

Lexikon der Mathematik Band 2

Eig bis Inn



Springer Spektrum

Lexikon der Mathematik: Band 2

Guido Walz
(Hrsg.)

Lexikon der Mathematik: Band 2

Eig bis Inn

2. Auflage

 Springer Spektrum

Herausgeber
Guido Walz
Mannheim, Deutschland

ISBN 978-3-662-53503-5 ISBN 978-3-662-53504-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-53504-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

1. Aufl.: © Spektrum Akademischer Verlag GmbH Heidelberg 2001

2. Aufl.: © Springer-Verlag GmbH Deutschland 2017

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Planung: Iris Ruhmann

Redaktion: Prof. Dr. Guido Walz

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature

Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Germany

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Autorinnen und Autoren im 2. Band des *Lexikon der Mathematik*

Prof. Dr. Sir Micheal Atiyah, Edinburgh
Prof. Dr. Hans-Jochen Bartels, Mannheim
PD Dr. Martin Bordemann, Freiburg
Dr. Andrea Breard, Paris
Prof. Dr. Martin Brokate, München
Prof. Dr. Rainer Brück, Gießen
Prof. Dr. H. Scott McDonald Coxeter, Toronto
Dipl.-Ing. Hans-Gert Dänel, Pesterwitz
Dr. Ulrich Dirks, Berlin
Dr. Jörg Eisfeld, Gießen
Prof. Dr. Dieter H. Erle, Dortmund
Prof. Dr. Heike Faßbender, München
Dr. Andreas Filler, Berlin
Prof. Dr. Robert Fittler, Berlin
Prof. Dr. Joachim von zur Gathen, Paderborn
PD Dr. Ernst-Günter Giessmann, Berlin
Dr. Hubert Gollek, Berlin
Prof. Dr. Barbara Grabowski, Saarbrücken
Prof. Dr. Andreas Griewank, Dresden
Dipl.-Math. Heiko Großmann, Münster
Prof. Dr. Wolfgang Hackbusch, Kiel
Prof. Dr. K. P. Haderler, Tübingen
Prof. Dr. Adalbert Hatvany, Kuchen
Dr. Christiane Helling, Berlin
Prof. Dr. Dieter Hoffmann, Konstanz
Prof. Dr. Heinz Holling, Münster
Hans-Joachim Ilgands, Leipzig
Dipl.-Math. Andreas Janßen, Stuttgart
Dipl.-Phys. Sabina Jeschke, Berlin
Prof. Dr. Hubertus Jongen, Aachen
Dr. Gerald Kager, Berlin
Prof. Dr. Josef Kallrath, Ludwigshafen/Rh.
Dr. Uwe Kasper, Berlin
Dipl.-Phys. Akiko Kato, Berlin
Dr. Claudia Knütel, Hamburg
Dipl.-Phys. Rüdiger Köhler, Berlin
Dipl.-Phys. Roland Kunert, Berlin
Prof. Dr. Herbert Kurke, Berlin
AOR Lutz Küsters, Mannheim
PD Dr. Franz Lemmermeyer, Heidelberg
Prof. Dr. Burkhard Lenze, Dortmund
Uwe May, Ückermünde
Prof. Dr. Günter Mayer, Rostock
Prof. Dr. Klaus Meer, Odense (Dänemark)
Dipl.-Math. Stefan Mehl, Lorsch
Prof. Dr. Günter Meinardus, Neustadt/Wstr.
Prof. Dr. Paul Molitor, Halle
Dipl.-Inf. Ines Peters, Berlin
Dr. Klaus Peters, Berlin
Prof. Dr. Gerhard Pfister, Kaiserslautern
Dipl.-Math. Peter Philip, Berlin
Prof. Dr. Hans Jürgen Prömel, Berlin
Dr. Dieter Rautenbach, Aachen
Dipl.-Math. Thomas Richter, Berlin
Prof. Dr. Thomas Rießinger, Frankfurt

Prof. Dr. Heinrich Rommelfanger, Frankfurt
Prof. Dr. Robert Schaback, Göttingen
Dipl.-Phys. Mike Scherfner, Berlin
PD Dr. Martin Schlichenmaier, Mannheim
Dr. Karl-Heinz Schlote, Altenburg
Dr. Christian Schmidt, Berlin
PD Dr.habil. Hans-Jürgen Schmidt, Potsdam
Dr. Karsten Schmidt, Berlin
Prof. Dr. Uwe Schöning, Ulm
Dr. Günter Schumacher, Karlsruhe
PD Dr. Günter Schwarz, München
Dipl.-Math. Markus Sigg, Freiburg
Dipl.-Phys. Grischa Stegemann, Berlin
Prof. Dr. Lutz Volkmann, Aachen
Dr. Johannes Wallner, Wien
Prof. Dr. Guido Walz, Mannheim
Prof. Dr. Ingo Wegener, Dortmund
Prof. Dr. Ilona Weinreich, Remagen
Prof. Dr. Dirk Werner, Galway (Irland) / Berlin
PD Dr. Günther Wirsching, Eichstätt
Prof. Dr. Jürgen Wolff v. Gudenberg, Würzburg
Prof. Dr. Helmut Wolter, Berlin
Dr. Frank Zeilfelder, Mannheim
Dipl.-Phys. Erhard Zorn, Berlin

Hinweise für die Benutzer

Gemäß der Tradition aller Großlexika ist auch das vorliegende Werk streng alphabetisch sortiert. Die Art der Alphabetisierung entspricht den gewohnten Standards, auf folgende Besonderheiten sei aber noch explizit hingewiesen: Umlaute werden zu ihren Stammlauten sortiert, so steht also das „ä“ in der Reihe des „a“ (nicht aber das „ae“!); entsprechend findet man „ß“ bei „ss“. Griechische Buchstaben und Sonderzeichen werden entsprechend ihrer deutschen Transkription einsortiert. So findet man beispielsweise das α unter „alpha“. Ein Freizeichen („Blank“) wird *nicht* überlesen, sondern gilt als „Wortende“: So steht also beispielsweise „a priori“ *vor* „Abakus“. Im Gegensatz dazu werden Sonderzeichen innerhalb der Worte, insbesondere der Bindestrich, „überlesen“, also bei der Alphabetisierung behandelt, als wären sie nicht vorhanden. Schließlich ist noch zu erwähnen, daß Exponenten ebenso wie Indizes bei der Alphabetisierung ignoriert werden.

Eigenfunktion, Lösung eines Eigenwertproblems in einem Funktionenraum.

Ist allgemein V ein Vektorraum über einem Körper K und $T : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung, so besteht das Eigenwertproblem darin, Lösungen $\lambda \in K$ und $x \in V$ der Gleichung $T(x) - \lambda x = 0$ zu finden. Der Vektor x heißt dann im allgemeinen Eigenvektor und der Skalar λ heißt Eigenwert von T . Ist nun V ein Funktionenraum über \mathbb{R} oder \mathbb{C} , so spricht man nicht mehr von Eigenvektoren, sondern von Eigenfunktionen der Abbildung T . Man vergleiche hierzu auch \nearrow Eigenwert eines Operators.

Ein wichtiges Gebiet, in dem Eigenfunktionen von Bedeutung sind, sind die Eigenwertprobleme bei Differentialgleichungen. Darunter versteht man Randwertprobleme, bei denen ein Eigenwertparameter λ auftritt. Die Lösungen des Randwertproblems bei gegebenem Parameter λ heißen dann die Eigenfunktionen des Problems. Ist andererseits eine Integralgleichung der Form

$$y(x) = \lambda \cdot \int_a^b K(x, t)y(t)dt$$

gegeben, so heißen die Zahlen λ , für die es von der Nullfunktion verschiedene Lösungen y der Gleichung gibt, Eigenwerte der Gleichung, während die Lösungen selbst die Eigenfunktionen der Gleichung genannt werden.

Eigenkreisfrequenz, Frequenz einer harmonischen Schwingung.

Wird ein Massenpunkt in eine harmonische Schwingung versetzt, so kann man die Auslenkung des Massenpunktes zum Zeitpunkt t beschreiben durch die Funktion $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$. Dabei ist A die \nearrow Amplitude der Schwingung, ω heißt die Kreisfrequenz der Schwingung und ϕ die Phase der Schwingung. Der Wert $\frac{\omega}{2\pi}$ wird dann als Eigenkreisfrequenz bezeichnet.

Eigenpaar, selten gebrauchte Bezeichnung für einen Eigenwert und zugehörigen Eigenvektor einer Matrix.

Eigenraum, \nearrow Eigenwert.

Eigenraum eines Operators, \nearrow Eigenwert eines Operators.

Eigenschaft einer Menge, in der \nearrow axiomatischen Mengenlehre identisch mit einer mengentheoretischen Formel, d. h., jede mengentheoretische Formel stellt eine Eigenschaft einer Menge dar.

Eigenystem, Menge aller \nearrow Eigenwerte zu einem gegebenen Endomorphismus bzw. einer gegebenen Matrix.

eigentlich diskontinuierliche Gruppe, Gruppe G von gebrochen linearen Transformationen

$$f_v = \frac{a_v z + b_v}{c_v z + d_v}$$

$v \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$, für die gilt: Es gibt ein $z_0 \in \mathbb{C}$ und eine Umgebung $U(z_0)$ von z_0 so, daß jede von der Identität verschiedene Transformation aus G alle Punkte von $U(z_0)$ auf Punkte außerhalb von $U(z_0)$ abbildet.

eigentlich orthogonal, Bezeichnung für eine orthogonale Abbildung oder Matrix, deren Determinante den Wert $+1$ hat.

eigentliche Ähnlichkeitsabbildung, eine \nearrow Ähnlichkeitsabbildung, deren Streckungsfaktor λ ungleich eins ist.

eigentliche Divergenz, \nearrow bestimmte Divergenz einer Folge, \nearrow bestimmte Divergenz einer Reihe.

eigentliche Gruppenoperation, Operation der Gruppe G auf der Varietät X so, daß die kanonische Abbildung

$$G \times X \rightarrow X \times X, (g, x) \mapsto (g(x), x)$$

eigentlich ist.

eigentliche holomorphe Abbildung, wichtiger Begriff in der Theorie der Überlagerungen.

Ein lokalkompakter Raum ist ein Hausdorffraum, in dem jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt. Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen zwei lokalkompakten Räumen heißt eigentlich, wenn das Urbild jeder kompakten Menge kompakt ist. Dies ist z. B. stets erfüllt, wenn X kompakt ist. Eine eigentliche Abbildung ist abgeschlossen, d. h. das Bild jeder abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen. Dies folgt daraus, daß in einem lokalkompakten Raum eine Teilmenge genau dann abgeschlossen ist, wenn ihr Durchschnitt mit jeder kompakten Menge kompakt ist.

Wir nennen im folgenden einige zentrale Sätze über eigentliche holomorphe Abbildungen.

Satz 1:

Es seien X und Y lokalkompakte Räume und $p : Y \rightarrow X$ eine eigentliche Überlagerungsabbildung. Dann gilt:

- a) Für jeden Punkt $x \in X$ ist die Menge $p^{-1}(x)$ endlich.
- b) Sei $x \in X$ und V eine Umgebung von $p^{-1}(x)$. Dann existiert eine Umgebung U von x mit $p^{-1}(U) \subset V$.
- c) Sei X zusammenhängend und Y nicht leer. Dann ist p surjektiv.

Satz 2:

Es seien X und Y lokalkompakte Räume und $p : Y \rightarrow X$ eine eigentliche, unverzweigte Überlagerungsabbildung.

Dann ist p eine unbegrenzte Überlagerung.

Seien X und Y Riemannsche Flächen und $f : X \rightarrow Y$ eine eigentliche nicht konstante holomorphe Abbildung. Wegen der lokalen Gestalt holomorpher Abbildungen ist die Menge A der Verzweigungspunkte von f abgeschlossen und diskret. Da

f eigentlich ist, ist auch $B := f(A)$ abgeschlossen und diskret. Man nennt B die Menge der kritischen Werte von f .

Sei $Y' := Y \setminus B$ und

$$X' := X \setminus f^{-1}(B) \subset X \setminus A.$$

Dann ist $f|X' \rightarrow Y'$ eine eigentliche unverzweigte holomorphe Überlagerung, besitzt also eine wohlbestimmte endliche Blätterzahl n (die Mächtigkeit von $f^{-1}(c)$, $c \in Y'$). Das bedeutet, daß jeder Wert $c \in Y'$ genau n -mal angenommen wird.

Um diese Aussage auch auf die kritischen Werte $b \in B$ ausdehnen zu können, müssen wir die Vielfachheit mit berücksichtigen. Für $x \in X$ bezeichnen wir mit $v(f, x)$ die Vielfachheit, mit der f im Punkt x den Wert $f(x)$ annimmt. Wir sagen, daß f auf X den Wert $c \in Y$ mit Vielfachheit gerechnet m -mal annimmt, falls

$$m = \sum_{x \in f^{-1}(c)} v(f, x).$$

Man kann nun folgenden Satz 3 formulieren:

Es seien X und Y Riemannsche Flächen und $f: X \rightarrow Y$ eine eigentliche, nicht-konstante holomorphe Abbildung. Dann gibt es eine natürliche Zahl n so, daß f jeden Wert $c \in Y$ mit Vielfachheit gerechnet n -mal annimmt.

Korollare hieraus sind:

Auf einer kompakten Riemannschen Fläche X hat jede nicht-konstante meromorphe Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{P}_1$ ebenso viele Nullstellen wie Pole (mit Vielfachheit gerechnet).

Dies folgt daraus, daß $f: X \rightarrow \mathbb{P}_1$ eine eigentliche Abbildung ist, sowie:

Ein Polynom n -ten Grades $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{C}[z]$ hat mit Vielfachheit gerechnet genau n Nullstellen.

Man vergleiche auch das eng verwandte Stichwort \mathcal{A} eigentliche meromorphe Abbildung.

[1] Forster, O.: Riemannsche Flächen. Springer-Verlag Berlin/Heidelberg, 1977.

eigentliche Lösung einer Differentialgleichung, nichttriviale Lösung einer Differentialgleichung, also eine solche Lösung y , die nicht $y(x) = 0$ für alle x im Definitionsbereich von y erfüllt.

eigentliche meromorphe Abbildung, eine \mathcal{A} meromorphe Funktion $f: G_1 \rightarrow G_2$ (wobei $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ \mathcal{A} Gebiete sind) mit folgender Eigenschaft: Es existiert eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ derart, daß jedes $a \in G_2$ genau k Urbilder in G_1 hat, wobei die Vielfachheit zu berücksichtigen ist. Genauer bedeutet dies: Zu jedem $a \in G_2$ gibt es $\ell \leq k$ verschiedene Punkte $z_1, \dots, z_\ell \in G_1$ mit $f(z_j) = a$ für $j = 1, \dots, \ell$ und

$$v(f, z_1) + \dots + v(f, z_\ell) = k,$$

wobei $v(f, z_j)$ die Vielfachheit der \mathcal{A} -Stelle z_j bezeichnet. Im Fall $a = \infty$ ist $v(f, z_j)$ durch die \mathcal{A} -Polstellenordnung von z_j zu ersetzen. Die Zahl k heißt der Abbildungsgrad von f und wird mit $k = \text{deg} f$ bezeichnet. Man schreibt auch $f: G_1 \xrightarrow{k:1} G_2$. Eine eigentliche meromorphe Abbildung $f: G_1 \rightarrow G_2$ ist also insbesondere surjektiv.

Einige Beispiele:

Es sei

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}$$

eine rationale Funktion mit teilerfremden Polynomen P, Q und $a_n \neq 0, b_m \neq 0$. Dann ist R eine eigentliche holomorphe Abbildung von $\widehat{\mathbb{C}}$ auf $\widehat{\mathbb{C}}$ vom Grad $k = \text{deg} R = \max\{m, n\}$. Dabei setzt man $R(z_0) := \infty$, falls $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Polstelle von R ist, $R(\infty) := \infty$, falls $n > m$, $R(\infty) := 0$, falls $n < m$ und $R(\infty) := a_n/b_n$, falls $n = m$.

Eine \mathcal{A} konforme Abbildung von G_1 auf G_2 ist eine eigentliche Abbildung vom Grad Eins.

Eine eigentliche Abbildung $f: G_1 \rightarrow G_2$ heißt unverzweigt, falls f keine \mathcal{A} kritischen Punkte in G_1 besitzt, andernfalls heißt sie verzweigt.

Zur äquivalenten Umformulierung des Begriffs der eigentlichen Abbildung führt man folgende Redewendung ein. Eine meromorphe Funktion $f: G_1 \rightarrow G_2$ bildet Randfolgen in Randfolgen ab, falls für jede Folge (z_n) in G_1 mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \zeta$ für ein $\zeta \in \partial G_1$ die Bildfolge $(f(z_n))$ alle ihre Häufungspunkte auf ∂G_2 hat. Man beachte dabei, daß die Folge $(f(z_n))$ nicht konvergent sein muß. Dann sind folgende Eigenschaften für eine meromorphe Funktion $f: G_1 \rightarrow G_2$ äquivalent:

- (a) f ist eine eigentliche Abbildung.
- (b) f bildet Randfolgen in Randfolgen ab.
- (c) Das Urbild $f^{-1}(K)$ jeder kompakten Menge $K \subset G_2$ ist kompakt in G_1 .

Man vergleiche auch das eng verwandte Stichwort \mathcal{A} eigentliche holomorphe Abbildung.

eigentliche Riemannsche Geometrie, die Theorie der \mathcal{A} Riemannsche Mannigfaltigkeiten, deren metrischer Fundamentaltensor positiv definit ist.

Der Sprachgebrauch ist nicht einheitlich. Oft setzt man voraus, daß Riemannsche Mannigfaltigkeiten von vornherein einen positiv definiten metrischen Tensor haben und nennt die übrigen pseudoriemannsch.

Aus dem metrischen Fundamentaltensor werden geometrische Grundgrößen abgeleitet, wie die Bogenlänge, der Winkel zwischen zwei Kurven, das Volumen eines Gebietes, die Krümmung, die durch den Riemannschen Krümmungstensor ausgedrückt wird, und schließlich die Parallelübertragung von Vektoren längs Kurven und der Begriff der geodätischen Linie.

Es gibt viele Gemeinsamkeiten zwischen Riemannscher Geometrie und pseudoriemannscher.

Der gravierendste Unterschied besteht darin, daß in pseudoriemannschen Mannigfaltigkeiten geometrische Begriffe, die aus der Bogenlänge und der inneren Metrik abzuleiten sind, nicht mehr in gewohnter Weise definiert werden können. Beispielsweise würde die übliche Definition des Winkels zwischen zwei Kurven verlangen, daß die Längen der Tangentialvektoren der Kurven nicht Null sind.

eigentlicher Morphismus, ein Morphismus $X \xrightarrow{\pi} Y$ von Schemata so, daß X algebraisches Y -Schema ist und für jeden Morphismus $Y' \rightarrow Y$ der induzierte Morphismus

$$X \times_Y Y' = X' \xrightarrow{\pi'} Y'$$

abgeschlossen ist (d. h., daß abgeschlossene Teilmengen $V' \subset X'$ stets wieder abgeschlossene Bilder haben).

Beispielsweise sind projektive Morphismen über einem Noetherschen Schema eigentlich.

eigentlicher Reinhardtischer Körper, \nearrow Reinhardtisches Gebiet.

Eigenvektor, \nearrow Eigenwert.

Eigenvektor eines Operators, \nearrow Eigenwert eines Operators.

Eigenvektoren als Basisvektoren, Eigenschaft eines diagonalisierbaren Endomorphismus. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper \mathbb{K} und $f : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Dann ist f genau dann diagonalisierbar, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren von f besitzt.

Eigenwert, einer der grundlegendsten und zentralen Begriffe innerhalb der Linearen Algebra, wobei man hier in stillschweigender Übereinkunft den Begriff „Eigenwert“ als Synonym für „Eigenwert eines Endomorphismus bzw. einer Matrix“ benutzt.

Als Eigenwert bezeichnet man einen Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$, für den bezüglich eines Endomorphismus f auf einem \nearrow Vektorraum V über dem Körper \mathbb{K} gilt: Es existiert ein von Null verschiedener Vektor $v \in V$, so daß

$$f(v) = \lambda v.$$

Jeder derartige Vektor heißt Eigenvektor von f zum Eigenwert λ .

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Die Menge aller Eigenvektoren eines Vektorraumes zu einem Eigenwert λ ergänzt um den Nullvektor wird als Eigenraum von λ bezeichnet; die Eigenräume sind stets Untervektorräume von V . Wird der Endomorphismus f bezüglich einer Basis von V durch die Matrix A repräsentiert, so spricht man

auch von Eigenwert, Eigenvektor und Eigenraum von A . Es gilt in diesem Fall also die Beziehung

$$Av = \lambda v.$$

Ist V endlich-dimensional, so sind die Eigenwerte von f gerade die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von f sowie des Minimalpolynoms von f , wobei im letzteren Falle die Vielfachheiten nicht übereinstimmen müssen.

Die Eigenräume sind Lösungsräume der homogenen linearen Gleichungssysteme

$$(A - \lambda I)x = 0,$$

wobei A eine den Endomorphismus f repräsentierende Matrix darstellt (I bezeichnet die Einheitsmatrix).

Die Dimension des Eigenraumes zum Eigenwert λ des Endomorphismus f bzw. der repräsentierenden Matrix A auf dem n -dimensionalen Vektorraum V ist gleich

$$n - \text{Rg}(A - \lambda I).$$

Ein Endomorphismus f auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V kann genau dann durch eine Diagonalmatrix repräsentiert werden, falls V eine Basis aus Eigenvektoren zu f besitzt.

Eine $(n \times n)$ -Matrix A ist genau dann zu einer Diagonalmatrix ähnlich, wenn A n linear unabhängige Eigenvektoren besitzt.

Für weitere Information im Zusammenhang mit Eigenwerten vergleiche man auch das Stichwort \nearrow Eigenwertgleichung.

Die Bezeichnung „Eigen“ ist auch im angloamerikanischen Sprachraum üblich, wo man beispielsweise vom „Eigenvalue“ und „Eigenvector“ spricht.

[1] Fischer, G.: Lineare Algebra. Verlag Vieweg Braunschweig, 1978.

[2] Koecher, M.: Lineare Algebra und Analytische Geometrie. Springer-Verlag Berlin/Heidelberg, 1992.

Eigenwert einer Integralgleichung, eine Zahl λ , für die die Integralgleichung

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) \cdot y(t) dt$$

von Null verschiedene Lösungen besitzt. Hierbei ist $K(x, t)$ eine vorgegebene Kernfunktion, daher bezeichnet man die Lösungen λ der obigen Gleichung manchmal auch als Eigenwerte des Kerns K .

Eigenwert eines Graphen, Bezeichnung für einen Eigenwert der Adjazenzmatrix eines Graphen (\nearrow Eigenwert).

Es sei G ein \nearrow Graph und $A_G = ((a_{ij}))$ seine Adjazenzmatrix. Ist der Graph G von der Ordnung n , so ist $A_G = ((a_{ij}))$ eine symmetrische

$(n \times n)$ -Matrix, deren Hauptdiagonalelemente a_{ii} sämtlich Null sind. Das charakteristische Polynom $P_G(x) = \det(A_G - xI)$ der Matrix A_G , wobei I die $(n \times n)$ -Einheitsmatrix bedeutet, wird auch charakteristisches Polynom von G genannt, und seine Nullstellen heißen Eigenwerte von G .

Als reelle symmetrische Matrix besitzt A_G nur reelle Eigenwerte, die in der Form

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$$

angeordnet seien. Diese Folge der Eigenwerte wird auch das Spektrum von G genannt.

Natürlich ist das Spektrum eines Graphen unabhängig von der Numerierung seiner Ecken, und isomorphe Graphen haben die gleichen Eigenwerte. Beispielsweise besitzt der vollständige Graph K_n das Spektrum $\lambda_1 = n - 1$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = -1$, und der vollständige \mathcal{A} bipartite Graph $K_{r,s}$ das Spektrum $\lambda_1 = \sqrt{rs}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_{r+s-1} = 0$ und $\lambda_{r+s} = -\sqrt{rs}$.

Wäre die Struktur eines Graphen eindeutig durch sein Spektrum bestimmt, so könnte man das bekannte Graphenisomorphieproblem dadurch lösen, daß man die Eigenwerte der entsprechenden Graphen berechnet. Daß diese Methode im allgemeinen jedoch nicht zum Ziel führt, zeigen schon die nicht isomorphen Graphen $K_{1,4}$ und $K_1 \cup C_4$, die beide das Spektrum $2, 0, 0, 0, -2$ besitzen, wobei C_4 der Kreis der Länge 4 ist.

Darüberhinaus gibt es auch nicht isomorphe \mathcal{A} zusammenhängende Graphen mit gleichem Spektrum, und mit Hilfe einer Konstruktion von A.J. Hoffman (1972) erhält man sogar das folgende Ergebnis.

Zu jeder natürlichen Zahl m existiert eine Zahl N , so daß für alle ganzen Zahlen $n \geq N$ mindestens m nicht isomorphe reguläre und zusammenhängende Graphen der Ordnung n mit dem gleichen Spektrum existieren.

Sind G_1, G_2, \dots, G_η die Zusammenhangskomponenten eines Graphen G , so liefert der Determinantenmultiplikationsatz die Identität

$$P_G(x) = P_{G_1}(x)P_{G_2}(x) \dots P_{G_\eta}(x).$$

Folglich erhält man das Spektrum eines Graphen aus den Spektren seiner Zusammenhangskomponenten. Aus der Tatsache, daß die Summe der Eigenwerte (mit Vielfachheit) einer $(n \times n)$ -Matrix $((a_{ij}))$ mit deren Spur, also mit $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$, übereinstimmt, ergibt sich für das Spektrum von G unmittelbar die Aussage

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0.$$

Ist G ein zusammenhängender Graph der Ordnung n vom Maximalgrad $\Delta(G)$, so beweist man die meisten der folgenden Eigenschaften mit Hilfe

von klassischen Resultaten, die O. Perron 1907 und G. Frobenius 1912 zur allgemeinen Matrizen-theorie entwickelt haben.

- (i) Für jeden Eigenwert λ von G gilt $|\lambda| \leq \Delta(G)$.
- (ii) Der Graph G besitzt genau dann den Eigenwert $\Delta(G)$, wenn G regulär ist.
- (iii) Ist $-\Delta(G)$ ein Eigenwert von G , so ist G ein regulärer und bipartiter Graph.
- (iv) Ist G bipartit mit dem Eigenwert λ , so ist auch $-\lambda$ ein Eigenwert von G .

Im Jahre 1967 hat H.S. Wilf einen interessanten Zusammenhang zwischen den Eigenwerten eines Graphen G und seiner \mathcal{A} chromatischen Zahl $\chi(G)$ herausgefunden.

Es sei G ein zusammenhängender Graph und λ_1 sein größter Eigenwert. Dann gilt

$$\chi(G) \leq 1 + \lambda_1,$$

und die obere Schranke wird in dieser Abschätzung genau dann erreicht, wenn G der vollständige Graph oder ein Kreis ungerader Länge ist.

Wegen (i) verallgemeinert dieser Satz von Wilf den bekannten Satz von Brooks $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$, wobei genau dann die Gleichheit gilt, wenn G der vollständige Graph oder ein Kreis ungerader Länge ist.

Vertiefte Informationen zur Theorie der Eigenwerte von Graphen findet man beispielsweise in der Monographie [1].

[1] Cvetković, D.M.; Doob, M.; Sachs, H.: Spectra of Graphs. Johann Ambrosius Barth, Heidelberg Leipzig, 3rd edition, 1995.

Eigenwert eines Operators, eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$, für die

$$\lambda - T := \lambda \text{Id} - T,$$

T ein gegebener linearer Operator, nicht injektiv ist.

Sei X ein (unendlichdimensionaler) Banachraum und $T : X \supset D(T) \rightarrow X$ ein linearer Operator. Ist $\ker(\lambda - T) \neq \{0\}$, heißt λ Eigenwert von T und $\ker(\lambda - T)$ der zugehörige Eigenraum.

Jedes von Null verschiedene Element des Eigenraums heißt Eigenvektor; wenn X ein Raum von Funktionen ist, spricht man auch von einer Eigenfunktion. Definitionsgemäß erfüllt ein Eigenvektor x zum Eigenwert λ also

$$Tx = \lambda x.$$

Gibt es jedoch nur eine Folge (x_n) mit

$$\|x_n\| = 1, \quad \|Tx_n - \lambda x_n\| \rightarrow 0,$$

heißt λ ein approximativer Eigenwert.

Eigenwerte und approximative Eigenwerte gehören zum Spektrum von T . Während das Spektrum

$\sigma(T)$ eines beschränkten Operators stets nicht leer ist, braucht es keine Eigenwerte zu geben (z. B. $(Tf)(s) = sf(s)$ auf $L^2[0, 1]$); jedoch besteht der Rand von $\sigma(T)$ aus approximativen Eigenwerten.

Ist T ein \mathcal{A} -kompakter Operator oder allgemeiner ein Operator, der eine kompakte Potenz besitzt, z. B. ein p -summierender Operator, so besteht das Spektrum mit der eventuellen Ausnahme der Null nur aus Eigenwerten, und diese bilden eine Nullfolge oder eine endliche Menge. Zur Bestimmung der Vielfachheit eines Eigenwerts λ betrachtet man zuerst den zugehörigen Hauptraum

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \ker(\lambda - T)^n,$$

der für potenzkompakte T endlichdimensional ist; diese Dimension heißt die Vielfachheit von λ . In der Eigenwertfolge von T wird nun jeder Eigenwert so häufig aufgeführt, wie seine Vielfachheit angibt. Mit Hilfe der Theorie der p -summierenden Operatoren kann man Aussagen über die Konvergenzgeschwindigkeit der Eigenwertfolge treffen.

Ist T ein abgeschlossener dicht definierter Operator mit einer kompakten Resolvente, so besteht das Spektrum ebenfalls nur aus Eigenwerten; für die Eigenwertfolge gilt diesmal $|\lambda_n| \rightarrow \infty$.

[1] Pietsch, A.: Eigenvalues and s-Numbers. Cambridge University Press, 1987.

Eigenwerte in einem unitären Raum, diejenigen Zahlen $\lambda \in \mathbb{C}$, die in einem unitären Raum U zwei verschiedene Skalarprodukte miteinander in Beziehung setzen.

Genauer gilt: In einem unitären Raum U seien zwei Skalarprodukte $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ definiert. Weiterhin existiere ein von Null verschiedenes Element $\bar{u} \in U$ so, daß die Gleichung

$$\langle \bar{u}, u \rangle_1 = \lambda \langle \bar{u}, u \rangle_2$$

für alle $u \in U$ eine Lösung λ besitzt. Dann heißt λ Eigenwert der beiden Skalarprodukte $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ in U .

Eigenwertgleichung, Gleichung, mit deren Hilfe \mathcal{A} -Eigenwerte bestimmt werden.

Ist A eine $(n \times n)$ -Matrix, so werden die Eigenwerte von A durch die Gleichung $Ax = \lambda x$ beschrieben. Um die Eigenwerte konkret berechnen zu können, verwendet man die charakteristische Gleichung $\det(A - \lambda I) = 0$, wobei I die Einheitsmatrix bezeichnet. Mit Hilfe des charakteristischen Polynoms $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$ führt dies zu der algebraischen Gleichung $p_A(\lambda) = 0$.

Eigenwertmethode, Vorgehensweise zur Bestimmung der Nullstellen eines normierten Polynoms $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$ mit reellen

Koeffizienten a_i durch Betrachtung des äquivalenten Eigenwertproblems seiner Begleitmatrix (\mathcal{A} -Begleitmatrix eines Polynoms) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Es gilt nämlich

$$p(x) = (-1)^n \det(A - xI)$$

mit der Einheitsmatrix I .

Da A eine Hessenberg-Matrix ist, läßt sich unter anderem der QR-Algorithmus zur Lösung dieses Eigenwertproblems zur Anwendung bringen.

Eigenwertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung, gewöhnliche Differentialgleichung, die sich mit einem Differentialoperator D in der Form

$$D[y](x) = \lambda y(x)$$

schreiben läßt. Dabei sind die Zahlen λ , die sog. Eigenwerte und die nicht-trivialen Funktionen y , die sog. Eigenfunktionen zu bestimmen, die diese Differentialgleichung erfüllen.

Eigenzeit, im Sinne der Relativitätstheorie die Zeit, wie sie im mitbewegten Bezugssystem gemessen wird.

Wegen der relativistischen Zeitdilatation stimmt die Eigenzeit nicht mit der Zeit im bewegten Bezugssystem überein.

Eikonal, Bezeichnung für die Größe ψ im Lösungsansatz $f = ae^{i\psi}$ für die d'Alembert-Gleichung.

Für große ψ und kleine Raum-Zeit-Bereiche folgt aus der d'Alembert-Gleichung für ψ die Eikonalgleichung

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} = 0$$

(\mathcal{A} -Einsteinsche Summenkonvention), wobei $g^{\mu\nu}$ die kontravarianten Komponenten des metrischen Tensors einer Pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit sind. Die Eikonalgleichung ist die Grundgleichung der geometrischen Optik (großes ψ bedeutet kleine Wellenlänge).

Eikonalgleichung, Näherungsgleichung für eine Wellengleichung, speziell in der geometrischen Optik.

Sie ist dann eine gute Näherung an die exakte Gleichung, wenn die Amplitude der Welle nur eine geringe raumzeitliche Schwankung aufweist.

Ein Beispiel: Die Welle sei durch den Skalar ϕ beschrieben, und die Wellengleichung sei einfach $\phi_{;i}^{;i} = 0$ in der Minkowski-Raum-Zeit der speziellen Relativitätstheorie. Wir machen den Ansatz

$$\phi = a \cdot \exp(i\psi)$$

und nehmen an, daß der Gradient von a gegenüber dem Gradienten von ψ vernachlässigbar ist.

Dann lautet die erste Näherung der Wellengleichung $\psi^{,i}\psi_{,i} = 0$, und diese Gleichung wird Eikonalggleichung genannt.

Aus der Eikonalggleichung läßt sich also ablesen, daß der Wellenvektor (hier: $\psi_{,i}$) eines masselosen Teilchens (hier: ϕ) lichtartig ist, also das Teilchen sich in erster Näherung mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet.

Steht dagegen auf der rechten Seite der Wellengleichung noch ein Masseterm (mit positiver Masse), wird der Wellenvektor zeitartig, und das Teilchen bewegt sich mit Unterlichtgeschwindigkeit.

Ferner wird hier deutlich, wie negative Masse zu Überlichtgeschwindigkeit führen kann – beides ist allerdings experimentell noch nicht nachgewiesen.

Einbettung, \mathcal{A} Einbettungsabbildung.

Einbettung eines Graphen, Zuordnung eines Graphen zu einem topologischen Raum.

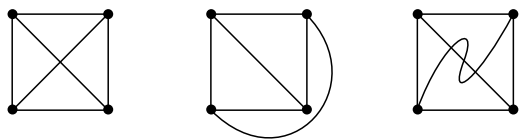
Eine Einbettung des Graphen G in einen topologischen Raum X ordnet jeder Ecke v von G einen Punkt v' in X und jeder Kante k von G einen Bogen k' in X , d. h. das Bild einer stetigen injektiven Abbildung von $[0, 1]$ in X , so zu, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Verschiedene Ecken werden verschiedenen Punkten zugeordnet, und
- (ii) für eine Kante $k = uv$ von G verbindet der Bogen k' die beiden Punkte u' und v' in X .

Die Elemente der Mengen $E' = \{v' | v \in E(G)\}$ und $K' = \{k' | k \in K(G)\}$ heißen Ecken und Kanten der Einbettung und definieren in natürlicher Weise einen zu G isomorphen Graphen G' in X , der selbst oft als Einbettung von G bezeichnet wird.

Ein Schnittpunkt in $X \setminus E'$ zweier Kanten der Einbettung heißt eine Kreuzung (engl. crossing). Eine Einbettung heißt kreuzungsfrei, falls sie keine Kreuzung besitzt. In einer kreuzungsfreien Einbettung schneiden sich also Kanten höchstens in Ecken.

Eine Einbettung heißt normal, falls je zwei Kanten höchstens einen Schnittpunkt besitzen und keine drei Kanten sich in einer Kreuzung schneiden. In einer normalen Einbettung schneiden sich also zwei Kanten nur entweder in höchstens einer Ecke oder in höchstens einer Kreuzung.



Von den drei dargestellten Einbettungen des Graphen K_4 in die Ebene \mathbb{R}^2 ist die linke normal, die mittlere kreuzungsfrei und die rechte weder normal noch kreuzungsfrei.

Wählt man für X den \mathbb{R}^3 , für die Ecken Punkte der Form (t, t^2, t^3) für $t \in \mathbb{R}$ und für die Kanten die geraden Strecken zwischen den jeweiligen Ecken, so sieht man leicht, daß jeder Graph eine kreuzungsfreie Einbettung in den \mathbb{R}^3 besitzt. Üblicherweise werden daher vornehmlich kreuzungsfreie Einbettungen in zweidimensionale Mannigfaltigkeiten und insbesondere die Ebene \mathbb{R}^2 , oder orientierbare und nicht-orientierbare Flächen beliebigen Geschlechts betrachtet.

Man vergleiche auch das Stichwort \mathcal{A} Einbettungsalgorithmus.

Einbettungsabbildung, *Einbettung*, manchmal auch Inklusionsabbildung oder Inklusion genannt, die \mathcal{A} Abbildung $i : A \rightarrow B, x \mapsto x$, wobei A eine Teilmenge von B ist.

Manchmal spricht man auch im Fall einer injektiven Abbildung $i : A \rightarrow B$, wobei A keine Teilmenge von B ist, von einer Einbettungsabbildung.

Einbettungsalgorithmus, ein Algorithmus, der für einen gegebenen Graphen G eine kreuzungsfreie \mathcal{A} Einbettung dieses Graphen in einen bestimmten topologischen Raum erzeugt, falls eine solche existiert. Manchmal werden auch Algorithmen so genannt, die lediglich testen, ob eine derartige Einbettung existiert, ohne sie anzugeben.

Eine Vielzahl effizienter Einbettungsalgorithmen wurde für spezielle topologische Räume entwickelt.

Hopcroft und Tarjan gaben 1974 den ersten Planaritätstest mit linearer Laufzeit an, d. h. einen Algorithmus, der testet, ob ein gegebener Graph ein \mathcal{A} planarer Graph ist.

Zwei Jahre später wurde ein Algorithmus entwickelt, der in ebenfalls linearer Laufzeit tatsächlich eine kreuzungsfreie Einbettung eines gegebenen Graphen in die Ebene konstruiert, falls eine solche existiert.

Im Jahre 1999 gab Mohar einen Einbettungsalgorithmus mit linearer Laufzeit für orientierbare oder nicht-orientierbare Fläche beliebigen festen Geschlechts an. Er verwendete hierfür einen Einbettungsalgorithmus mit linearer Laufzeit für die projektive Ebene, d. h. die nicht-orientierbare Fläche N_1 vom Geschlecht Eins, und einen ebensolchen Algorithmus für den Torus, d. h. die orientierbare Fläche S_1 vom Geschlecht Eins, von Juvan, Marincek und Mohar (1995).

Es ist i. allg. ein NP-vollständiges Problem, für einen gegebenen Graphen G und eine gegebene natürliche Zahl k zu entscheiden, ob das Geschlecht von G die Zahl k nicht überschreitet. Filotti, Miller und Reif gaben 1979 einen Algorithmus an, der das Geschlecht h eines Graphen mit n Ecken in einer Laufzeit von $O(n^{O(h)})$ bestimmt.

Einbettungsbereich, Gebiet Ω' gewisser regulärer, z. B. quadratischer, Struktur, das ein anderes Gebiet Ω allgemeinerer Struktur beinhaltet. Häufig

werden Probleme, die auf Ω zu lösen sind, beispielsweise Differentialgleichungen, durch Einbettung in $\tilde{\Omega}$ besser an Lösungsverfahren angepaßt.

Einbettungssatz, Satz von Urysohn über normale Räume.

Jeder normale Raum mit höchstens abzählbarer Basis ist homöomorph zu einer Punktmenge des Fundamentalquaders des Hilbertschen Raumes.

Dabei heißt ein Hausdorffscher topologischer Raum normal, wenn je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen durch zwei offene disjunkte Mengen getrennt werden können.

Einbettungsverfahren, zur Lösung von Randwertproblemen verwendete Methode, die auf der Einbettung des zugrundeliegenden Gebiets in einen einfacheren \mathcal{A} Einbettungsbereich, wie beispielsweise im zweidimensionalen Fall ein Quadrat, basiert.

eindeutig einbettbarer Graph, ein \mathcal{A} planarer Graph, dessen kreuzungsfreie Einbettungen in die Ebene \mathbb{R}^2 alle äquivalent zueinander sind.

Zwei kreuzungsfreie Einbettungen H_1 und H_2 eines \mathcal{A} planaren Graphen G in die Ebene heißen dabei äquivalent, falls jeder Teilgraph von G genau dann dem Rand eines Landes in H_1 entspricht, falls er auch dem Rand eines Landes in H_2 entspricht.

Nach einem Satz von H. Whitney aus dem Jahr 1933 sind alle dreifach-zusammenhängenden planaren Graphen eindeutig einbettbar.

eindeutig komplementärer Verband, ein \mathcal{A} beschränkter Verband, dessen Elemente alle ein eindeutiges Komplement besitzen.

eindeutige Abbildung, *injektive Abbildung*, \mathcal{A} Abbildung $f : A \rightarrow B$, so daß für alle $y \in B$ gilt, daß $\#\{f^{-1}(\{y\})\} \in \{0, 1\}$, das heißt, jedes Element des Bildbereiches von f ist das Bild höchstens eines Elementes des Urbildbereiches von f . Man schreibt dann auch $f : A \hookrightarrow B$.

eindeutige Primfaktorzerlegung, die Tatsache, daß man natürlicher Zahlen in eindeutiger Weise als Produkt von Primzahlen darstellen kann. Es gilt folgender Satz:

Jede natürliche Zahl n kann in eindeutiger Weise als Produkt

$$n = p_1^{v_1} \cdots p_r^{v_r} \tag{1}$$

von \mathcal{A} Primzahlen

$$p_1 < p_2 < \dots < p_r$$

mit Exponenten v_1, \dots, v_r aus den natürlichen Zahlen geschrieben werden.

Die Darstellung (1) heißt Primfaktorzerlegung von n , jede der darin vorkommenden Primzahlen nennt man einen Primfaktor von n . Zu einer gegebenen Primzahl p ist der p -Exponent einer ganzen Zahl $a \neq 0$ gegeben durch

$$v_p(a) = \begin{cases} v_j & \text{falls } p = p_j \text{ in der} \\ & \text{Primfaktorzerlegung von } |a|, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Zerlegung in Primfaktoren steht zwar nicht in dieser oder ähnlicher Form bei Euklid, wohl aber findet sich in Euklids Buch VII (\mathcal{A} „Elemente“ des Euklid) das entscheidende Argument zum Beweis, nämlich der Satz von Euklid über Primteiler.

Man vergleiche auch \mathcal{A} Ring mit eindeutiger Primfaktorzerlegung.

eindeutige Primzerlegung, eine Verallgemeinerung der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung:

Seien \mathcal{O} ein \mathcal{A} Dedekindscher Ring und a ein von Null und \mathcal{O} verschiedenes Ideal in \mathcal{O} .

Dann besitzt a eine bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutige Produktdarstellung

$$a\hat{=} p_1^{v_1} \cdots p_r^{v_r} \tag{1}$$

mit Primidealen p_1, \dots, p_r in \mathcal{O} und Exponenten $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{N}$.

Zu einem Primideal p ist der p -Exponent eines Ideals $a \neq (0)$ gegeben durch

$$v_p(a) = \begin{cases} v_j & \text{falls } p = p_j \text{ in (1),} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dieser Satz heißt auch Hauptsatz der Dedekindschen Idealtheorie.

Die eindeutige Primzerlegung in Dedekindschen Ringen ist eine Weiterentwicklung der Kummer'schen Idee von den idealen Zahlen, für die, analog zur Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung, eine eindeutige Zerlegung in „ideale Primzahlen“, in heutiger Sprache Primideale, existieren müsse. Die eindeutige Primzerlegung besitzt eine Verallgemeinerung auf gebrochene Ideale.

eindeutige Sprache, kontextfreie Sprache, zu der eine eindeutige \mathcal{A} Grammatik existiert.

Die meisten modernen Programmiersprachen sind eindeutig. Eine klassische Mehrdeutigkeit tritt im Zusammenhang mit der Syntax bedingter Anweisungen auf:

Das Konstrukt `if BEDINGUNG then if BEDINGUNG then ANWEISUNG else ANWEISUNG` läßt sich durch die Grammatikregeln $r_1 = (\text{ANWEISUNG}, \text{if BEDINGUNG then ANWEISUNG})$, $r_2 = (\text{ANWEISUNG}, \text{if BEDINGUNG then ANWEISUNG else ANWEISUNG})$ einerseits als $\text{ANWEISUNG} \Rightarrow^{r_1} \text{if BEDINGUNG then ANWEISUNG} \Rightarrow^{r_2} \text{if BEDINGUNG then if BEDINGUNG then ANWEISUNG else ANWEISUNG}$ ableiten (was eine Zugehörigkeit des `else` zum zweiten `if` festlegt), und andererseits als $\text{ANWEISUNG} \Rightarrow^{r_2} \text{if BEDINGUNG then ANWEISUNG else ANWEISUNG} \Rightarrow^{r_1} \text{if BEDINGUNG then if BEDINGUNG then ANWEISUNG else ANWEISUNG}$ (was eine Zugehörigkeit des `else` zum ersten `if` festlegt).

In Sprachdefinitionen, die unter dieser Mehrdeutigkeit leiden (z. B. PASCAL oder C) wird die Mehrdeutigkeit durch Zusatzfestlegungen aufgelöst, die nicht Bestandteil der Grammatik selbst sind.

Eindeutigkeit von \mathbb{C} , $\mathcal{A}\mathbb{C}$.

Eindeutigkeit von Fourier-Entwicklungen, bezieht sich auf die Frage, ob eine Funktion durch ihre Fourier-Reihe eindeutig bestimmt ist: Seien f, g 2π -periodisch und auf $[-\pi, \pi]$ Lebesgue-integrierbar. Stimmen die Fourier-Koeffizienten von f und g überein, so gilt $f = g$ fast überall.

Daraus folgt beispielsweise: Sind f und g zusätzlich stetig vorausgesetzt, so gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Eindeutigkeitsbeweis, Beweis einer \mathcal{A} Aussage, die die Existenz genau eines Elements mit gegebenen Eigenschaften behauptet, wenn die Existenz wenigstens eines solchen Elements schon gesichert ist.

Eindeutigkeitsatz der Differentialrechnung, besagt, daß zwei auf einem Intervall definierte differenzierbare Funktionen genau dann die gleiche Ableitung haben, wenn sie sich nur um eine additive Konstante unterscheiden, d. h. wenn ihre Differenz konstant ist.

Eindeutigkeitsatz für die Eulersche Γ -Funktion, \mathcal{A} Eulersche Γ -Funktion.

Eindeutigkeitsätze, \mathcal{A} Existenz- und Eindeutigkeitsätze.

eindimensionale Diffusion, Bezeichnung für eine bedeutende Klasse stochastischer Prozesse. Entsprechend verschiedener Definitionsmöglichkeiten ergeben sich auch verschiedene Klassen von Diffusionsprozessen.

Eine eindimensionale Diffusion wird häufig als (starker) Markow-Prozeß $(X_t)_{t \geq 0}$ mit stetigen Pfaden definiert. Es gilt dann

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} P(|X_{t+h} - x| > \varepsilon | X_t = x) = 0.$$

Weiterhin existieren in der Regel die Grenzwerte

$$\mu(t, x) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} E(X_{t+h} - X_t | X_t = x)$$

und

$$\sigma^2(t, x) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} E((X_{t+h} - X_t)^2 | X_t = x).$$

Dabei wird $\mu(t, x)$ als Driftparameter oder Trendkoeffizient und $\sigma^2(t, x)$ als Diffusionsparameter bezeichnet. Im allgemeinen sind $\mu(t, x)$ und $\sigma^2(t, x)$ stetige Funktionen von t und x .

Einige Autoren nehmen die Existenz von Drift- und Diffusionsparameter explizit mit in die Definition auf: Ist $(X_t)_{t \geq 0}$ ein Markow-Prozeß mit Übergangsfunktion $P(s, x; t, B)$, $s, t \in \mathbb{R}_0^+$, $s \leq t$, $x \in \mathbb{R}$ und $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, so wird $(X_t)_{t \geq 0}$ als Diffusion be-

zeichnet, wenn die Übergangsfunktion für beliebige $s \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \varepsilon} P(s, x; s+h, dy) = 0,$$

und es existieren die Grenzwerte

$$\mu(t, x) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x) P(s, x; s+h, dy)$$

sowie

$$\sigma^2(t, x) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x)^2 P(s, x; s+h, dy),$$

die wieder als Drift- bzw. Diffusionsparameter bezeichnet werden. Die erste dieser Bedingungen garantiert dabei die Stetigkeit der Pfade. Unter gewissen Zusatzvoraussetzungen besitzt die Übergangsfunktion eine Dichte $p(s, x; t, y)$ bezüglich des Lebesgue-Maßes. Diese Dichte stellt eine starke Lösung zweier Differentialgleichungen dar: Der Rückwärtsgleichung von Kolmogorow sowie der Fokker-Planck-Gleichung.

Desweiteren finden sich Definitionen, bei denen unter einer Diffusion eine Lösung einer stochastischen Differentialgleichung verstanden wird.

Ein wichtiges Beispiel für eine eindimensionale Diffusion ist eine normale eindimensionale Brownsche Bewegung, für die gilt $\mu(t, x) = 0$ und $\sigma^2(t, x) = 1$ für alle $t \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}$.

eineindeutige Abbildung, sprachlich nicht sehr glückliche, aber in der Mathematik übliche Bezeichnung für eine Abbildung, die sowohl injektiv als auch surjektiv ist (\mathcal{A} bijektive Abbildung).

eineindeutige Relation, \mathcal{A} Relation, die sowohl linkseindeutig als auch rechteindeutig ist.

Einerkomplement, Ersetzung aller Ziffern einer Binärzahl durch die jeweils andere Ziffer.

Das Einerkomplement dient der Komplementdarstellung vorzeichenbehäfteter Binärzahlen sowie der Vereinheitlichung der Prozeduren zur Addition und Subtraktion (\mathcal{A} $(b-1)$ -Komplement).

Einerkomplement-Darstellung, \mathcal{A} binäre Zahlendarstellung, bei der der Folge

$$(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_{-k}) \in \{0, 1\}^{1+n+k}$$

die Zahl

$$\left(\sum_{i=-k}^{n-1} \alpha_i \cdot 2^i \right) - \alpha_n \cdot (2^n - 2^{-k})$$

zugeordnet wird.

Einermenge, Menge mit genau einem Element.

Einermeng axiom, Axiom der \mathcal{A} axiomatischen Mengenlehre, das verlangt, daß es zu jeder Menge x eine Menge X gibt, die x als Element enthält.

einfach zusammenhängender Raum, ein wegzusammenhängender (topologischer) Raum, dessen \mathcal{A} Fundamentalgruppe trivial ist, also nur aus dem neutralen Element besteht.

einfach zusammenhängendes Gebiet, ein (ebenes) Gebiet, das keine „Löcher“ hat.

Es existieren mehrere äquivalente Präzisierungen dieser Aussage; die der Anschauung am besten entsprechende ist die folgende: Ein Gebiet G ist einfach zusammenhängend, wenn jeder in G verlaufende einfach geschlossene Polygonzug nur Punkte von G umschließt.

einfache Algebra, eine Algebra A , die keine zweiseitigen Ideale außer $\{0\}$ und A selbst besitzt.

Ist $\phi : A \rightarrow B$ ein \mathcal{A} Algebrenhomomorphismus mit einer einfachen Algebra A und einer beliebigen Algebra B , dann ist ϕ entweder die Nullabbildung oder injektiv.

einfache algebraische Körpererweiterung, \mathcal{A} einfache Körpererweiterung.

einfache Gruppe, Gruppe mit minimaler Anzahl von Normalteilern.

Eine Gruppe G mit Einselement e heißt einfach, wenn G und $\{e\}$ die einzigen \mathcal{A} Normalteiler von G sind.

Die einfachen Gruppen spielen in der Gruppentheorie eine Rolle, die analog der der Primzahlen in der Zahlentheorie ist. Die endlichen einfachen Gruppen sind inzwischen klassifiziert, sie sind allerdings keinesfalls „einfach“ im anschaulichen Sinn: Eine von ihnen, teilweise „Monstergruppe“ genannt, hat etwa 10^{54} Elemente.

einfache Körpererweiterung, eine \mathcal{A} Körpererweiterung, die durch ein einzelnes Element „erzeugt“ werden kann.

Die Körpererweiterung \mathbb{L} über \mathbb{K} heißt einfach, falls \mathbb{L} durch Körperadjunktion eines einzelnen Elements $\alpha \notin \mathbb{K}$ erhalten wird, $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha)$. Der Körper \mathbb{L} heißt einfacher Erweiterungskörper und α primitives Element der Körpererweiterung.

Ist α algebraisches Element über \mathbb{K} (\mathcal{A} algebraisches Element über einem Körper), so heißt \mathbb{L} einfache algebraische Körpererweiterung, ansonsten einfache transzendente Körpererweiterung.

Nach dem Satz vom primitiven Element ist jede endliche und separable Körpererweiterung eine einfache algebraische Körpererweiterung und kann somit durch ein algebraisches primitives Element erzeugt werden.

einfache Lie-Algebra, Lie-Algebra, die weder abelsch (\mathcal{A} abelsche Lie-Algebra) ist noch ein echtes Ideal enthält.

Eine Teilalgebra h der Lie-Algebra g heißt Ideal in g , falls für alle $x \in h$ und alle $y \in g$ das Lie-Produkt $[x, y]$ stets ein Element von h ist.

Ein Ideal mit mindestens zwei Elementen, das von g verschieden ist, heißt echtes Ideal.

einfache Markow-Eigenschaft, \mathcal{A} elementare Markow-Eigenschaft.

einfache Menge, *simple Menge*, eine \mathcal{A} rekursiv aufzählbare Menge $A \subseteq \mathbb{N}_0$, deren Komplementmenge immun (\mathcal{A} immune Menge) ist.

einfache Nullstelle, eine Nullstelle einer Funktion mit \mathcal{A} Nullstellenordnung Eins; man vergleiche auch $\mathcal{A}\alpha$ -Stelle.

einfache Polstelle, eine Polstelle einer Funktion mit \mathcal{A} Polstellenordnung Eins.

einfache transzendente Körpererweiterung, \mathcal{A} einfache Körpererweiterung.

einfache Zufallsvariable, reelle Zufallsvariable, die nur endlich viele Werte annehmen kann. Eine einfache Zufallsvariable ist also eine spezielle \mathcal{A} diskrete Zufallsvariable mit Werten in \mathbb{R} .

einfacher Modul, Modul, der keine vom Nullmodul verschiedenen Untermoduln hat.

einfacher Pol, \mathcal{A} einfache Polstelle.

einfacher Ring, Ring, der keine vom Nullideal verschiedenen zweiseitigen Ideale hat.

Einfügen in eine Datenbank, Vorgang des Hinzufügens eines Satzes in eine Datenbank.

Hierfür muß zunächst festgestellt werden, in welchen Teilbereich der Datenbank der neue Satz gehört. Verwendet man beispielsweise ein relationales Datenbanksystem, so ist zu klären, in welche Tabelle der neue Satz eingefügt werden soll. Sobald diese Tabelle feststeht, muß auf die Probleme der referentiellen Integrität beim Einfügen von Datensätzen geachtet werden. Wird nämlich ein Satz einer Tabelle hinzugefügt, die einen Fremdschlüssel besitzt, der auf einen Primärschlüssel einer anderen Tabelle verweist, so ist es möglich, daß zu dem Fremdschlüsselwert des neuen Satzes kein Primärschlüsselwert in der referenzierten Tabelle existiert. In diesem Fall wird der Datenbestand in der Datenbank inkonsistent.

In relationalen Datenbanksystemen kann man dieses Problem auf zwei verschiedene Arten lösen. Entweder man sichert die Integrität des Datenbestandes bereits bei der Definition der in der Datenbank auftretenden Tabellen, indem man festlegt, welche Attribute als Fremdschlüssel dienen sollen, und welche Tabellen durch sie referenziert werden. In diesem Fall führt der Versuch des Einfügens eines Satzes mit unpassendem Fremdschlüsselwert automatisch zu einer Fehlermeldung.

Man kann aber auch das Datenbanksystem flexibler lassen und im Rahmen der Einfügekommandos abfragen, ob passende Primärschlüsselwerte existieren, sodaß die Sicherung der Integrität nicht schon bei der Datenbankdefinition, sondern erst bei der Datenmanipulation erfolgt.

Eingabeband, \mathcal{A} Turing-Maschine.

Eingabefunktion, \mathcal{A} formales Neuron.

Eingabe-Neuron, (engl. *input neuron*), *Eingang*sneuron, im Kontext \mathcal{N} Neuronale Netze ein \mathcal{N} formales Neuron, das \mathcal{N} Eingabewerte des Netzes übernimmt.

Eingabeschicht, (engl. *input layer*), im Kontext \mathcal{N} Neuronale Netze die Menge der \mathcal{N} Eingabe-Neuronen des Netzes.

Implizit bringt dieser Begriff zum Ausdruck, daß die Topologie des Netzes schichtweise organisiert ist.

Eingabewerte, im Kontext \mathcal{N} Neuronale Netze diejenigen Werte, die dem Netz zur weiteren Verarbeitung im \mathcal{M} Ausführ-Modus übergeben werden und die \mathcal{N} Ausgabewerte determinieren.

Eingabewerte können je nach Netz diskret oder kontinuierlich sein und werden von den sogenannten \mathcal{N} Eingabe-Neuronen übernommen.

Eingangsfunktion, \mathcal{N} formales Neuron.

Eingangsneuron, \mathcal{N} Eingabe-Neuron.

eingebetteter stochastischer Prozeß, Teil eines stochastischen Prozesses, bei dem nur eine Teilmenge von Zeitpunkten, die sogenannten eingebetteten Zeitpunkte, betrachtet werden.

Eingebettete Prozesse spielen in der \mathcal{N} Warteschlangentheorie (Bedienungstheorie) und der \mathcal{N} Erneuerungstheorie eine Rolle.

Oft ist es interessant, Charakteristiken in Bedienungssystemen nicht in beliebigen Zeitpunkten, sondern nur in besonders interessierenden, den sogenannten eingebetteten Zeitpunkten zu bestimmen. Solche eingebetteten Zeitpunkte sind z. B. die Zeitpunkte des Eintreffens von Forderungen oder der Beendigung von Bedienungen. Untersucht man den Systemzustand in solchen eingebetteten Zeitpunkten, so ergibt sich häufig ein anderer Typ eines zufälligen Prozesses, der leichter mathematisch zu behandeln ist, als wenn man die gesamte Zeitachse betrachtet. Wir haben es dann mit eingebetteten zufälligen Prozessen zu tun.

Zum Beispiel bildet für ein Bedienungssystem mit unabhängigen, identisch, aber nicht notwendigerweise exponentialverteilten Zwischenankunftszeiten und exponentialverteilten Bedienungszeiten die Folge

$$(N(T_n - 0))_{n \geq 1}$$

der Anzahl der Forderungen im System unmittelbar vor dem Zeitpunkt T_n des Eintreffens von Forderungen eine Markowsche Kette. Dagegen ist der Prozeß $(N(t))_{t \geq 0}$ der Anzahl der Forderungen im System zu beliebigen Zeitpunkten kein Markowscher Prozeß mehr.

In der Theorie stochastischer Prozesse geht es dann um die Entwicklung von Methoden zur Herleitung von Beziehungen zwischen den Charakteristiken eingebetteter Prozesse und den Charakteristiken von Prozessen mit beliebigen Zeitpunkten.

Einheit, spezielles Element eines Ringes.

Es sei R ein Ring mit der Verknüpfung \cdot und mit einem von 0 verschiedenen Einselement 1. Dann heißt ein Element $a \in R$ eine Einheit von R , falls es ein Element $b \in R$ gibt mit der Eigenschaft

$$a \cdot b = b \cdot a = 1.$$

Bezeichnet man die Menge aller Einheiten von R mit R^\times , so ist mit $a \in R^\times$ und $b \in R^\times$ auch $a \cdot b \in R^\times$. Zusammen mit der Verknüpfung \cdot bildet R^\times dann eine Gruppe, die \mathcal{N} Einheitengruppe, deren Einselement das Einselement des Ringes R ist. Der Ring R ist genau dann ein Schiefkörper, wenn $R^\times = R \setminus \{0\}$ gilt.

Im Ring \mathbb{Z} der ganzen Zahlen gibt es genau die beiden Einheiten 1 und -1 . Dagegen gibt es im Ring der ganzen Gaußschen Zahlen die vier Einheiten 1, -1 , i und $-i$.

Einheit von $C(G)$, nullstellenfreie Funktion aus $C(G)$.

Ist beispielsweise G ein \mathcal{N} metrischer Raum, so bezeichnet $C(G)$ die Menge der auf G stetigen komplexwertigen Funktionen. Mit punktweise definierten Verknüpfungen wird $C(G)$ kommutative \mathbb{C} -Algebra mit Einselement

$$\mathbf{1} : G \ni x \longrightarrow 1 \in \mathbb{C}.$$

Die nullstellenfreien Funktionen aus $C(G)$ sind gerade die Einheiten, d. h. diejenigen Elemente $f \in C(G)$, zu denen ein $g \in C(G)$ mit $fg = \mathbf{1}$, d. h.

$$f(x)g(x) = 1$$

für alle $x \in G$, existiert.

Einheit von $O(D)$, \mathcal{N} Algebra der holomorphen Funktionen.

Einheiten imaginär-quadratischer Zahlkörper, aufgrund der vorausgesetzten speziellen Körperstruktur genauer beschreibbare \mathcal{N} Einheiten.

Ist $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ mit einer quadratfreien ganzen Zahl $d < 0$ ein imaginär-quadratischer Zahlkörper, so besitzt K keine reelle Einbettung $K \rightarrow \mathbb{R}$ und genau ein Paar konjugiert komplexer Einbettungen $K \rightarrow \mathbb{C}$, also ist jede Einheit in seinem Ganzheitsring \mathcal{O}_K eine Einheitswurzel.

Im Fall $d = -1$ ist die \mathcal{N} Einheitengruppe

$$(O_K)^\times = \{1, i, -1, -i\},$$

die Gruppe der vierten Einheitswurzeln, für $d = -3$ ist

$$(O_K)^\times = \left\{1, e^{\pi i/3}, e^{2\pi i/3}, -1, e^{4\pi i/3}, e^{5\pi i/3}\right\}$$

die Gruppe der sechsten Einheitswurzeln, und für alle anderen imaginär-quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ist

$$(O_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})})^\times = \{1, -1\}.$$

Einheiten reell-quadratischer Zahlkörper, aufgrund der vorausgesetzten speziellen Körperstruktur genauer beschreibbare \mathcal{A} Einheiten.

Ist $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ mit einer quadratfreien ganzen Zahl $d > 1$ ein reell-quadratischer Zahlkörper, so besitzt K genau zwei reelle und keine imaginäre Einbettung, also ist die Einheitengruppe seines Ganzheitsrings \mathcal{O}_K

$$(\mathcal{O}_K)^\times = \left\{ \pm \varepsilon_0^v : v \in \mathbb{Z} \right\} \quad (1)$$

mit einer Grundeinheit ε_0 , die durch die Forderung $\varepsilon_0 > 1$ eindeutig bestimmt ist.

Die Grundeinheit ε_0 ist mit Hilfe der Kettenbruchentwicklung der Zahl

$$\beta = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \sqrt{d}) & \text{für } d \equiv 1 \pmod{4}, \\ \sqrt{d} & \text{für } d \equiv 2, 3 \pmod{4}, \end{cases}$$

berechenbar.

Weiter gilt folgender Satz:

Ist $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$, so ist $\varepsilon = x + y\sqrt{d}$ genau dann eine Einheit, wenn

$$x^2 - dy^2 = \pm 1. \quad (2)$$

Ist $d \equiv 1 \pmod{4}$, so ist

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(x + y\sqrt{d})$$

genau dann eine Einheit, wenn

$$2 \mid (x - y) \text{ und } x^2 - dy^2 = \pm 4. \quad (3)$$

Damit sind die Einheiten eines reell-quadratischen Zahlkörpers mit den Lösungen der sog. Pell-schen Gleichung verknüpft.

Einheitengruppe, die multiplikative Gruppe der \mathcal{A} Einheiten eines assoziativen Rings R mit Eins(element), also

$$\{r \in R \mid \exists a, b \in R : r \cdot a = 1 = b \cdot r\}.$$

Es ist zu beachten, daß das Rechts- mit dem Links-inversen übereinstimmt, falls beide existieren.

Man bezeichnet die Einheitengruppe des Rings R mit R^\times oder auch R^* . Ihre Elemente heißen die Einheiten eines Rings, bzw. die invertierbaren Elemente des Rings.

Beispielsweise hat der Ring \mathbb{Z} der ganzen Zahlen die Einheitengruppe

$$\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}. \quad (1)$$

In einem Körper K ist jedes Element $x \in K, x \neq 0$, invertierbar, also gilt in diesem Fall

$$K^\times = K \setminus \{0\}. \quad (2)$$

Einheitensysteme der Physik, Gesamtheiten von Einheiten, auf deren Basis „Größen“ Zahlenwerte zugeordnet werden. An sie wird die Forderung gestellt, die Größen „möglichst“ eindeutig darzustellen. Die Einheiten selbst sollen unveränderlich und reproduzierbar sein.

Die Herausbildung von Einheitensystemen zieht sich durch die Jahrhunderte der Entwicklung von Wissenschaft und Technik und kann nie wie Wissenschaft und Technik selbst als abgeschlossen gelten. Einheitensysteme sind so teilweise aus der geschichtlichen Situation und den nationalen Empfindlichkeiten zu verstehen.

Ein Einheitensystem besteht aus Grund- und abgeleiteten Einheiten. Die zu ihnen gehörenden Grundgrößen sollen unabhängig, also nicht durch Gleichungen verbunden sein.

Auf Gauß und Weber geht das in der Mechanik benutzte cgs- (oder mkggs-) System (Centimeter-Gramm-Sekunde- oder Meter-Kilogramm-Sekunde-System) zurück: Länge, Masse und Zeitintervall sind die Grundgrößen des Systems. Die wechselnden Definitionen von 1m (1 Meter) und 1s (1 Sekunde) zeigen den Wandel in den Vorstellungen von der Unveränderlichkeit der eben definierten Einheit. Ursprünglich basierte die Definition dieser Einheiten auf geologischen und astrophysikalischen Erscheinungen, die sich als nicht unveränderlich herausstellten.

Heute wird ihre Definition an atomare Erscheinungen geknüpft: Ein Meter ist bestimmt als 1.650.763,73 Vakuum-Wellenlängen der Strahlung, die Krypton 86 bei Übergängen zwischen dem $2p_{10}$ - und dem $5d_5$ -Niveau ausstrahlt. Die Sekunde ist die Dauer von 9.192.631.770 Perioden der Strahlung, die beim Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Cäsium 133 ausgestrahlt wird. Diese Definitionen setzten die Konstanz der entsprechenden atomaren Vorgänge voraus. Das trifft sicher für irdische Verhältnisse und Zeitintervalle, die für die menschliche Zivilisation charakteristisch sind, im Rahmen der heute möglichen Meßgenauigkeit zu. Es ist aber auch denkbar, daß atomare Erscheinungen mit der Entwicklung des Kosmos gekoppelt sind.

1 Kilogramm ist die Masse eines Platin(90%)-Iridium(10%)-Zylinders mit Durchmesser und Höhe von 39mm.

Das technische Einheitensystem der Mechanik basiert auf den Grundgrößen Länge, Kraft, und Zeitintervall. In diesem System ist also die Masse mit ihrer Einheit eine abgeleitete Größe.

Wenn man Erscheinungen messend verfolgen will, die über den Rahmen der Mechanik hinausgehen (etwa elektromagnetische Phänomene einzubeziehen hat), dann könnte man versuchen, mit dem cgs-System auszukommen. Dazu braucht

man eine Kopplung von mechanischen und elektromagnetischen Erscheinungen, beispielsweise die Kraftwirkung (Mechanik) zwischen zwei Ladungen (Elektromagnetismus) oder die Umwandlung der Energieformen. Das führt dann aber dazu, daß z. B. die Elektrizitätsmenge und die Länge in gleichen Einheiten zu messen sind. Um das zu vermeiden, wurde das cgs-System um weitere Basisgrößen und -einheiten wie etwa Stromstärke und Ampere erweitert. In ähnlicher Weise könnte die für die Thermodynamik fundamentale Größe Temperatur mit dem cgs-System dadurch gekoppelt werden, daß die Temperatur ein Maß für die mittlere kinetische Energie (mechanische Größe) ist.

Im „Internationalen Einheitensystem“ (Système International d'Unités, abgekürzt SI) sind die Grundgrößen (Einheiten): Länge (Meter (m)), Masse (Kilogramm (kg)), Zeitintervall (Sekunde (s)), elektrische Stromstärke (Ampere(A)), Temperatur (Kelvin (K)), Lichtstärke (Candela (cd)) und Stoffmenge (Mol (mol)).

In der theoretischen (mathematischen) Physik wird oft das von Planck eingeführte Einheitensystem benutzt, in dem die Newtonsche Gravitationskonstante G , die Vakuumlichtgeschwindigkeit c und die Plancksche Wirkungskonstante h Basis-einheiten sind. Aber auch hier stellt sich die Frage nach der Unveränderlichkeit. Es gibt theoretische Ansätze, die von einer Variabilität von G ausgehen.

Einheitselement einer Gruppe, dasjenige Element einer Gruppe, das bei Anwendung der zugrundeliegenden Operation auf ein anderes Element dieses unverändert läßt.

Das Einheitselement e einer Gruppe G ist also formal definiert wie folgt: Für jedes $x \in G$ gilt

$$x \cdot e = e \cdot x = x.$$

Beispiele hierzu: Ist G eine Abbildungsgruppe, so ist e die identische Abbildung. Ist G die multiplikative Gruppe der positiven reellen Zahlen, so ist e die Zahl Eins. Vergleiche auch \mathcal{N} Einheit, \mathcal{N} Eins.

Einheitsgruppe, die Gruppe, die nur aus dem Einheitselement besteht.

Der Begriff ist nicht zu verwechseln mit dem der \mathcal{N} Einheitengruppe.

Einheitsintervall, das Intervall $[0, 1]$, das also die Länge 1 hat.

In seltenen Fällen bezeichnet man auch, je nach Anwendung, das Intervall $[-1, 1]$ als Einheitsintervall.

Einheitskern, der für einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ durch

$$I : \Omega \times \mathfrak{A} \ni (\omega, A) \rightarrow \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases} \in \{0, 1\}$$

definierte Markow-Kern auf (Ω, \mathfrak{A}) .

Für jedes $\omega \in \Omega$ ist

$$I(\omega, \cdot) : \mathfrak{A} \ni A \rightarrow I(\omega, A) \in \{0, 1\}$$

ein Dirac-Maß.

Einheitskreis, in abstrakter Definition die Punktmenge

$$B = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\| < 1\},$$

also der Spezialfall $n = 2$ der \mathcal{N} Einheitskugel.

Zumeist nimmt man jedoch auch noch den Spezialfall der euklidischen Norm an; der Einheitskreis ist also die Menge \mathbb{E} der Punkte des \mathbb{R}^2 mit einem euklidischen Abstand kleiner als 1 vom Nullpunkt, also die offene Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

Die Menge

$$\overline{\mathbb{E}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

ist die abgeschlossene Einheitskreisscheibe, und der Einheitskreisrand

$$\partial \mathbb{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

ist gerade die zweidimensionale Einheitskugel S^1 . Identifiziert man \mathbb{R}^2 , versehen mit dem euklidischen Abstand, mit $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, so gilt:

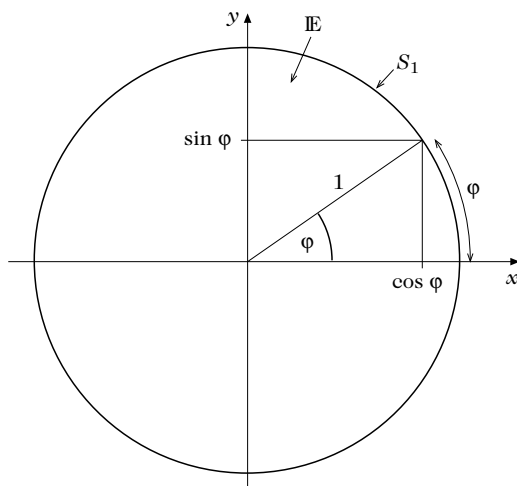
$$\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\},$$

$$\overline{\mathbb{E}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\},$$

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Für einen Punkt $(x, y) \in S^1$ gilt für den Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ der Strecke $\{t(x, y) : t \in [0, 1]\}$ zur positiven x -Achse:

$$\cos \varphi = x, \quad \sin \varphi = y$$



Einheitskreis

φ ist gleich der Länge des Einheitskreisbogens zwischen $(1, 0)$ und $(\cos \varphi, \sin \varphi)$.

Wenn φ den Bereich $[0, 2\pi)$ durchläuft, durchläuft $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ den Einheitskreis genau einmal im mathematisch positiven Sinn, also gegen den Uhrzeigersinn, beginnend im Punkt $(1, 0)$.

Insbesondere hat der Einheitskreis den Umfang 2π , und es gilt

$$S^1 = \{(\cos \varphi, \sin \varphi) \mid \varphi \in [0, 2\pi)\}.$$

Sieht man S^1 wieder als Teilmenge von \mathbb{C} , so zeigt die Eulersche Formel $\exp(i\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$:

$$S^1 = \{\exp(i\varphi) \mid \varphi \in [0, 2\pi)\}$$

Mit Hilfe der Identität $\exp(0) = 1$, des \mathcal{A} Additions-theorems der Exponentialfunktion und der $2\pi i$ -Periodizität der Exponentialfunktion folgt, daß die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow S^1, \quad \varphi \longmapsto \exp(i\varphi)$$

ein 2π -periodischer Epimorphismus der Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ auf die Gruppe (S^1, \cdot) ist.

Es sei abschließend noch darauf hingewiesen, daß die Notation in der Literatur zuweilen nicht ganz einheitlich ist; so versteht man unter dem Einheitskreis manchmal auch gerade das, was wir hier als den Rand des Kreises bezeichnet haben, also die Menge S^1 .

Um vor solchen Unsicherheiten geschützt zu sein, findet man manchmal auch die präziseren Bezeichnungen Einheitskreisscheibe (für \mathbb{E}) und Einheitskreislinie (für S^1). Ähnliches empfiehlt sich bei der \mathcal{A} Einheitskugel.

Einheitskreislinie, \mathcal{A} Einheitskreis.

Einheitskreisscheibe, \mathcal{A} Einheitskreis.

Einheitskugel, die Menge der Punkte des \mathbb{R}^n mit einem Abstand kleiner als 1 vom Nullpunkt, also die offene Menge

$$B = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \|p\| < 1\}.$$

Je nach Art der gewählten Norm ergeben sich hierbei – im \mathbb{R}^3 – unterschiedliche geometrische Figuren. Die Bezeichnung Einheitskugel kommt daher, daß B im Falle der \mathcal{A} euklidischen Norm tatsächlich eine Kugel darstellt.

Es muß darauf hingewiesen werden, daß die Notation in der Literatur nicht einheitlich ist; manchmal versteht man unter der Einheitskugel auch die abgeschlossene Kugel \bar{B} , oder auch, allerdings nur selten, die \mathcal{A} Einheitskugel. Wiederum andere Autoren benutzen den Begriff ausschließlich im Falle der euklidischen Norm.

Man vergleiche zu dieser Problematik auch das Stichwort \mathcal{A} Einheitskreis.

Einheitsmatrix, quadratische Diagonalmatrix mit Einsen auf der Hauptdiagonalen:

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die $(n \times n)$ -Einheitsmatrix sind in der Literatur verschiedene Bezeichnungen als Standards zu finden, etwa

$$E, E_n, I, I_n.$$

Sie ist das neutrale Element der Matrizen-Gruppe der regulären $(n \times n)$ -Matrizen.

Für jede beliebige Wahl einer Basis des n -dimensionalen Vektorraumes V repräsentiert sie die identische Abbildung $\text{id}: V \rightarrow V$, denn es gilt für jede $(n \times n)$ -Matrix A :

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Einheitssphäre, die differenzierbare Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^n , gegeben als

$$S^{n-1} := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\},$$

und üblicherweise bezeichnet mit S^{n-1} .

Die Einheitssphäre ist eine reell-analytische Mannigfaltigkeit. Im Falle $n = 3$ bildet sie den Rand der \mathcal{A} Einheitskugel, im Falle $n = 2$ die Einheitskreislinie.

Einheitsvektor, Vektor v in einem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit Norm Eins:

$$\|v\| = 1, \text{ d. h., } \langle v, v \rangle = 1.$$

Man nennt einen solchen Vektor normiert.

Zu jedem Vektor $v \neq 0 \in V$ ist durch

$$v' := \frac{v}{\|v\|}$$

ein normierter Vektor gleicher Richtung gegeben.

Einheitswürfel, die Menge

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; 0 \leq x_i \leq 1 \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

im \mathbb{R}^n , meist für $n = 3$ benutzt. In diesem Fall stellt die Menge auch anschaulich einen Würfel dar. In seltenen Fällen bezeichnet man auch, je nach Anwendung, die Menge

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; -1 \leq x_i \leq 1 \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

$[-1, 1]$ als Einheitswürfel.

Einheitswurzel, eine komplexe Zahl ζ mit $\zeta^n = 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Eine solche Zahl ζ heißt n -te Einheitswurzel. Es gibt genau n verschiedene Zahlen $\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1}$ mit dieser Eigenschaft, nämlich

$$\zeta_k = e^{2k\pi i/n} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}.$$

Geometrisch liegen sie auf der Einheitskreislinie in den Ecken eines regelmäßigen n -Ecks.

Die Zahl $\zeta_1 = e^{2\pi i/n}$ heißt primitive n -te Einheitswurzel. Ist $n \geq 2$ und $\zeta \neq 1$ eine n -te Einheitswurzel, so gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k = 0.$$

Die Menge G_n aller n -ten Einheitswurzeln ist eine zyklische Untergruppe der Ordnung n der multiplikativen Gruppe $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Die Mengen

$$G := \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \quad \text{und} \quad H := \bigcup_{n=0}^{\infty} G_{2^n}$$

sind ebenfalls Untergruppen von S^1 , und es gilt $H \subset G$. Weiter sind die Mengen G und H dicht in S^1 .

Einhüllende, Enveloppe, Hüllkurve, eine Kurve, die in jedem ihrer Punkte eine Kurve einer gegebenen einparametrischen ebenen Kurvenschar berührt.

Eine andere Definition erklärt die Einhüllende als geometrischen Ort aller Grenzpunkte der Kurvenschar.

Wenn die Kurvenschar durch eine implizite Kurvengleichung $F(x, y, a) = 0$ gegeben ist, in der a der Scharparameter ist, so erfüllen die Punkte der Einhüllenden das Gleichungssystem

$$F(x, y, a) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, a)}{\partial a} = 0. \tag{1}$$

Dieses Gleichungssystem hat außerdem die singulären Kurvenpunkte als Lösung, d. h., Punktmenge, die in parametrischer Form als Kurven $\alpha(a) = (x(a), y(a))$ gegeben, die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} F(x(a), y(a), a) &= 0, \\ F_x(x(a), y(a), a) &= 0, \quad \text{und} \\ F_y(x(a), y(a), a) &= 0 \end{aligned}$$

erfüllen. Sie erfüllen dann auch die Gleichung

$$F_a(x(a), y(a), a) = 0,$$

was man leicht aus den obigen Gleichungen durch Ableiten von $F(x(a), y(a), a) = 0$ nach a erhält.

Ein Beispiel: Es sei $\alpha(a) = (\xi(a), \eta(a))$ eine beliebige Kurve C in parametrischer Form. Die Gleichung

$$F(x, y, a) = (x - \xi(a))(y - \eta(a)) = 0$$

beschreibt die Schar aller sich in den Punkten von C senkrecht schneidenden und zu den Koordinatenachsen parallelen Geradenpaare. Die Lösung des Gleichungssystems (1) für diese Kurvenschar ist dann gerade die Kurve $x = \xi(a), y = \eta(a)$.

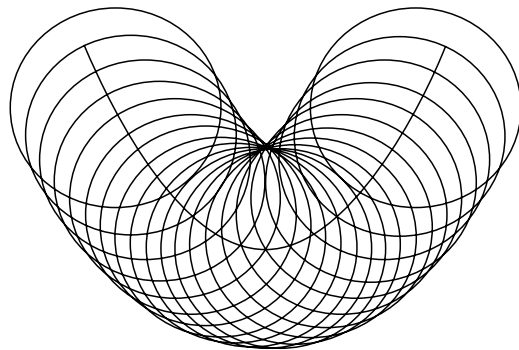
Als weiteres Beispiel betrachte man eine Schar von Kreisen mit festem Radius r , deren Mittelpunkte eine gegebene Kurve $\alpha(a) = (\xi(a), \eta(a))$ beschreiben. Diese hat die implizite Gleichung

$$F(x, y, a) = (x - \xi(a))^2 + (y - \eta(a))^2 - r^2 = 0.$$

Dann ergeben die beiden Gleichungen (1)

$$\begin{aligned} x &= \frac{-r \eta'(a)}{\sqrt{(\xi'(a))^2 + (\eta'(a))^2}}, \\ y &= \frac{r \xi'(a)}{\sqrt{(\xi'(a))^2 + (\eta'(a))^2}}, \end{aligned} \tag{2}$$

das ist erwartungsgemäß die Parallelkurve von $\alpha(t)$.



Die Einhüllende dieser Kreisschar besteht aus zwei Parallelkurven einer Parabel

Als Einhüllende von Geradenscharen sind z. B. die \nearrow Astroide und \nearrow Kaustiken bekannt. Die Evolute einer beliebigen Kurve ist die Einhüllende der Schar ihrer Normalen.

Manche Kurvenscharen besitzen keine Einhüllende, wie zum Beispiel eine Schar konzentrischer Kreise oder eine Schar paralleler Geraden.

1/9-Vermutung, lange Zeit offene Vermutung in der \nearrow Approximationstheorie im Zusammenhang mit der rationalen Approximation der Funktion $f(x) = \exp(-x)$ auf $[0, \infty)$.

Die Formulierung benötigt etwas Vorbereitung. Es bezeichne $R_{m,n}$ die Menge der rationalen Funktionen mit Zählergrad m und Nennergrad n und $\varrho_{m,n}$ die \nearrow Minimalabweichung bei der Approximation von f durch $R_{m,n}$ auf dem Intervall $[0, \infty)$ in der Maximumnorm, also

$$\varrho_{m,n} = \inf_{r \in R_{m,n}} \|r - f\|_{\infty}.$$

Bereits 1973 wurde bewiesen, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\varrho_{0,n})^{1/n} = \frac{1}{3},$$

und es entstand die Vermutung, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\varrho_{n,n})^{1/n} = \frac{1}{9},$$

die 1/9-Vermutung.

Nachdem hochgenaue numerische Berechnungen bereits Mitte der achtziger Jahre den Verdacht aufkommen ließen, daß die Vermutung falsch ist, wurde dann zu Ende des gleichen Jahrzehnts auch theoretisch bewiesen, daß

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\varrho_{n,n})^{1/n} &= \exp\left(\frac{-\pi \cdot K(\sqrt{1-c^2})}{K(c)}\right) \\ &\approx \frac{1}{9.289025} \neq \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Hierbei ist c die eindeutige Lösung der Gleichung

$$K(c) = 2 \cdot E(c)$$

im Intervall $(0, 1)$, und K und E bezeichnen das vollständige \mathcal{A} elliptische Integral erster bzw. zweiter Art.

Ein-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen. Familie $\{\phi_t : M \rightarrow M\}_{t \in \mathbb{R}}$ von Diffeomorphismen auf einer \mathcal{A} Mannigfaltigkeit M , für die gilt:

1. $\phi_0 = \text{id}_M$,
2. $\phi_{-t} = \phi_t^{-1}$ für alle $t \in \mathbb{R}$,
3. $\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.

Für eine Untermannigfaltigkeit $N \subset M \times \mathbb{R}$ der Form

$$N = \bigcup_{m \in M} (T_-(m), T_+(m))$$

mit $T_-(m), T_+(m) > 0$ für alle $m \in M$ heißt eine Abbildung $\Phi : U \rightarrow M$ lokale Ein-Parameter-Gruppe von Transformationen (auf M), falls

1. $\Phi(m, 0) = m$, und
2. $\Phi(\Phi(m, t), s) = \Phi(m, s+t)$

für alle $s, t \in \mathbb{R}$ und alle $m \in M$ gilt, für die beide Seiten definiert sind.

Eine Ein-Parameter-Gruppe von Transformationen (auf M) induziert einen Fluß (M, \mathbb{R}, Φ) mit $\Phi(m, t) := \phi_t(m)$ für alle $m \in M, t \in \mathbb{R}$.

Eine differenzierbare lokale Ein-Parameter-Gruppe von Transformationen induziert ein Vektorfeld

$$M \ni m \mapsto \frac{d}{dt} \Phi(m, t)|_{t=0},$$

den sog. infinitesimalen Erzeuger von Φ . Umgekehrt wird durch jedes differenzierbare Vektorfeld f auf M eine Differentialgleichung auf M induziert, deren (lokale) Lösungen eine lokale Ein-Parameter-Gruppe von Transformationen auf M induzieren.

Einpunkt-Kompaktifizierung, \mathcal{A} Alexandrow, Satz von.

Einrollengerät, mechanisches Gerät zur Bestimmung der Bogenlänge von Kurven, die mit einer Meßrolle befahren werden. Man vergleiche das Stichwort \mathcal{A} Kurvenmesser.

Eins, Bezeichnung für das neutrale Element bei einer \mathcal{A} Multiplikation, wie z. B. die Zahl 1 bei der Multiplikation von Zahlen oder die Einheitsmatrix I_n bei der Multiplikation von $(n \times n)$ -Matrizen.

Eins-Abbildung, Identität, die \mathcal{A} Abbildung

$$I_A : A \rightarrow A, \quad x \mapsto x.$$

Anstelle von I_A ist auch die Schreibweise Id_A gebräuchlich.

Leider gibt es hier eine leichte Uneinheitlichkeit in der Notation, da manche Autoren die Abbildung $x \mapsto 1$, die also alle Elemente des Urbildbereichs auf die Eins abbildet, als Eins-Abbildung bezeichnen.

einschaliges Hyperboloid, eine Fläche, die in Normallage durch eine implizite Gleichung zweiter Ordnung der Gestalt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

definiert ist.

Das einschalige Hyperboloid ist eine doppelt bestimmte Regelfläche. Zwei verschiedene geradlinige Koordinatennetze, die diese Tatsache belegen, sind die folgenden:

$$\Phi_{\pm}(u, v) = \begin{pmatrix} a(\cos u \mp v \sin u) \\ b(\sin u \pm v \cos u) \\ cv \end{pmatrix}.$$

einschaliges Rotationshyperboloid, ein \mathcal{A} einschaliges Hyperboloid, bei dem in der definierenden impliziten Gleichung $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ die das Profil bestimmenden Achsen a und b gleich sind.

Ein einschaliges Rotationshyperboloid ist also eine \mathcal{A} Rotationsfläche, deren erzeugende Kurve eine Hyperbel ist.

Einschließungseigenschaft, eine grundlegende Eigenschaft der Intervallrechnung, die besagt, daß die \mathcal{A} Intervallauswertung $f(x)$ einer Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ über einem kompakten Teilintervall $x \subseteq D$ (sofern sie existiert) den Wertebereich $f(x)$ enthält:

$$f(x) = \{f(x) | x \in x\} \subseteq f(x).$$

Diese Aussage hängt nicht von der Gestalt des Funktionsausdrucks $f(x)$ ab. Gleichheit gilt z. B., wenn die Variable x in $f(x)$ nur einmal auftritt.

Die Einschließungseigenschaft gilt in analoger Weise bei Funktionen mit mehreren Variablen und bei Funktionen mit Parametern.

Tritt die Variable x in $f(x)$ mehrfach, etwa n -mal, auf, so liefert die Intervallauswertung häufig eine Überschätzung des Wertebereichs. Ersetzt man nämlich x in $f(x)$ beim ersten Auftreten durch x_1 , beim zweiten durch x_2 usw., so erhält man einen Funktionsausdruck $g(x_1, \dots, x_n)$, für den zwar $f(x) = g(x, \dots, x)$, $x \in \mathbf{x}$, gilt, für dessen Wertebereich über $\mathbf{x} \times \dots \times \mathbf{x}$ aber im allgemeinen nur

$$f(\mathbf{x}) \subseteq g(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

gezeigt werden kann, da die Variablen in $g(x_1, \dots, x_n)$ unabhängig voneinander variieren.

Eine Möglichkeit, den Wertebereich genauer zu bestimmen, besteht in der Unterteilung von \mathbf{x} in kleinere kompakte Intervalle, denn mit den bisherigen Bezeichnungen gilt der folgende Satz:

Ist $g(x_1, \dots, x_n)$ Lipschitz-stetig in $\mathbf{x} \times \dots \times \mathbf{x}$, so existiert ein $\gamma \geq 0$ mit

$$q(f(\mathbf{z}), \mathbf{f}(\mathbf{z})) \leq \gamma \cdot d(\mathbf{z}) \tag{1}$$

für alle in \mathbf{x} enthaltenen kompakten Teilintervalle \mathbf{z} . Dabei bezeichnet q die Hausdorff-Metrik und d den \mathcal{A} Durchmesser eines Intervalls.

Gilt etwa

$$\mathbf{x} = \bigcup_{j=1}^k \mathbf{z}_j$$

mit $d(\mathbf{z}_j) = d(\mathbf{x})/k$, $j = 1, \dots, k$, und definiert man

$$\mathbf{f}_k(\mathbf{x}) = \bigcup_{j=1}^k \mathbf{f}(\mathbf{z}_j),$$

so zieht (1) die Abschätzung

$$q(f(\mathbf{x}), \mathbf{f}_k(\mathbf{x})) \leq \gamma |d(\mathbf{x})|/k \tag{2}$$

nach sich.

Für die \mathcal{A} Mittelwertform, die \mathcal{A} Steigungsform oder eine andere \mathcal{A} zentrierte Form kann (1) durch die Abschätzung

$$q(f(\mathbf{z}), \mathbf{f}(\mathbf{z})) \leq \hat{\gamma} (d(\mathbf{z}))^2 \tag{3}$$

ersetzt werden, die für alle in \mathbf{x} enthaltenen kompakten Teilintervalle \mathbf{z} gilt, und in der die Konstante $\hat{\gamma} \geq 0$ wieder nur von \mathbf{x} abhängt.

Einschließungssätze für Eigenwerte, Typus von Aussagen über die Einschließung von Eigenwerten.

Gegeben sei ein selbstadjungiertes volldefinites Eigenwertproblem

$$Lu = \lambda r(x)u, \tag{1}$$

d. h., alle seine Eigenwerte seien positiv, auf dem Intervall $J = [a, b]$. K sei der Integraloperator des

Problems, $s \in \mathbb{N}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \alpha < \beta$. Sei $V(J)$ der Raum der Vergleichsfunktionen und

$$\{v|\varpi\} := - \int_J vL\varpi dx$$

ein Skalarprodukt auf diesem linearen Raum. Dann existiert eine Reihe von Einschließungssätzen, von denen wir die wichtigsten im folgenden auflisten:

Erster Einschließungssatz (Satz von Mertins):

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. In J liegen mindestens s Eigenwerte des Eigenwertproblems (1).

2. Es gibt s linear unabhängige Funktionen $\varpi_1, \dots, \varpi_s \in V(J)$ so, daß für jedes $\varpi := \sum_{i=1}^s c_i \varpi_i$ gilt:

$$\{\alpha K\varpi - \varpi | \beta K\varpi - \varpi\} \geq 0.$$

Zweiter Einschließungssatz:

Sei $0 \neq v \in V(J)$. Die zugehörige Einschließungsfunktion

$$E := \frac{1}{r} \frac{L\varpi}{v}$$

sei auf J definiert, stetig und positiv. Dann befindet sich im Intervall

$$\left(\min_{a \leq x \leq b} E(x), \max_{a \leq x \leq b} E(x) \right)$$

ein Eigenwert von (1).

Dritter Einschließungssatz (Satz von Temple):

Für ein $\varpi_1 \neq 0$ aus $V(J)$ lauten die ersten Schwarzschen Konstanten

$$\sigma_0 := \{\varpi_1|\varpi_1\}, \quad \sigma_1 := \{K\varpi_1|\varpi_1\},$$

$$\sigma_2 := \{K\varpi_1|K\varpi_1\}.$$

Wählt man nun ein $\beta > \frac{\sigma_0}{\sigma_1}$ und setzt

$$\alpha := \frac{\beta\sigma_1 - \sigma_0}{\beta\sigma_2 - \sigma_1},$$

so ist $0 < \alpha < \beta$, und im Intervall $[\alpha, \beta]$ liegt mindestens ein Eigenwert des betrachteten Problems. α heißt Templescher Quotient und σ_1/σ_2 ist der Rayleighsche Quotient.

Vierter Einschließungssatz (Satz von Collatz):

Sei

$$p(\mu) = \sum_{i=0}^2 \alpha_i \mu_i$$

ein reelles Polynom. Mit dem Skalarprodukt

$$(u|v) := \int_a^b r(x)u(x)v(x)dx$$

auf $C(J)$ mit der Gewichtsfunktion r gilt: Ist für ein $u \neq 0$, $u \in C(J)$

$$\alpha_0 u + \alpha_1 Ku + \alpha_2 K^2 u \geq 0,$$

so enthält die Menge $\{\mu \in \mathbb{R} : p(\mu) \geq 0\}$ mindestens einen Eigenwert von K , also auch das Reziproke eines Eigenwertes des Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblems.

[1] Heuser, H.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. B.G. Teubner Stuttgart, 1995.

[2] Kamke, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen I. B.G. Teubner Stuttgart, 1977.

Einschließungsverfahren, Verfahren, die für ein gegebenes Problem eine Einschließung der Lösungsmenge berechnen.

Darunter fallen sowohl Probleme mit Intervalldaten als auch „klassische“ Punktprobleme. Einschließungsverfahren liefern obere und untere Schranken für eine Lösung und somit automatisch eine Fehlerabschätzung unter Einschluß aller Verfahrens- und Rundungsfehler (siehe auch \mathcal{A} Einschließungseigenschaft, \mathcal{A} Intervallrechnung).

Einschnürungssatz, gelegentlich auch Sandwich Theorem genannt, einfache Überlegung zum Konvergenznachweis bei reellen Folgen:

Es seien (a_n) , (b_n) und (c_n) reelle Folgen. Gilt für alle $n \geq N$

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

mit einer Zahl $N \in \mathbb{N}$, so folgt aus der Konvergenz von (a_n) und (b_n) gegen den gleichen Grenzwert α auch die Konvergenz von (c_n) gegen α .

Man kann sich das auf folgende Weise – wenig mathematisch, aber instruktiv – plausibel machen: Drei Studenten, die ganz schön gebechert haben, machen sich gemeinsam auf den Heimweg ins gleiche Wohnheim. Die beiden, die noch ein klein wenig nüchterer sind, nehmen den dritten, der arge Probleme hat, zwischen sich. Und wenn die beiden das Ziel erreichen, ist so der dritte automatisch auch angekommen.

Einschränkung einer Abbildung, Restriktion einer Abbildung, eine \mathcal{A} Abbildung $g : C \rightarrow B$ so, daß gilt:

Es liegt eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ vor, C ist eine Teilmenge von A , und

$$g(x) = f(x) \text{ für alle } x \in C.$$

g ist dann die Einschränkung von f . Man schreibt $g = f|_C$ oder $f|_C$ (lies: f eingeschränkt auf C , siehe auch \mathcal{A} Einschränkung eines Operators).

Einschränkung eines Operators, Restriktion eines Operators, für einen Operator $T : X \rightarrow Y$ zwischen zwei Räumen und einen Unterraum $U \subset X$ die Abbildung $S : U \rightarrow Y$ mit der Eigenschaft

$$S(u) = T(u) \text{ für alle } u \in U.$$

Man schreibt dann $S = T|_U$ oder $T|_U$ (lies: T eingeschränkt auf U , siehe auch \mathcal{A} Einschränkung einer Abbildung).

Mit anderen Worten ist $T|_U$ die Komposition $T \circ j$ von T mit der Inklusionsabbildung $j : U \rightarrow X$, $j(u) = u$.

Einschrittverfahren, Typus von Verfahren zur näherungsweise (numerischen) Berechnung der Lösung von Anfangswertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen, bei dem sukzessive Näherungswerte für die exakte Lösung zu diskreten Zeitpunkten berechnet werden unter Verwendung eines bereits bestimmten Näherungswertes.

Man betrachte zunächst das einfachste Beispiel für ein Anfangswertproblem einer einzelnen Gleichung der Form $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

In der einfachsten Form, dem Verfahren von Euler, wird die Differentialgleichung durch eine Differenzgleichung

$$(y_{i+1} - y_i)/h = f(x_i, y_i)$$

approximiert, wobei die y_i Näherungen von $y(x_i)$ an den äquidistanten Stellen $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, 2, \dots$, sind.

Daraus läßt sich die explizite Formel

$$y_{i+1} := y_i + hf(x_i, y_i) \quad (1)$$

für y_{i+1} herleiten. Das durch die Vorschrift (1) definierte Verfahren benennt man nach Euler; es kann als der Prototyp eines Einschrittverfahrens angesehen werden (\mathcal{A} Eulersches Polygonzug-Verfahren).

In Verallgemeinerung des Euler-Verfahrens betrachtet man Rekursionen der Form

$$y_{i+1} := y_i + h\Phi(x_i, y_i, h),$$

bei denen Φ eine zunächst beliebige Rechenvorschrift bezeichnet, um aus x_i , y_i und der Schrittweite h den neuen Wert y_{i+1} zu bestimmen.

Der Typus des Einschrittverfahrens hängt dabei offensichtlich von der gewählten Funktion Φ ab. Der Zusammenhang zwischen Φ und der Differentialgleichung wird über den Begriff der Konsistenz hergestellt, nach der

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Phi(x, y, h) = f(x, y)$$

gelten muß. Die Konsistenz ist hinreichend für die Konvergenz des Verfahrens.

Man unterscheidet bei Einschrittverfahren zwischen dem lokalen Diskretisierungsfehler

$$\delta_{i+1} := y(x_{i+1}) - y(x_i) - h\Phi(x_i, y(x_i), h)$$

und dem globalen Fehler

$$\varepsilon_i := y(x_i) - y_i.$$

Ist Φ bezüglich y Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstanten L , so läßt sich der globale Fehler durch den lokalen Diskretisierungsfehler abschätzen gemäß

$$|\varepsilon_i| \leq \frac{D}{hL} e^{(x_i - x_0)L}$$

mit

$$D \geq \max_{1 \leq k \leq i} \delta_k.$$

Ein Einschrittverfahren besitzt die Fehlerordnung p , falls $D = O(h^{p+1})$ und damit $|\varepsilon_i| = O(h^p)$ ist. Bekannteste Beispiele weiterer Einschrittverfahren sind die Runge-Kutta-Verfahren.

Schließlich kann man die gesamte Vorgehensweise auch auf Systeme von Differentialgleichungen anwenden: Wir betrachten zu stetigem $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0. \quad (2)$$

Man wählt auch hier eine Schrittweite $h > 0$ und eine Abbildung $\Phi : C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ und berechnet Näherungswerte \mathbf{y}_i für die Lösung $\mathbf{y}(x_i)$ von (2), indem man rekursiv definiert

$$\mathbf{y}_{i+1} := \mathbf{y}_i + h \Phi(\mathbf{f}, \mathbf{y}_i, x_i).$$

Eine Fülle weiterer Informationen über derartige Verfahren findet man in der nachfolgend angegebenen Literatur.

- [1] Hairer, E.; Norsett, S.P.; Wanner, G.: Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems. Springer-Verlag Berlin/Heidelberg, 1987.
- [2] Lambert, J.D.: Numerical Methods for Ordinary Differential Systems. John Wiley and Sons Chichester, 1991.
- [3] Stoer, J.; Bulirsch, R.: Einführung in die Numerische Mathematik II. Springer-Verlag Heidelberg/Berlin, 1978.

einseitig stetig, Eigenschaft einer reellen Funktion, entweder linksseitig stetig oder rechtsseitig stetig zu sein.

Der Begriff läßt sich unter den dortigen Annahmen mit Hilfe \mathcal{A} einseitiger Grenzwerte einfach wie folgt definieren: Hat man $x_0 \in D$, so heißt f in x_0 genau dann linksseitig stetig, wenn

$$f(x) \rightarrow f(x_0) \quad (x_0 > x \rightarrow x_0)$$

gilt, wenn also der linksseitige Grenzwert von f in x_0 existiert und gleich dem Funktionswert $f(x_0)$ ist. Ohne Bezug auf den Grenzwert lautet die Definition allgemeiner: f in x_0 linksseitig stetig \Leftrightarrow

$$[\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : [0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon].$$

Hier wird also nicht verlangt, daß sich x_0 durch (von x_0 verschiedene) Punkte aus D von links aus

approximieren läßt. Dabei ist natürlich $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ vorausgesetzt, wobei noch wesentlich allgemeinere Zielbereiche möglich sind.

Entsprechend heißt f rechtsseitig stetig in x_0 genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so existiert, daß $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit

$$0 < x - x_0 < \delta$$

gilt.

f ist in x_0 genau dann stetig, wenn f in x_0 rechts- und linksseitig stetig ist.

einseitige Ableitung, Überbegriff für die linksseitige Ableitung f'_- und die rechtsseitige Ableitung f'_+ einer auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierten Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

An den Stellen $a \in I$, für die sowohl $f'_-(a)$ als auch $f'_+(a)$ existiert und $f'_-(a) = f'_+(a)$ gilt, ist f differenzierbar und hat die Ableitung

$$f'(a) = f'_-(a) = f'_+(a).$$

Es gibt höchstens abzählbar viele Stellen $a \in I$, für die $f'_-(a)$ und $f'_+(a)$ existieren, aber

$$f'_-(a) \neq f'_+(a)$$

ist.

Das einfachste Beispiel einer Funktion, die an einer Stelle links- und rechtsseitig differenzierbar, aber nicht differenzierbar ist, ist die \mathcal{A} Betragsfunktion: Die Funktion $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ ist differenzierbar in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $|x'| = -1$ für $x < 0$ und $|x'| = 1$ für $x > 0$. An der Stelle 0 aber gilt

$$|0|'_- = -1 \neq 1 = |0|'_+.$$

einseitige Zerlegung, \mathcal{A} funktionale Dekomposition einer Booleschen Funktion.

einseitiger Grenzwert, Überbegriff für die Ausdrücke linksseitiger Grenzwert oder rechtsseitiger Grenzwert.

Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Unter der Annahme, daß zu einem $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Folge (x_n) in D mit $x_n < x_0$ und $x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$) existiert (x_0 muß von links aus durch Elemente von D approximierbar sein), ist der linksseitige Grenzwert wie folgt definiert:

$$f(x) \rightarrow \ell \quad (x_0 > x \rightarrow x_0) \Leftrightarrow \lim_{x_0 > x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D [0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_\ell^\varepsilon].$$

Hierbei ist $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ zugelassen. Für $\varepsilon \in (0, \infty)$ seien dabei

$$\mathcal{U}_\ell^\varepsilon := \{x \in \mathbb{R} : |x - \ell| < \varepsilon\}, \quad \text{falls } \ell \in \mathbb{R},$$

und

$$\mathcal{U}_\infty^\varepsilon := \left\{ x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{\varepsilon} \right\},$$

$$\mathcal{U}_{-\infty}^\varepsilon := \left\{ x \in \mathbb{R} : x < -\frac{1}{\varepsilon} \right\}.$$

Anstelle von

$$\lim_{x_0 > x \rightarrow x_0} f(x)$$

wird auch

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

geschrieben.

Natürlich hat man ganz analog – Übergang $x \mapsto -x$, d. h. Spiegelung an der y -Achse – unter der Voraussetzung, daß nun eine Folge (x_n) in D mit $x_n > x_0$ und $x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$) existiert, rechtsseitige Grenzwerte. Hier wird entsprechend statt $\lim_{x_0 < x \rightarrow x_0} f(x)$ auch $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ notiert.

Zwei Beispiele dazu:

Die Vorzeichen-Funktion

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x).$$

Es ist $f(0) = 0$, $\lim_{0 < x \rightarrow 0} f(x) = 1$ und $\lim_{0 > x \rightarrow 0} f(x) = -1$.

Die beiden einseitigen Grenzwerte existieren also, stimmen aber in 0 nicht überein.

Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \quad (x \in D := \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}).$$

$f(1)$ ist gar nicht erklärt! Es gilt $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.

Für den Beweis etwa der ersten Grenzwertaussage beachtet man, daß für $x \in D$

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1}$$

geschrieben werden kann. Strebt nun x von rechts ($x > 1$) gegen 1, so strebt $x - 1$ von rechts gegen 0, also $\frac{1}{x-1}$ gegen ∞ . Andererseits konvergiert $\frac{1}{x+1}$ gegen $\frac{1}{2}$. So folgt $f(x) \rightarrow \infty$.

einseitiges gleitendes Mittel, stochastischer Prozeß $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, der in der Form

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{t-k}$$

für $t \in \mathbb{Z}$ dargestellt werden kann, wobei die Zufallsvariablen der Folge $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ unkorreliert sind und den Erwartungswert $E(\varepsilon_t) = 0$ und die Varianz $\operatorname{Var}(\varepsilon_t) = 1$ besitzen. Weiterhin ist $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von in der Regel komplexen Zahlen mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty.$$

einseitiges Ideal, Teilmenge in einem (nicht-kommutativen) Ring, die bezüglich der Multiplikation von rechts (Rechtsideal) oder von links (Linksideal) ein Untermodul des Ringes ist.

Einselement, Element einer Menge, das, bei Anwendung einer Verknüpfung, „nichts ändert“, oder, anders formuliert, das neutrale Element bezüglich der Multiplikation \circ .

Genauer gilt: Gegeben sei eine Verknüpfung $\circ : M \times M \rightarrow M$ auf einer Menge M . Ein Einselement ist ein Element e , für das gilt

$$e \circ x = x \circ e = x$$

für alle $x \in M$.

Zumeist benutzt man den Begriff des Einselementes für den des Einselements bezüglich der Gruppenoperation, als weitestgehend synonyme Bezeichnung für das \mathcal{A} Einheitselement (bezüglich der Gruppenoperation).

Aus methodischen Gründen wird oft zunächst das Linkseinselement e_L definiert durch die Forderung: Für alle Gruppenelemente g gilt $e_L \cdot g = g$. Dann wird analog das Rechtseinselement e_R definiert durch $g \cdot e_R = g$.

Schließlich stellt man fest, daß das Produkt $e_L \cdot e_R$ sowohl gleich e_L als auch gleich e_R ist. Dieses Gruppenelement wird schließlich Einselement genannt und mit e bezeichnet.

Die Bezeichnung wird vor allem bei multiplikativen Gruppen angewandt. Wird die Gruppe als additive Gruppe geschrieben, ersetzt man in Anlehnung an die Identität $x + 0 = x$ den Begriff Einselement durch die Bezeichnung „Nullelement“.

Beispiel: Das Einselement einer Transformationsgruppe ist diejenige Transformation, bei der der Ausgangszustand gleich dem Endzustand ist.

Einselement einer Halbordnung, \mathcal{A} Halbordnung mit Einselement.

Einselement eines Verbandes, \mathcal{A} Verband mit Einselement.

1-Faktor, \mathcal{A} Faktortheorie.

1-Faktorisierungs-Vermutung, besagt, daß ein beliebiger k -regulärer \mathcal{A} Graph G mit $2n$ Ecken 1-faktorisierbar ist, falls $k \geq n$ gilt.

Der Ursprung dieser schönen, aber schwierigen und bis heute (2000) ungelösten Vermutung ist schon in den fünfziger Jahren zu finden. Die besten Teilergebnisse zu dieser Vermutung wurden in zwei unabhängig entstandenen Arbeiten von A.G. Chetwynd und A.J.W. Hilton (1989) sowie T. Niessen und L. Volkmann (1990) erzielt. In beiden Publikationen wird bewiesen, daß die 1-Faktorisierungs-Vermutung für

$$k \geq (\sqrt{7} - 1)n \approx 1,647n$$

gültig ist.

1-Faktor-Satz, \mathcal{A} Faktortheorie.

Einsiedlerpunkt, \mathcal{A} Grenzwerte einer Funktion.

Eins-Matrixnorm, \mathcal{A} Spaltensummennorm.

Einstein, Albert, Physiker und Mathematiker, geb. 14.3.1879 Ulm, gest. 18.4.1955 Princeton (New Jersey).

Einstein, Sohn eines Händlers für elektrotechnische Artikel, wuchs in München auf. Dort besuchte er auch das Gymnasium. Wegen geschäftlicher Schwierigkeiten siedelte die Familie nach Mailand über. 1895 folgte Einstein nach, ohne einen Schulabschluß erlangt zu haben. In Aarau (Schweiz) holte er das Abitur nach und studierte 1896 - 1900 an der ETH Zürich Mathematik und Physik. Fast zwei Jahre nach dem Examen als Physiklehrer blieb Einstein ohne feste Anstellung. Erst 1902 bekam er eine Stelle als Gutachter am Eidgenössischen Amt für geistiges Eigentum (Patentamt) in Bern. In dieser Dienststellung blieb er bis 1909, erwarb während dieser Zeit den philosophischen Doktorgrad (Zürich 1905) und die Lehrbefugnis für theoretische Physik (Bern 1908).

Das Jahr 1905 begründete Einsteins Weltruf. Er gab auf der Basis der statistischen Mechanik in seiner Dissertation „Eine neue Bestimmung der Moleküldimension“ an, berechnete die Wärmebewegung mikroskopischer Teilchen (↗ Brownsche Bewegung) – ein grundlegender Beitrag zum Beweis der Richtigkeit der Atomtheorie –, übertrug die Plancksche Quantenhypothese auf das Licht und konnte so eine Erklärung des lichtelektrischen Effektes geben. Für diese Arbeiten erhielt Einstein 1921 den Nobelpreis für Physik.

Noch bekannter als diese Untersuchungen wurde, auch von 1905, die Arbeit „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“. Darin postulierte Einstein

- die Lichtgeschwindigkeit ist konstant, und
- die physikalischen Gesetze sind in allen gleichförmig geradlinig zueinander bewegten Koordinatensystemen gleich.

Die spezielle Relativitätstheorie revolutionierte die theoretische Physik und hob die Newtonsche

Physik des absoluten Raumes und der absoluten Zeit auf. In einer ergänzenden Arbeit „Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?“ (1905) war auch die weltberühmte ↗ Einsteinsche Formel $E = mc^2$ enthalten, die zum Ausgangspunkt der Erschließung der Atomenergie wurde.

Einstein war bemüht, die spezielle Relativitätstheorie auch auf Drehbewegungen anzuwenden und die Gravitation darin einzubeziehen (↗ Allgemeine Relativitätstheorie). Die Lösung dieser Probleme gelang ihm 1915/16. Grundaussagen der allgemeinen Relativitätstheorie wurden 1919 bei der englischen Sonnenfinsternisexpedition bestätigt.

Im Jahre 1917 legte Einstein Untersuchungen vor, in denen er die Lehre von einem unbegrenzten, aber räumlich endlichen Kosmos postulierte, und begründete damit die relativistische Kosmologie. Schon seit 1915/16 versuchte er, zu einer nichtlinearen einheitlichen Feldtheorie zu gelangen, konnte jedoch die eminenten Schwierigkeiten mathematischer Art niemals überwinden.

Diese überragenden Leistungen haben oft vergessen lassen, daß Einstein seit 1907 weitere grundlegende Arbeiten zur Quantenphysik (spezifische Wärme fester Körper, Herleitung des Planckschen Strahlungsgesetzes durch statistische Methoden, u. a.) lieferte. Ebenso bedeutsam waren seine philosophischen Aussagen, die ihn als naturwissenschaftlichen Materialisten auswiesen und u. a. gegen die statistische Deutung der Quantenmechanik Bedenken vorbringen ließen.

1909 wurde Einstein zum ordentlichen Professor an der Universität Zürich berufen, ging 1911 als Professor für theoretische Physik nach Prag, dann 1912 an das Polytechnikum Zürich. Ab 1913/14 war er ordentliches und hauptamtliches Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften, ab 1914 Direktor des Kaiser Wilhelm-Institutes für Physik und Professor an der Berliner Universität. 1933 kehrte Einstein von einem Auslandsaufenthalt aus politischen Gründen nicht wieder nach Berlin zurück und emigrierte in die USA. Bis 1945 war er Professor für Theoretische Physik am Institute for Advanced Study in Princeton.

Mathematisch gesehen förderten die Einsteinschen Arbeiten vor allem die Entwicklung des Tensorkalküls.

Ende 1999 wurde Albert Einstein vom Magazin „Time“ sogar zur „Person des Jahrhunderts“ erklärt.

Einstein-Hilbert-Wirkung, die Wirkungsfunktion I_{EH} des gravitativen Anteils in der Einsteinschen ↗ Allgemeinen Relativitätstheorie. Es ist

$$I_{EH} = \int L_{EH} \sqrt{-\det g_{ij}} d^4 x,$$

wobei L_{EH} der durch

$$L_{EH} = \frac{R}{16\pi G}$$

definierte Einstein-Hilbert-Lagrangian ist.

Dabei ist R der Krümmungsskalar, und G bezeichnet die Newtonsche Gravitationskonstante. (Diese Schreibweise der Formel gilt in einem System von Maßeinheiten, in dem die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ ist. In der Literatur wird gelegentlich auch ein Minuszeichen auf der rechten Seite geschrieben. Das liegt daran, daß es keine einheitlichen Vorzeichenkonventionen für Metrik und Krümmung gibt. Welches Vorzeichen im konkreten Fall zu verwenden ist, ergibt sich aus nachfolgendem Kriterium.)

Die beiden bekanntesten Lösungen der Einsteinschen Gleichung sind:

1. Die nach dem Potsdamer Astronomen Karl Schwarzschild benannte Schwarzschildlösung von 1916

$$ds^2 = (1 - 2m/r)dt^2 - dr^2/(1 - 2m/r) - r^2(d\psi^2 + \sin^2\psi d\phi^2),$$

die eine kugelsymmetrische Lösung der Masse m darstellt, welche für $m > 0$ ein Schwarzes Loch beschreibt, dessen Horizont bei $r = 2m$ liegt und der von innen nach außen nur durch Überlichtgeschwindigkeit oder durch Quanteneffekte überschritten werden kann. (Diese Schreibweise gilt in Einheiten, bei denen $G = c = 1$ ist; im SI-System berechnet sich der Horizont gemäß

$$r = 2Gm/c^2).$$

2. Die nach dem russischen Physiker Alexander Friedmann benannte Friedmannlösung von 1923, hier spezialisiert auf ein räumlich ebenes Modell mit druckfreier Materie von positiver Ruhenergiedichte:

$$ds^2 = dt^2 - t^{4/3}(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Die Nullstelle $t = 0$ des räumlichen Anteils der Metrik ist hierbei das, was oft mit „Urknall“ (\nearrow Big Bang) bezeichnet wird.

Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon, die von den genannten Autoren aufgezeigte paradoxe Situation, daß sich nach Abschalten einer Wechselwirkung in einem System die Messung von genau einer von zwei nicht-kommutierenden Observablen A und B an dem einen so erhaltenen Teil des Systems zu der Aussage führt, der andere Teil befinde sich in einem Eigenzustand i. a. anderer nicht-kommutierender Observablen (ohne daß dazu eine Messung notwendig wäre).

Einstein-Raum, \nearrow Einsteinsche Mannigfaltigkeit.

Einsteinsche Feldgleichungen, grundlegendes, das Gravitationsfeld beschreibendes System partieller Differentialgleichungen der \nearrow Allgemeinen Relativitätstheorie.

Die Einsteinschen Feldgleichungen stellen eine Beziehung zwischen dem metrischen Fundamentaltensor g_{ik} des Raum-Zeit-Kontinuums, der das Gravitationsfeld beschreibt, und dem Energie-Impuls-Tensor T_{ik} her, der die physikalischen Eigenschaften der Materie charakterisiert.

Es sei S_{ij} der Ricci-Tensor, $s = g^{ij}S_{ij}$ die sog. skalare Krümmung, G die Gravitationskonstante und c die Lichtgeschwindigkeit. Die Gleichungen lauten

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}s = \frac{8\pi}{c^4}GT_{ik}.$$

Einsteinsche Formel, eine der auch in populärwissenschaftlichen Publikationen berühmtesten Gleichungen der Mathematik bzw. Theoretischen Physik. Sie lautet

$$E = m \cdot c^2.$$

Dabei ist E die in einem Bezugssystem gemessene Energie, m die Gesamtmasse und c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Deshalb wird diese Formel auch Energie-Masse-Äquivalenz genannt. Es ist zu beachten, daß sowohl E als auch m von der Wahl des Bezugssystems abhängig sind. Dagegen sind die Ruheenergie E_0 und die Ruhemasse m_0 vom Bezugssystem unabhängig.

Wenn sich das Teilchen und das Bezugssystem mit der Geschwindigkeit v gegeneinander bewegen, gilt die Beziehung

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

und analog

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Die Hauptanwendung der Einsteinschen Formel besteht in ihrer Anwendung bei Kernreaktionen: Kommt es bei einer Kernreaktion (z. B. Uranzerfall) zu einem Massendefekt, dann wird gemäß der Einsteinschen Formel eine Energie (z. B. kinetische Energie der Reaktionsprodukte) frei. Da gegenüber den Maßeinheiten des täglichen Lebens die Lichtgeschwindigkeit sehr groß ist, genügt schon ein sehr kleiner Massendefekt, um große Energien freizusetzen. Dieser Effekt wurde mit der Atombombe auf drastische Weise experimentell bestätigt.

Natürlich hat Einstein eine ganze Reihe von Formeln hergeleitet und veröffentlicht, insofern mag die Auswahl der hier beschriebenen Beziehung als „die“ Einsteinsche Formel zunächst etwas willkürlich erscheinen; jedoch ist die beschriebene

Gleichung wohl nicht zuletzt auch wegen ihrer Kürze und Prägnanz sicherlich die berühmteste aller seiner Formeln.

Einsteinsche Mannigfaltigkeit, *Einstein-Raum*, eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) , deren Ricci-Tensor ein konstantes Vielfaches des metrischen Fundamentaltensors ist.

Sind S_{ij} und g_{ij} die Komponenten des Ricci-Tensors bzw. des metrischen Fundamentaltensors in bezug auf ein lokales Koordinatensystem von M , so ist (M, g) eine Einsteinsche Mannigfaltigkeit, wenn es eine Konstante λ gibt mit

$$S_{ij} = \lambda g_{ij}.$$

Die Zahl λ wird manchmal die mittlere Krümmung von M genannt, darf aber nicht mit der mittleren Krümmung von Flächen im \mathbb{R}^3 verwechselt werden.

M ist genau dann eine Einsteinsche Mannigfaltigkeit, wenn die Ricci-Krümmung von M konstant ist.

Der Begriff der Einsteinschen Mannigfaltigkeit ist nur für Dimensionen $n \geq 4$ von eigenständigem Interesse, da er für $n = 2$ und $n = 3$ mit dem des Raumes konstanter Krümmung zusammenfällt. Für $n \geq 2$ ist jede Mannigfaltigkeit M konstanter Schnittkrümmung k eine Einsteinsche Mannigfaltigkeit mit der mittleren Krümmung

$$\lambda = (n - 1)k.$$

Das ursprüngliche Interesse an Einsteinschen Mannigfaltigkeiten kommt von der Interpretation der Einsteinschen Bedingung $S = 0$ als Feldgleichung eines massefreien Gravitationsfeldes (\nearrow Einsteinschen Feldgleichungen). Es gibt aber auch innermathematische Gründe für die besondere Rolle der Gleichung $S_{ij} = \lambda g_{ij}$. Diese liegen in der algebraischen Zerlegung des Raumes aller Krümmungstensoren in irreduzible Komponenten mit Methoden der Darstellungstheorie.

Es seien h und k zwei symmetrische Bilinearformen auf einem n -dimensionalen Vektorraum E , und q eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf E . Wir bezeichnen mit $h * k$ die durch

$$(h * k)(x, y, z, t) = h(x, z)k(y, t) + h(y, t)k(x, z) - h(x, t)k(y, z) + h(y, z)k(x, t)$$

gegebene Operation, die jedem Paar (h, k) die Multilinearform $h * k$ vierter Stufe zuordnet.

Ferner sei $\mathcal{C}(E) \subset \otimes^4 E^*$ der Raum der Multilinearformen vierter Stufe, die die erste \nearrow Bianchi-Identität erfüllen und die Symmetrieeigenschaften des Riemannschen Krümmungstensors haben. Die Operation $h * k$ ist eine bilineare Abbildung, die jedem Paar symmetrischer Bilinearformen ein Element aus $\mathcal{C}(E)$ zuordnet.

$\mathcal{C}(E)$ ist ein Vektorraum, auf dem die Gruppe $O(q)$ der linearen Abbildungen, die das Skalarprodukt q invariant lassen, wirkt. Dann zerfällt $\mathcal{C}(E)$ in die direkte Summe

$$\mathcal{C}(E) = \mathcal{U}(E) \oplus \mathcal{Z}(E) \oplus \mathcal{W}(E)$$

von drei irreduziblen invarianten Unterräumen. Dabei ist $\mathcal{U}(E) = \{rq * q; r \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{Z}(E)$ ist die Menge aller möglichen Produkte $q * h$ von q mit einer symmetrischen Bilinearform h auf E , und $\mathcal{W}(E)$ ist der Raum aller Multilinearformen $r(x, y, z, t)$ aus $\mathcal{C}(E)$ mit

$$\sum_{i=1}^n r(x, e_i, y, e_i) = 0,$$

wobei e_1, \dots, e_n eine in bezug auf q orthogonale Basis von E ist.

Diese Zerlegung überträgt sich auf das entsprechende Tensorbündel einer jeden n -dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) , sodaß der Krümmungstensor R von (M, g) eine analoge invariante Zerlegung

$$R = R_{\mathcal{U}(E)} \oplus R_{\mathcal{Z}(E)} \oplus R_{\mathcal{W}(E)}$$

in drei Komponenten besitzt.

Einsteinsche Mannigfaltigkeiten sind dadurch charakterisiert, daß die $R_{\mathcal{Z}(E)}$ -Komponente des Riemannschen Krümmungstensors Null ist.

[1] Besse, A.L.: Einstein Manifolds. Springer-Verlag Heidelberg/Berlin, 1987.

Einsteinsche Summationskonvention, \nearrow Einsteinsche Summenkonvention.

Einsteinsche Summenkonvention, *Einsteinsche Summationskonvention*, eine Vereinfachung der Formeln beim Rechnen mit Tensoren, vor allem in der Riemannschen Geometrie gebräuchlich.

Das Wesen dieser Vereinfachung besteht im Weglassen der Summenzeichen. Über die Summationsindizes wird generell vereinbart, daß sie von 1 bis zur Dimension n der jeweiligen Mannigfaltigkeit laufen, und daß nur über solche Indizes summiert wird, die zweimal auftreten.

Der Ausdruck $\text{tr}(A) = \alpha_i^i$ steht z. B. als Abkürzung für die Spur $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^i$ einer quadratischen Matrix $A = ((\alpha_{ij}^i))$, $i, j = 1, \dots, n$.

Sind T_{kl}^{ij} , S^{lm} und R_i^k die Komponenten von drei Tensoren T, S, R , so wird durch die Gleichung

$$W_i^{kjm} = T_{kl}^{ij} S^{lm} R_i^k = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n T_{kl}^{ij} S^{lm} R_i^k$$

ein neuer Tensor W mit den Komponenten W_i^{kjm} definiert.

Einsteinscher Additionssatz für Geschwindigkeiten, Regel zur „Addition“ von Geschwindigkeiten in der speziellen Relativitätstheorie.

Die naive Addition von Geschwindigkeiten nach der Regel $v = v_1 + v_2$ hat unter den Gegebenheiten der Relativitätstheorie keinen Sinn mehr. Vielmehr gilt hier der Einsteinsche Additionssatz, der besagt, daß die Superposition zweier Geschwindigkeiten nach der Formel

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

erfolgt; wie üblich bezeichnet c hier die Lichtgeschwindigkeit.

Einstein-Tensor, derjenige Anteil der Krümmung einer Raum-Zeit, der in der Einsteinschen Gleichung auftritt, üblicherweise mit E_{ij} bezeichnet.

Es gilt

$$E_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{2},$$

dabei ist R_{ij} der Ricci-Tensor, R der Krümmungsskalar, und g_{ij} der metrische Tensor. Der Einstein-Tensor ergibt sich durch Variationsableitung der \mathcal{A} -Einstein-Hilbert-Wirkung nach g_{ij} . Da der Einstein-Hilbert-Lagrangian ein Skalar ist, ist der Einstein-Tensor divergenzfrei, d. h. es gilt

$$E_{ij}^j = 0.$$

Diese Identität ist die geometrische Grundlage für die infinitesimale Form der Erhaltungssätze für Energie und Impuls.

Eins-Vektornorm, Bezeichnung für die durch (1) definierte Norm auf dem \mathcal{A} -euklidischen Raum \mathbb{R}^n ($x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$):

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|. \quad (1)$$

Eine andere Bezeichnung für die Eins-Vektornorm ist Summennorm.

Eintafelprojektion, \mathcal{A} -darstellende Geometrie.

Eintrittszeit, die für jedes $A \in \mathcal{E}$ durch

$$T_A : \Omega \ni \omega \rightarrow \inf\{t \in T : X_t(\omega) \in A\} \in \overline{\mathbb{R}}_0^+$$

definierte Abbildung, wobei $(X_t)_{t \in T}$ für $T = \mathbb{N}_0$ oder $T = \mathbb{R}_0^+$ ein der Filtration $(\mathcal{A}_t)_{t \in T}$ adaptierter Prozeß auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) mit Zustandsraum (E, \mathcal{E}) ist. Ist

$$\{t \in T : X_t(\omega) \in A\}$$

leer, so gilt $T_A(\omega) = \infty$.

T_A gibt den ersten Zeitpunkt an, zu dem X_t in A liegt.

Einzelschaden, \mathcal{A} -individuelles Modell der Risikotheorie.

Einzelschrittverfahren, \mathcal{A} -Gauß-Seidel-Verfahren.

Einzigkeitssatz für natürliche Zahlen, die Tatsache, daß die natürlichen Zahlen im im folgenden näher definierten Sinn auf nur eine Weise charakterisiert werden können.

Sind A und B Mengen mit ausgezeichneten Elementen $1_A \in A$ bzw. $1_B \in B$ und Nachfolgerfunktionen $N_A : A \rightarrow A$ bzw. $N_B : B \rightarrow B$, dann sind sie kanonisch isomorph: Es gibt genau eine bijektive Abbildung $\varphi : A \rightarrow B$ mit $\varphi(1_A) = 1_B$ und $N_B \circ \varphi = \varphi \circ N_A$. Dies beweist man mit Hilfe des Rekursionsatzes.

Anders gesagt: Die Menge der natürlichen Zahlen ist als Menge mit einem ausgezeichneten Element $1 \in \mathbb{N}$ und Nachfolgerfunktion $N : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bis auf Isomorphie eindeutig charakterisiert.

Eisenhart, Luther Pfahler, amerikanischer Mathematiker, geb. 13.1.1876 York (Pennsylvania, USA), gest. 28.10.1965 Princeton (New Jersey, USA).

Eisenhart studierte von 1892 bis 1896 am Gettysburg College und von 1897 bis 1900 an der Johns-Hopkins-Universität. Von 1909 bis 1945 arbeitete an der Princeton University.

Er beschäftigte sich zunächst mit infinitesimalen Flächendeformationen, ab 1921 dann mit Riemannscher Geometrie und deren Verallgemeinerungen. 1949 erschien sein auch heute noch geschätztes Buch „Riemannian Geometry“.

1933 veröffentlichte Eisenhart „Continuous Groups of Transformations“ und setzte damit seine früheren Arbeiten über Lie-Gruppen und Lie-Algebren fort.

Eisenhart war von 1931 bis 1932 Präsident der American Mathematical Society.

Eisenstein, Ferdinand Gotthold Max, deutscher Mathematiker, geb. 16.4.1823 Berlin, gest. 11.10.1852 Berlin.

Eisenstein wurde in einer jüdischen Familie geboren, die aber vor seiner Geburt zum Protestantismus übergetreten war. Sein Vater hatte wenig Erfolg bei der Realisierung verschiedener Geschäftsideen. Eisenstein wuchs in ärmlichen Verhältnissen auf und war sehr oft krank. Seine fünf jüngeren Geschwister starben im Kindesalter.

Eisenstein zeigte schon frühzeitig Interesse für Mathematik. Von 1833 bis 1842 besuchte er in Charlottenburg und in Berlin die Schule und hörte als Gymnasiast zusätzlich Vorlesungen an der Berliner Universität bei Dirichlet. Außerdem studierte er die Werke von Euler, Lagrange und Gauß. Im Sommer 1842 begleitete er seine Mutter nach England, wo der Vater seit zwei Jahren versuchte, eine neue Existenz aufzubauen. Über Wales und Irland kehrte er mit der Mutter nach Berlin zurück, zuvor hatte er in Irland die Bekanntschaft Hamiltons gemacht und anknüpfend an Gauß' „Disquisitiones arithmeticae“ eigene Forschungen über For-