatur an, durchforstet Bücher, Zeitschriftenartikel, Forschungsarbeiten und besucht Kongresse und Tagungen. Besonders aufschlussreich waren für mich – im deutschsprachigen Bereich – die Bücher von Dörner (1987), Funke (2003), Betsch et al. (2011), von Hussy (1998) und von Pólya (2010). Der englischsprachige Bereich ist weitaus größer, hier haben mir v. a. die Artikel von Gentner (1989), Haglund et al. (2012), Opfer und Thompson (2008), Resing et al. (2016) und Stevenson et al. (2014) zu tieferen Einsichten verholfen.

Der Aufbau des Buches folgt einem einfachen Schema: Zuerst werden theoretische Erkenntnisse, die in Zusammenhang mit dem Thema Problemlösen stehen, überblickartig dargestellt. Es wird sozusagen eine theoretische Basis gelegt, die schließlich zu verschiedenen Modellen führt, die mittels verschiedener Studien geprüft wurden. Anschließend folgen die Studien zu verschiedenen Themenfeldern und eine (nicht mehr ganz so wissenschaftliche, aber dennoch sehr nützliche und oft gefragte) Zusammenstellung von Ideen zur Förderung der Problemlösekompetenz (eine Art Handreichung für Pädagogen und Eltern), bevor die Ergebnisse resümiert werden und Implikationen für die Forschung sowie mögliche Modellerweiterungen bzw. neue Modelle diskutiert werden.

Im Rahmen der Beschreibung der Untersuchungen werden detailliertere Beschreibungen und noch speziellere Literatur zusammengestellt, um dem Leser das „Herumblättern“ zu ersparen.

Nachfolgend der Kapitelaufbau:

Im 2. Kapitel werden alle wichtigen Begriffe im Zusammenhang mit dem Themenfeld „Problemlösen“ definiert: Es soll geklärt werden, was unter dem Begriff „Problem“ und unter dem Begriff „Problemlösen“ zu verstehen ist, welche „Problemtypen“ es gibt und wie ein klassischer „Problemlöseprozess“ aussieht. Am Ende dieses Kapitels werden die „Problemlösestrategien“ (Heuristiken) näher beleuchtet und genau beschrieben.

Danach wird im 3. Kapitel der Forschungsstand im Hinblick auf „erfolgreiches Problemlösen“ beleuchtet. Es werden Forschungsergebnisse zum erfolgreichen Problemlösen im Hinblick auf das Problemlösenlernen und im Hinblick auf Eigenschaften von erfolgreichen Problemlösern zusammengestellt.

Das 4. Kapitel beschäftigt sich mit den Ergebnissen der PISA-Studie für die Domäne Problemlösen. Es wird – nach einer allgemeinen Einführung zu den Besonderheiten in der Auswertung der PISA-Daten – ein Ländervergleich zwischen Österreich und den anderen OECD-Ländern angestellt, um zu sehen, wie Österreich im internationalen Vergleich steht und welche Länder die Österreicher beim Problemlösen übertreffen. Das Hauptaugenmerk liegt aber auf den Einflussgrößen auf die Problemlösekompetenz, welche theoriegeleitet, aber empirisch anhand der PISA-2012-Datensätze analysiert werden.

Das 5. Kapitel ergänzt das 4. Kapitel im Hinblick auf mögliche Einflussgrößen. Es werden die Ergebnisse einer eigenen Studie vorgestellt, in der Faktoren, die bei PISA nicht erhoben wurden, untersucht wurden. Insbesondere werden hier kognitive, emotionale und motivationale Faktoren mit verschiedenen Problemtypen in Verbindung gebracht und die Frage geklärt, inwieweit emotionale Intelligenz einen Einfluss auf die Problemlösekompetenz hat.

In Kap. 6 wird die Frage geklärt, inwieweit die Kombinatorik mit dem Problemlösen verwandt ist, gerade im Hinblick darauf, dass (fast) alle PISA-Problemlöseaufgaben Kombinatorikaufgaben sind. Es werden Aufgabentypen aus dem Bereich Kombinatorik vorgestellt und mit den Definitionen für das Problemlösen abgeglichen. Es wird die Eignung kombinatorischer Aufgaben zum Problemlösenlernen diskutiert, wobei der Fokus auf den vielen möglichen Lösungswegen und damit verwendbaren Heuristiken liegt. Es wird

darauf eingegangen, welche Strategien möglich sind, um kombinatorische Aufgaben zu lösen, wie damit die Denkfähigkeit trainiert werden kann und warum sich Kombinatorikaufgaben für den Unterricht besonders gut eignen, um Problemlösestrategien zu erlernen. Zudem wird in einem Exkurs kurz auf die Verbindung zwischen guten Fähigkeiten in der Kombinatorik und in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eingegangen.

Im 7. Kapitel wird eine Studie präsentiert, in der Einflussgrößen auf die Fähigkeit, Kombinatorikaufgaben zu lösen, untersucht werden. Neben kognitiven Fähigkeiten und klassischen Hintergrundvariablen (Geschlecht, Alter, Schulstufe, sozialer Hintergrund) werden auch die Variablen wie „mathematische Fähigkeiten“ und „mathematisches Interesse“ im Hinblick auf die „Fähigkeiten im Bereich der Kombinatorik“ untersucht. Hierbei wird zwischen Aufgaben zur Permutation, zum allgemeinen Zählprinzip und zur Kombination unterschieden.

Den Strategien beim Lösen von Aufgaben aus dem Gebiet der Kombinatorik widmet sich Kap. 8. Es werden die Ergebnisse zweier eigener Studien aufgearbeitet, in denen Lösungsstrategien bei verschiedenen Aufgabentypen aus der Kombinatorik bei Kindern, Jugendlichen und Erwachsenen untersucht und im Hinblick auf die Lösungswahrscheinlichkeit ausgewertet wurden.

In Kap. 9 wird eine Studie vorgestellt, in der – aufbauend auf der Theorie und den Ergebnissen der in Kap. 7 präsentierten Studien – versucht wurde, Problemlösekompetenzen von Kindern und Jugendlichen mit Hilfe von Aufgaben aus der Kombinatorik zu verbessern. Es wird im Hinblick auf Hintergrundmerkmale ein Vergleich zwischen einem handlungsorientierten Zugang und einem klassischen Worksheet-Zugang gezogen und analysiert, wobei z. B. Fragen wie: „Verbessert sich die Kompetenz bei Buben und Mädchen gleichermaßen?“ und „In welcher Schulstufe eignet sich welcher Zugang am besten, um die Heuristiken einzuüben?“ diskutiert werden.

Kap. 10 beinhaltet Sonderanalysen, mit welchen speziell bei Spitzenschülern untersucht wurde, wie Unterricht im Bereich Kombinatorik und Problemlösen aussehen kann.

Das 11. Kapitel widmet sich den Fördermöglichkeiten im schulischen und häuslichen Kontext. Es werden bewährte kombinatoriklastige Spiele, die für die häusliche Förderung oder die Einzelbetreuung eingesetzt werden können, vorgestellt.

Schließlich werden im 12. Kapitel Möglichkeiten für den Unterricht im Klassenverband vorgestellt, mit denen die Problemlösekompetenz spielerisch verbessert werden kann.

Mit einer Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse und Schlussfolgerungen, einem neuen dynamischen Modell zur Erklärung erfolgreichen Problemlösens und mit Implikationen für die weitere Forschung schließt dieses Buch ab.

*Anmerkung:* Die Analysen bei PISA wurden mit Hilfe des IDB-Analyzer<sup>®</sup> durchgeführt (ein eigens von der IEA entwickeltes Programm zur Analyse der Daten aus Large Scale Assessment), Mediator- und Moderatormodelle wurden mittels Process<sup>®</sup> verwirklicht, Faktorenanalysen mit LISREL<sup>®</sup>. Die restlichen Analysen wurden mit SPSS<sup>®</sup>, AMOS<sup>®</sup>, HLM<sup>®</sup> und GraphPad durchgeführt.



## Literatur

- Betsch, T., Funke, J., & Plessner, H. (2011). *Denken – Urteilen, Entscheiden, Problemlösen*. (Mit 14 Tabellen. Springer-Lehrbuch Allgemeine Psychologie für Bachelor). Berlin: Springer.
- Dörner, D. (1987). *Problemlösen als Informationsverarbeitung* (Kohlhammer-Standards Psychologie, 3. Aufl.). Stuttgart: Kohlhammer.
- Funke, J. (2003). *Problemlösendes Denken* (Kohlhammer Standards Psychologie, 1. Aufl.). Stuttgart: Kohlhammer.
- Gentner, D. (1989). The mechanisms of analogical learning. In A. Ortony & S. Vosniadou (Hrsg.), *Similarity and analogical reasoning* (S. 199–241). Cambridge: Cambridge University Press.
- Haglund, J., Jeppsson, F., & Andersson, J. (2012). Young children's analogical reasoning in science domains. *Science Education*, 96(4), 725–756.
- Hussy, W. (1998). *Denken und Problemlösen* (Grundriß der Psychologie, 2., überarb. u. erw. Aufl.). Stuttgart: Kohlhammer.
- Opfer, J. E., & Thompson, C. A. (2008). The trouble with transfer. Insights from microgenetic changes in the representation of numerical magnitude. *Child Development*, 79(3), 788–804.
- Pólya, G. (2010). *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme* (Sammlung Dalp, Sonderausg. der. 4. Aufl.). Tübingen: Francke.
- Resing, W. C. M., Bakker, M., Pronk, C. M. E., & Elliott, J. G. (2016). Dynamic testing and transfer: An examination of children's problem-solving strategies. *Learning and Individual Differences*, 49, 110–119.
- Stevenson, C. E., Bergwerff, C. E., Heiser, W. J., & Resing, W. C. M. (2014). Working memory and dynamic measures of analogical reasoning as predictors of children's math and reading achievement. *Infant and Child Development*, 23(1), 51–66.



## Zusammenfassung

Kap. 2 ist den Definitionen der wichtigsten Begriffe im Zusammenhang mit dem Themenfeld „Problemlösen“ gewidmet. Es werden Definitionen der Begriffe „Problem“ und „Problemlösekompetenz“ gegenübergestellt, und es werden sowohl der „Problemlöseprozess“ als auch die „Unterscheidung zwischen verschiedenen Problemtypen“ beleuchtet. Es ergibt sich, dass bei Problemaufgaben das Lernen und Anwenden von heuristischen Regeln und das „Eigenständig-denken-Lernen“ wesentlich ist, dies unabhängig von der Offenheit der Fragestellung, die den Problemtyp bestimmt. Problemlösekompetenz bedeutet, dass man sich auf den Prozess einlassen und Gelerntes aktivieren und organisieren muss, wobei der Prozess – von der Problemidentifikation bzw. vom Verstehen der Aufgabe/des Problems bis zur Evaluierung – mehrere Phasen durchläuft.

Wenn der Begriff „Problem“ im Alltag verwendet wird, ist erfahrungsgemäß fast immer damit gemeint: „Ich komme nicht mehr weiter“, „Ich weiß nicht weiter.“ In diesem Kapitel sollen die wichtigsten Begriffe im Zusammenhang mit dem Themenfeld Problemlösen definiert werden. Es soll die Frage geklärt werden, was ein „Problem“ im wissenschaftlichen Sinne ist, was es heißt, „ein Problem zu lösen“, ob es verschiedene Arten von Problemen gibt, wie der Problemlöseprozess aussehen kann bzw. sollte und mit welchen Strategien Probleme im Idealfall gelöst werden können.

## 2.1 Was ist ein Problem?

Die ersten wissenschaftlichen Definitionen des Begriffs „Problem“ finden sich in Werken der 1930er-Jahre:

Duncker (1935/1974) definiert das Problem folgendermaßen:

Ein Problem „entsteht dann, wenn ein Lebewesen ein Ziel hat und nicht weiß, wie es dieses Ziel erreichen soll. Wo immer der gegebene Zustand sich nicht durch bloßes Handeln (Ausführen selbstverständlicher Operationen) in den erstrebten Zustand überführen lässt, wird das Denken auf den Plan gerufen“ (Duncker 1935/1974, S. 1).

Klix (1971, S. 640) spricht von einem Problem, wenn ein Anfangszustand, ein Zielzustand und das „nicht unmittelbar gelingende Überführen vom Anfangs- in den Zielzustand“ besteht.

Newell und Simon (1972) sprechen von einer Barriere zwischen einem unbefriedigenden Ausgangszustand und einem erwünschten Zielzustand. Sie führen an, dass in solchen Situationen eine neuartige Wissensvermittlung notwendig wird, und definieren damit das Problem (Newell und Simon 1972).

Auch Dörner beschreibt im Jahr 1976 (1976, S. 10) das Problem ähnlich: „Ein Individuum steht einem Problem gegenüber, wenn es sich in einem inneren oder äußeren Zustand befindet, den es aus irgendwelchen Gründen nicht für wünschenswert hält, aber im Moment nicht über die Mittel verfügt, um den unerwünschten Zustand in den wünschenswerten Zustand zu überführen“.

Er fügt noch die Unterscheidung zwischen der Aufgabe und dem Problem hinzu: „Wenn die Transformation des IST-Zustands in den SOLL-Zustand produktives Denken erfordert, dann stehen wir vor einem Problem. Andernfalls handelt es sich nur um eine Aufgabe.“ Vorerfahrungen legen demnach fest, ob eine Fragestellung für eine Person ein Problem darstellt oder lediglich eine Aufgabe (Dörner 1976).

Joeger (1976) spricht, ähnlich wie Duncker (1935), wieder die Barriere an. Er spricht von einem Problem, wenn jemand ein Ziel hat und nicht weiß, wie man dieses erreichen kann. Er gibt weiters an, dass dem Individuum in diesem Fall ein Hindernis, eine Barriere oder eine Schwierigkeit gegenübersteht, welche mit den zurzeit verfügbaren Mitteln und Maßnahmen nicht überwunden werden kann (Joeger 1976).

Schoenfeld (1989) beschreibt ein Problem schlicht damit, dass es schwer für ein Individuum zu lösen sei. Er sagt weiterhin, dass es sich nicht mehr um ein Problem handelt, wenn die Person, die lösen möchte, bereits ein Lösungsschema verfügbar hat. In diesem Fall handle es sich um eine Aufgabe und nicht mehr um ein Problem. Er lehnt sich damit an Dörner (1976) an, der die Unterscheidung zum ersten Mal expliziert hat.

Lüer und Spada (1998, S. 256) definieren ein Problem so: „Ein Problem liegt dann vor, wenn ein Subjekt in der Aufgabenumwelt Eigenschaften wahrgenommen hat, sie in einem Problemraum intern repräsentiert und dabei erkennt, dass dieses innere Abbild eine oder mehrere unbefriedigende Lücken enthält. Der Problemlöser erlebt eine Barriere, die sich zwischen den ihm bekannten Istzustand und dem angestrebten Ziel befindet“.

Fuchs bezieht sich wieder auf die Ist-Soll-Relation und sagt, ein Problem sei durch drei Bestandteile gekennzeichnet: „einen unerwünschten Anfangszustand, eine personenspezifische Barriere und einen erwünschten Zielzustand“ (Fuchs 2006, S. 72).

Auch er nimmt in einem erklärenden Text wieder Bezug auf den Unterschied zwischen einem Problem und einer Aufgabe: Man muss laut Fuchs „besonders auf die kognitiven

Strukturen dieses Individuums eingehen, um feststellen zu können, ob man von einem Problem sprechen kann“ (Fuchs 2006, S. 72).

Im Themenheft Problemlösen des Bundesinstituts für Bildungsforschung und Innovation (BIFIE) wird das Problem auf die mathematische Ebene gerückt und folgendermaßen definiert:

Wenn man, um eine bestehende Barriere zu überwinden, auf die bereits erlernten mathematischen Grundlagen zurückgreift und dieses zum Lösen des Beispiels neu ordnet und umstrukturiert, handelt es sich um eine Problemlöseaufgabe. Man handelt produktiv. Kann man jedoch die Lösung durch Abrufen eines bekannten Verfahrens finden, handelt es sich nicht um ein Problem, sondern um eine Routineaufgabe. Man arbeitet reproduktiv. Meistens kann man jedoch ein Beispiel nicht allgemein als Problemlöseaufgabe in einer Klasse stellen, da sich individuell ergibt, ob dieses Beispiel für einen Schüler oder eine Schülerin einen Problemlösecharakter aufweist. (BIFIE 2013, S. 5)

Es fällt auf, dass auch hier wieder die Unterscheidung Problem/Aufgabe ein Hauptmerkmal der Definition ist und dafür verwendet wird, den Begriff verständlich zu erklären.

Zusammenfassend kann man sagen, dass die Definitionen alle meinen, dass man „auf der Suche“ nach einer Lösung ist, dass die Lösung nicht offensichtlich ist und dass es einen energetischen/kognitiven oder kreativen Aufwand für den Problemlösenden bedeutet, vom Anfangs- zum Zielzustand zu gelangen. In allen Fällen geht es um eine Barriere zwischen Ist und Soll und um das produktive Denken. Der Problemlöser steht vor einem Anfangszustand, und dieser soll mittels Überwinden einer Barriere zum erwünschten Endzustand kommen. Damit dieser Endzustand erreicht wird, dürfen keine Lösungsalgorithmen angewendet werden.

Im Themenheft Mathematik „Problemlösen“ (BIFIE 2013) findet man deshalb wohl auch eine Gegenüberstellung von Problem- und Routineaufgaben (siehe Abb. 2.1).

Routineaufgabe	Problemaufgabe
<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Diese kann als bereits bekannte Aufgabe eines bestimmten Typs verstanden werden</li> <li>■ Es ist möglich, eine verfügbare Lösungsprozedur abzurufen, der Lösungsweg erscheint klar</li> <li>■ Ein rezeptartiges Abarbeiten einer bekannten Prozedur ist möglich. Die Aufgabe kann auch ohne tieferes Verständnis erfolgreich gelöst werden</li> <li>■ Die Aufgabe wirkt abgeschlossen, d. h., sie löst im Allgemeinen keine weiterführenden Denkprozesse aus</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Eine „Barriere“ zwischen Fragestellung und Zielzustand verhindert das „Entschlüsseln“ der Aufgabe</li> <li>■ Die Suche nach einem Lösungsweg ist erforderlich. Spezielle Einfälle und neuartige Verbindungen der vorhandenen Wissensbestände werden benötigt</li> <li>■ Zur Konstruktion eines Lösungswegs ist inhaltliches Denken unabdingbar. Ohne inhaltliches Verständnis ist kein Erfolg möglich</li> <li>■ Die Aufgabe wirkt im Allgemeinen offen sie provoziert meist zum Weiterdenken und Variieren</li> </ul>

**Abb. 2.1** Gegenüberstellung von Problem- und Routineaufgaben. (BIFIE 2013, S. 8)

Abschließend soll noch auf die Frage zum Verhältnis zwischen Denken und Problemlösen bzw. auf die Frage zum Verhältnis zwischen Entscheiden und Problemlösen eingegangen werden (vgl. dazu Funke 2003, S. 22–29).

Kurz gesagt:

Das Denken kann auch andere Schwerpunkte als das Lösen von Problemen haben (z. B. Urteilen), das Entscheiden beschäftigt sich mit Prozessen, die zu genau *einer* Entscheidung führen, wohingegen das Problemlösen sich mit einer Reihe von Entscheidungen beschäftigt (bei Simulationsspielen müssen ganze Serien von Entscheidungen getroffen werden), um die „Probleme“ zu lösen, d. h. das komplexe Zusammenspiel der einzelnen Faktoren optimal zu steuern.

---

## 2.2 Was bedeutet Problemlösekompetenz?

Eine einheitliche Definition von Problemlösekompetenzen existiert selbstverständlich nicht.

Untenstehend eine Zusammenstellung der Definitionen, die in der Literatur zu finden sind, zuerst allgemein und dann bezogen auf das Fach Mathematik (in diesem Feld finden sich die meisten Definitionen zum Begriff „Problemlösekompetenz“):

Hat eine Person gute Problemlösekompetenzen, so kann sie laut Tietze et al. (1982) mindestens eines der drei genannten Bestandteile eines Problems finden, wenn die beiden anderen teilweise oder ganz gegeben sind.

Hussy erklärt zwei Jahre später – passend zur Definition des Problembegriffs – den Begriff „Problemlösekompetenz“ mit dem „Bestreben, einen gegebenen Zustand (Ausgangs- oder Ist-Zustand) in einen anderen, gewünschten Zustand (Ziel- oder Soll-Zustand) zu überführen, wobei es gilt, eine Barriere zu überwinden, die sich zwischen Ausgangs- und Zielzustand befindet“ (Hussy 1984).

Someren et al. (1994) beschreiben die Problemlösekompetenz als Setzen eines zielorientierten kognitiven Prozesses, der Anstrengung und Aufmerksamkeit erfordert, weil die Lösung nicht in einem einzigen Schritt gefunden werden kann.

In Deutschland findet sich in den Bildungsstandards folgende Definition zum Begriff Problemlösekompetenz:

Schülerinnen und Schüler ...

- wenden ihre mathematischen Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten beim Lösen von problemhaltigen Aufgaben an,
- entwickeln und nutzen eigenständig Lösungsstrategien,
- erkennen, nutzen und übertragen Zusammenhänge auf ähnliche Sachverhalte (erbringen Transferleistungen),

- verstehen komplexe Problemstellungen aus der Realität, wo der Lösungsweg nicht offensichtlich ist,
- finden, ausgehend von gegebenen Informationen, trotz Barrieren eigenständig Wege zur Lösung und
- setzen sich aktiv und produktiv mit den Problemen auseinander und lösen diese mit ihren eigenen Möglichkeiten (Bildungsstandards für das Fach Mathematik im Primarbereich 2004).

Auch Bruder und Collet (2011) beziehen sich – ohne sie näher zu definieren – auf die Wichtigkeit dieser Kompetenz und nehmen Bezug auf die österreichischen Bildungsstandards:

In den österreichischen Bildungsstandards ist das Erlangen von Problemlösekompetenzen eine der zentralen Forderungen. Weil sich aber die Anforderungen in den verschiedenen Sparten stark unterscheiden, muss in der Schule die Grundlage, die zum Weiterlernen befähigt, gelegt werden. Die erworbenen Problemlösekompetenzen sollten im späteren Leben die Vermittlerrolle zwischen den erlernten Grundlagen und den Herausforderungen zum Weiterlernen darstellen. (Bruder und Collet 2011, S. 20)

Bruder (2006) gliedert die Kompetenz in das Verstehen des Problems, das Anwenden von Basiswissen, das Stellen von Fragen und das Ausprobieren und Experimentieren.

Schnabel und Trapp (2012) verstehen unter dem Begriff Problemlösekompetenz die Entwicklung und Anwendung einer Lösung für ein auftretendes oder gestelltes Problem (Schnabel und Trapp 2012).

Das Bundesinstitut für Bildungsforschung und Innovation (BIFIE) schreibt im Themenheft „Problemlösen“, dass Problemlösen bedeutet, einen Lösungsweg für ein unbekanntes Problem zu suchen.

Man muss Verbindungen der vorhandenen Wissensbestände bilden und spezielle Einfälle werden benötigt. Zur Findung dieser Lösungswege ist inhaltliches Denken erforderlich, sonst könne man keinen Erfolg verzeichnen. (BIFIE 2013, S. 8)

Das Bundesinstitut für Bildungsforschung und Innovation (BIFIE) schreibt dazu weiter, dass „Problemlösen ein wichtiger Bereich im Mathematikunterricht der Neuen Mittelschule [ist] und bereits in der Grundschule einer der vier geforderten allgemeinen mathematischen Kompetenzen [ist]“ (BIFIE 2013, S. 9).

Die OECD (2014) definiert die Problemlösekompetenz als „an individual’s capacity to engage in cognitive processing to understand and resolve problem situations where a method of solution is not immediately obvious. It includes the willingness to engage with such situations in order to achieve one’s potential as a constructive and reflective citizen“ und spricht damit drei Bereiche an:

1. die individuelle Kapazität, komplexe Problemstellungen aus der Realität zu verstehen und zu lösen, deren Lösungsweg nicht auf den ersten Blick offensichtlich ist,
2. ausgehend von gegebenen Informationen und Werkzeugen trotz Hindernissen Wege zur Lösung zu finden und
3. die Motivation, sich mit solchen Situationen auseinanderzusetzen und mit den eigenen Möglichkeiten zu lösen.

Dazu wird angemerkt: Der Kompetenzbegriff wird derzeit stark diskutiert. Diese Diskussion wird an dieser Stelle nicht wiedergegeben.

*Zusammenfassend* kann man sagen:

Problemlösekompetenz bedeutet, dass die Problemlöser einen Lösungsweg suchen und sich auf den Lösungsprozess einlassen müssen. Sie müssen bereits Gelerntes aktivieren und organisieren. Hierbei wird deutlich, dass beim systematischen Aufbau von Problemlösekompetenz das Lernen und Anwenden von heuristischen Regeln und das „Eigenständigen-Lernen“ im Vordergrund steht. Die Kompetenz, Probleme zu lösen, brauchen Kinder, Jugendliche und Erwachsene demnach immer dann, wenn Lösungen nicht naheliegend oder offensichtlich sind und deshalb strategisches Vorgehen zur Lösungsfindung notwendig ist. Die Kompetenz, Probleme zu lösen, zeigt sich darin, dass über geeignete Strategien zum Finden mathematischer Lösungsansätze und -wege verfügt und über diese Strategien reflektiert werden kann.

---

### 2.3 Gibt es verschiedene Problemtypen?

Es stellt sich im Zuge der Recherche und der Definitionen zum Problem immer wieder die Frage: „Sind alle Probleme gleich?“ Gibt es verschiedene Arten von Problemen? Ist ein Problem immer etwas „Mathematisches“, oder sind auch Alltagsprobleme mit dem Begriff Problem umrissen? Sucht man in der Literatur, findet man immer wieder Unterscheidungen, was den Problembezug betrifft.

McCarthy (1972) unterscheidet „well-defined problems“ (Beispiel: Räume alle Tassen vom Tisch!) und „ill-defined problems“ (Beispiel: Räume die Küche auf!).

Dörner (1976) nimmt eine Unterscheidung von Problemtypen vor, da bestimmte Heuristiken (s. später) und Strategien abhängig vom Problemtyp wahrscheinlicher zur Zielerreichung führen als andere. Er unterscheidet zwischen analytischen Problemen (Ist/Soll ist eindeutig festgelegt, und die Lösung ist durch eine Reihe von bekannten Operationen erreichbar), synthetischen Problemen (Ist/Soll ist eindeutig festgelegt, die Operationen sind aber nicht bekannt) und dialektischen Problemen (offene Problemdefinition: Ist oder Soll ist schlecht bzw. unvollständig definiert, die Operationen sind bekannt oder unbekannt).

Als Faustregel gilt, dass analytische Probleme vorwiegend in der Mathematik auftreten, synthetische Probleme bei Denksportaufgaben und dialektische in komplexen Situationen (z. B. Teamarbeit zur Bewältigung einer Ingenieursaufgabe; s. dazu Sell und Schimweg 2002).

Greeno (1978) unterscheidet *Transformationsprobleme* (Ausgangszustand und Zielzustand sind wohldefiniert), *Neuordnungsprobleme* (Elemente müssen in eine neue Abfolge gebracht werden) und *Induktionsprobleme* (eine allgemeine Struktur muss abgeleitet werden).

Arlin (1989) hat eine Taxonomie von vier Dimensionen vorgeschlagen: Problemtyp, Problemcharakteristik, Probleminhalt und Art der Informationsverarbeitung, und unterscheidet in der Dimension „Problemtyp“ *präsentierte vs. zu entdeckende Probleme*, *schlecht strukturierte vs. wohlstrukturierte Probleme*, *schlecht definierte vs. wohldefinierte Probleme*.

Die Begriffe dürften Sell und Schimweg von Sembill (1992) übernommen haben. Diese unterscheiden zwischen der *Interpolationsbarriere* (Anfangs- und Zielzustand sind bekannt und der Zielzustand sollte durch neue Kombination bereits erlernter Verfahren gefunden werden, z. B. beim Schachspiel, wenn eine Zugfolge gesucht wird, die die gegnerische Person matt setzt), der *Synthesebarriere* (Anfangs- und Zielzustand sind bekannt, die Mittel, die der Problemlöser kennt, sind aber nicht ausreichend, um das Problem zu lösen, weshalb er zur Lösung des Problems neue Verfahren entwerfen muss, z. B. der Auftrag, aus Blei Gold zu machen) und der *dialektischen Barriere* (der genaue Anfangs- oder Zielzustand ist nicht oder nur unvollständig bekannt, die Mittel zur Problemlösung sind aber bekannt. Zur Lösung des Problems sind das Überprüfen der Widersprüche und das Optimieren erforderlich, z. B. über die Verwendung eines großen Geldgewinns zu entscheiden; Sembill 1992).

Diese Barrieren werden in Abb. 2.2 dargestellt.

Arbinger (1997) unterscheidet *Problemlösen ohne Wissen* und *Problemlösen mit Wissen* und nennt Puzzles als Beispiel für ein Problem ohne Wissen (einfache Heuristiken führen zum Ziel).

Auch die OECD (2014) hat eine Definition von Problemtypen formuliert (s. Abb. 2.3), auf deren Basis z. B. die Fragen in der PISA-Studie (2003, 2006, 2009, 2012 und 2015) für den Bereich „Problemlösen“ formuliert sind. Es wird von der OECD zwischen *interaktiven* und *statischen Problemen* unterschieden (relevante Informationen, um das Problem zu lösen, finden sich in der Aufgabe, nicht die gesamte Information ist enthalten). Zudem wird der Kontext des Problems differenziert in „technology“ und „non-technology“ (Setting) sowie „personal“ und „social“ (Fokus).

**Abb. 2.2** Barrieren beim Problemlösen. (Spering 2003, S. 18)

Klarheit der Zielkriterien \ Bekanntheit der Mittel	hoch	gering
	hoch	Interpolationsbarriere
gering	Synthesebarriere	Dialektische und Synthesebarriere



Main features of the PISA problem-solving framework	
<b>NATURE OF THE PROBLEM SITUATION</b> Is all the information needed to solve the problem disclosed at the outset?	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <i>Interactive</i>: not all information is disclosed; some information has to be uncovered by exploring the problem situation</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <i>Static</i>: all relevant information for solving the problem is disclosed at the outset</li> </ul>
<b>PROBLEM-SOLVING PROCESS</b> What are the main cognitive processes involved in the particular task?	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <i>Exploring and understanding</i> the information provided with the problem</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <i>Representing and formulating</i>: constructing graphical, tabular, symbolic or verbal representations of the problem situation and formulating hypotheses about the relevant factors and relationships between them</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <i>Planning and executing</i>: devising a plan by setting goals and sub-goals, and executing the sequential steps identified in the plan</li> </ul>
<b>PROBLEM CONTEXT</b> In what everyday scenario is the problem embedded?	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <i>Setting</i>: does the scenario involve a technological device?               <ul style="list-style-type: none"> <li>– <i>Technology</i> (involves a technological device)</li> <li>– <i>Non-technology</i></li> </ul> </li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <i>Focus</i>: what environment does the problem relate to?               <ul style="list-style-type: none"> <li>– <i>Personal</i> (the student, family or close peers)</li> <li>– <i>Social</i> (the community or society in general)</li> </ul> </li> </ul>

**Abb. 2.3** Problemlösen bei PISA. (Entnommen aus OECD 2014)

**Abb. 2.4** Analytisches Problem. (Quelle: eigenes Foto)



Nachfolgend sollen – auf der Basis der oben angeführten Barrieren von Dörner – für jeden Problemtyp zwei Beispiele angeführt werden.

### 2.3.1 Analytische Probleme

Ein analytisches Problem findet sich z. B. im Spiel RushHour (s. Abb. 2.4), bei dem ein rotes Auto aus einem Parkplatz an einer bestimmten Stelle ausgeparkt werden muss (das Auto muss ungehindert nach rechts fahren können, bis zu der Stelle, an der das Spielbrett endet). Andere Autos und Lastwagen bilden dabei Hindernisse und müssen verschoben

werden, um dem roten Auto die Möglichkeit zu geben, den Parkplatz zu verlassen. Ist- und Soll-Zustand sind hier eindeutig vorgegeben, die Mittel dazu sind ebenfalls klar (Ist: Stellung auf dem Parkplatz, Soll: rotes Auto muss den Parkplatz an der vorgegebenen Stelle verlassen, Mittel: andere Autos können nach vorne und hinten geschoben werden, um den Weg freizugeben; dieses Spiel ist in Abschn. 11.2.6.4 genau beschrieben).

Ein anderes analytisches Problem ist z. B. die Aufgabe:

Alfred ist 24 Jahre alt. Er ist doppelt so alt, wie Bruno war, als Alfred so alt war, wie Bruno jetzt ist. Wie alt ist Bruno?

Hier reicht eine einfache Gleichung nicht aus, es müssen mehrere Gleichungen miteinander kombiniert und dann der Lösungsweg erschlossen werden (s. Abb. 2.5).

### 2.3.2 Synthetische Probleme

Ein synthetisches Problem ist z. B. das Indiana-Jones-Problem:

Vier Forscher werden von einem Menschenfresser verfolgt und müssen, um zu entkommen, im Dunklen binnen 60 Minuten über eine Brücke laufen. Die Brücke trägt nur zwei Personen, und das Forscherteam hat nur eine Taschenlampe. Ein Forscher braucht, um den Weg zurückzulegen, 25 Minuten, ein anderer 20 Minuten, ein Forscher benötigt 10 Minuten und der schnellste Forscher benötigt für den Weg 5 Minuten.

Es wird die Frage gestellt, ob die Forscher es schaffen können, dem Menschenfresser zu entkommen, und, wenn ja, wie sie das bewerkstelligen können. Hier sind Ist- und Sollzustand klar (Ist: vier Forscher sollen über eine Brücke, Soll: sie sollen in 60 Minuten die Brücke überquert haben), der Weg zur Lösung ist aber offen, wenngleich hier das Ausprobieren (systematisches Probieren) wohl die naheliegende Lösungsstrategie ist.

Ein anderes synthetisches Problem findet sich beispielsweise im Brettspiel „Big Band“. Es soll eine möglichst große Band zusammengestellt werden, wobei aus jeder

**Abb. 2.5** Lösung des Alfred-Bruno-Problems.  
(Quelle: eigenes Foto)

$$\begin{array}{rcl}
 a = 24 & \xrightarrow{\quad\quad} & a' = b \\
 \downarrow & \swarrow \quad \searrow & \\
 & & a - a' = b - b' \\
 \\
 2b' = a & & 24 - b = b - 12 \\
 2b' = 24 & & 36 = 2b \\
 b' = 12 & & 18 = b \\
 & & b = 18
 \end{array}$$

Musikerguppe zumindest ein Musiker vertreten sein soll. Jeder Musiker hat einen Wert und stellt Bedingungen, wie z. B.: „Ich spiele nur im Oktett“ oder „Ich spiele nicht mit anderen Posaunen.“ In der zusammengestellten Band müssen alle Bedingungen der Musiker in der vom Spieler zusammengestellten Band erfüllt sein mit der Nebenbedingung, dass von jeder Gruppe (Bläser, Schlagwerk, Rhythmusgruppe ...) zumindest ein Musiker vertreten ist, und mit dem Ziel, einen maximalen Punktwert zu generieren. Aalle Spieler versuchen, eine Band zusammenzustellen, bei der alle Wünsche der Musiker erfüllt sind und jede Gruppe zumindest einen Vertreter hat. Wer die Band mit dem höchsten Punktwert hat, gewinnt.

Hier sind Ist-Zustand und Soll-Zustand klar (Ist: vorhandene Musiker, Soll: Band, besetzt mit Musikern in der Art, dass alle Bedingungen erfüllt sind und dass von jeder Gruppe zumindest ein Musiker in der Band spielt mit möglichst hohem Punkte-Output). Wie der Soll-Zustand erreicht werden kann, bleibt dem Spieler offen.

### 2.3.3 Dialektische Probleme

Ein dialektisches Problem ist beispielsweise:

*Auf einer geraden Fläche stehen hintereinander fünf Stühle. Frau Fünf setzt sich auf den hintersten Stuhl, Frau Vier davor, dann Frau Drei, Frau Zwei und Frau Eins. Otto sagt: „Ich habe hier acht Mützen, vier sind rot, zwei grün und zwei weiß. Jede der Damen bekommt eine Mütze aufgesetzt, die drei restlichen Mützen werden versteckt.“ Keine der Damen sieht die eigene Mütze. Unter welchen Bedingungen kann welche Frau die Farbe ihrer Mütze richtig nennen?* (entnommen aus Sell und Schimweg 2002).

Hier ist die Fragestellung sehr offen formuliert, und es gibt die verschiedensten Herangehensweisen an das Problem. Nur der Ist-Zustand ist wirklich klar, der Soll-Zustand ist nicht eindeutig, und auch die Mittel zur Lösung bleiben dem Problemlöser völlig offen.

Ein anderes dialektisches Problem findet sich bei den einzelnen Aufgaben in den Exitspielen:

Der Spieler bekommt eine Information, weiß aber nicht, we diese zu verwerten ist und was das Ziel oder der Output sein wird. Der Spieler findet z. B. eine Karte mit dem Hinweis  $X_2$  – *das Falsche – Schiff* und muss herausfinden, was es mit den Zeichen und Begriffen auf sich hat.

*Zusammenfassend* ist zu sagen, dass es verschiedene Problemtypen gibt, die von verschiedenen Forschern expliziert und beschrieben wurden. Wie weiter vorne schon erwähnt, ist es – je nach Problemtyp – nötig, dass zum einen verschiedene heuristische Prinzipien (s. unten in diesem Kapitel unter Abschn. 2.5) und zum anderen geeignete Hilfsmittel angewendet werden. Während des Problemlöseprozesses sollen die Problemlösenden auf bereits Bekanntes (Operationen, Begriffe und Denkmodelle) zurückgreifen, dieses im Sinne eines erfolgversprechenden Lösungsansatzes vernetzen und auf diese Weise im Finden der Lösung eigenständig neues Wissen inhaltlicher sowie strategisch-heuristischer Art erzeugen.