Klassische Texte der Wissenschaft

Stefan Müller-Stach *Hrsg.*

# Richard Dedekind
# Was sind und was sollen die Zahlen? Stetigkeit und Irrationale Zahlen

Springer Spektrum

Klassische Texte der Wissenschaft

**Begründet von**
Olaf Breidbach (†)
Jürgen Jost

**Herausgegeben von**
Jürgen Jost
Armin Stock

Die Reihe bietet zentrale Publikationen der Wissenschaftsentwicklung der Mathematik, Naturwissenschaften, Psychologie und Medizin in sorgfältig edierten, detailliert kommentierten und kompetent interpretierten Neuausgaben. In informativer und leicht lesbarer Form erschließen die von renommierten WissenschaftlerInnen stammenden Kommentare den historischen und wissenschaftlichen Hintergrund der Werke und schaffen so eine verlässliche Grundlage für Seminare an Universitäten, Fachhochschulen und Schulen wie auch zu einer ersten Orientierung für am Thema Interessierte.

Mehr Informationen zu dieser Reihe auf http://www.springer.com/series/11468

Stefan Müller-Stach
Herausgeber

# Richard Dedekind

## Was sind und was sollen die Zahlen?
## Stetigkeit und Irrationale Zahlen

Springer Spektrum

*Herausgeber*
Stefan Müller-Stach
Institut für Mathematik, FB 08
Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Mainz
Deutschland

Klassische Texte der Wissenschaft

ISBN 978-3-662-54338-2    ISBN 978-3-662-54339-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-54339-9

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Originaltext ursprünglich erschienen unter: Dedekind, Richard: Was sind und was sollen die Zahlen? Stetigkeit und Irrationale Zahlen, Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag 1965


Planung: Dr. Annika Denkert

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Deutschland
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

# Vorwort

Julius Wilhelm Richard Dedekind ist in vielerlei Hinsicht eine große Figur in der Geschichte der Mathematik. In der Algebraischen Zahlentheorie und in den Grundlagen der Mathematik ist er einer der seltenen Begründer einer ganzen Theorie. In der Gruppentheorie und weiteren Teilen der Algebra hat er die vorhandene Theorie maßgeblich weiterentwickelt. So geht etwa der Ring- und Körperbegriff auf ihn zurück, und er hat die ersten Vorlesungen über Galoistheorie in den Wintersemestern 1856/57 und 1857/58 gehalten. Edmund Landau hat diese Ausnahmestellung in seiner Gedächtnisrede [142] vom 12. Mai 1917 ausgedrückt, indem er sagte, dass ,,kein Lob die Größe des Verstorbenen erreicht".

Im Jahre 1888 erschien das Buch *Was sind und was sollen die Zahlen?*, nachdem bereits 1872 – ebenfalls im Vieweg Verlag – das kleinere Büchlein *Stetigkeit und Irrationale Zahlen* erschienen war. An diesen Werken hatte Dedekind seit 1872 (bzw. 1858) gearbeitet. Sie enthalten seine gesamten publizierten Beiträge zu den Grundlagen der Mathematik.

Im ersten Buch *Stetigkeit und Irrationale Zahlen* skizziert Dedekind die Konstruktion der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ aus der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit Hilfe der Dedekindschen Schnitte. Die wichtigsten Eigenschaften der reellen Zahlen werden ebenfalls dargelegt, insbesondere die Schnittvollständigkeit, die für Dedekind gleichbedeutend mit der ,,Stetigkeit" ist und damit die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zu einem Modell der *stetigen geraden Linie* werden lässt. Schließlich deutet er an, wie man daraus die Grundbegriffe der reellen Analysis begründen kann.

Das zweite und umfangreichere Buch *Was sind und was sollen die Zahlen?* ist zwischen 1872 und 1888 entstanden und enthält noch grundlegendere Themen. Es beginnt mit einer kurzen Erklärung der Grundbegriffe der Mengenlehre und Abbildungstheorie. Mit Hilfe der Theorie der Ketten definiert Dedekind ,,einfach unendliche Systeme" als Modelle der natürlichen Zahlen und formuliert die wesentlichen Eigenschaften dieser Systeme in axiomatischer Form, wie wir heute sagen würden. Diese Vorgehensweise Dedekinds setzt die Existenz von unendlichen Mengen voraus, die er als Satz 66 formuliert

und beweist. Sein „Beweis" dieses Satzes ist aus vielerlei Gründen problematisch, zum Beispiel ist das Argument von mengentheoretischen Antinomien betroffen. Heute postuliert man die Existenz unendlicher Mengen durch ein Axiom der Mengenlehre. Als Anwendung seiner Theorie erhält Dedekind alle wesentlichen Eigenschaften der natürlichen Zahlen und als vielleicht bedeutendstes Resultat den *Rekursionssatz*.
Diese beiden Bücher waren so einflussreich, dass Dedekind – neben Gottlob Frege – oft zu den Begründern des *Logizismus*[1] gezählt wird.
In einem persönlichen Rückblick beschrieb David Hilbert die kritische Rezeption von Dedekinds zweitem Buch sehr deutlich und ging speziell auf den Gegensatz zu Kronecker ein [117, S. 487]:

> Im Jahre 1888 machte ich als junger Privatdozent von Königsberg aus eine Rundreise an die deutschen Universitäten. Auf meiner ersten Station, in Berlin, hörte ich in allen mathematischen Kreisen bei jung und alt von der damals eben erschienenen Arbeit Dedekinds *Was sind und was sollen die Zahlen?* sprechen – meist in gegnerischem Sinne. Die Abhandlung ist neben der Untersuchung von Frege der wichtigste erste tiefgreifende Versuch einer Begründung der elementaren Zahlenlehre. Etwa zu gleicher Zeit, also schon vor mehr als einem Menschenalter, hat Kronecker eine Auffassung klar ausgesprochen und durch zahlreiche Beispiele erläutert, die heute im wesentlichen mit unserer finiten Einstellung zusammenfällt. Damals haben wir jungen Mathematiker, Privatdozenten und Studierende, den Sport getrieben, auf transfinitem Wege geführte Beweise mathematischer Sätze nach Kroneckers Muster ins Finite zu übertragen. Kronecker machte nur den Fehler, die transfinite Schlußweise für unzulässig zu erklären.

Hilbert hat später sein eigenes Programm für die Grundlagen der Mathematik entwickelt, das sogenannte *Hilbertsche Programm*. Dedekind und andere Vorgänger auf dem Gebiet der Grundlagen der Mathematik, wie Cantor und Frege, hat er im Nachhinein aufgrund der Probleme, die die Antinomien in der Mengenlehre verursacht haben, zuweilen kritisch[2] kommentiert.
Richard Dedekind waren solche öffentlichen Bewertungen noch lebender Zeitgenossen in der Regel fremd. Selbst in eigenen, privaten Notizen oder in Briefen urteilte er meist wohlwollend und freundlich über andere Kollegen, selbst wenn er manche ihrer Worte oder Taten bestimmt nicht geschätzt haben konnte. Dies trifft auf seine Korrespondenz mit Georg Cantor über die Grundlagen der Mengenlehre zu und ebenso auf seinen berühmten Brief an Hans Keferstein, den wir in Anhang B abgedruckt haben. Lediglich der unveröffentlichte Aufsatz „Über den Begriff des Unendlichen" mit einer Entgegnung an Keferstein [214] enthält deutlichere Worte.
Vielleicht noch bemerkenswerter war Dedekinds mathematischer Stil. Seine Texte über die Gruppentheorie, die Algebraische Zahlentheorie und die Grundlagen der Mathematik sind in ihrer Klarheit und Weitsichtigkeit äußerst bemerkenswert. Dies sieht man auch daran, wie schwer die Zeitgenossen sich taten, den eigentlichen Gehalt zu verstehen. Dedekinds Stil und Arbeitsweise hat sich im Lauf der Jahre verändert, aber immer blieb seine Vorliebe

---

[1] Näheres dazu in Abschnitt 1.2.4.

[2] Siehe Hilberts Aufsatz [112, S. 1–2].

für Mengen- und Abbildungstheorie und seine abstrakte Vorgehensweise bestehen. Im Hinblick auf das zwanzigste Jahrhundert kann man sagen, dass Dedekind bereits viele charakteristische Aspekte des Stils von Alexander Grothendieck und der Bourbaki-Gruppe vorweggenommen hat.

Dedekinds Beiträge zur Mathematik wurden nach einigen Jahren für selbstverständlich gehalten und von vielen Mathematikern benutzt, in manchen Fällen ohne ihn ausreichend zu zitieren. Eine der am häufigsten gewürdigten Leistungen von Dedekind ist die strenge Begründung der Algebraischen Zahlentheorie mit Hilfe der Idealtheorie und die Klärung vieler weiterer Begriffe in der Algebra. Jedoch, und das ist ein Punkt, den wir in diesem Buch betonen wollen, ist auch sein Beweis des Rekursionssatzes eine herausragende Leistung innerhalb der Grundlagen der Mathematik. In diesem Buch werden wir auf Thoralf Skolem eingehen und die Entstehung der Rekursionstheorie im Zusammenhang mit Dedekind beleuchten. Der Rekursionssatz hat erst im zwanzigsten Jahrhundert seine volle Entfaltung erfahren. Die Vorgehensweise von Dedekind, die er mit Hilfe der Semantik (d.h. im Modell) der Mengenlehre entwickelt hatte, wird oft mit den Leistungen von Giuseppe Peano verglichen. Dieser hatte aber, genauso wie bei seinen axiomatischen Untersuchungen der Geometrie, eher den logisch-syntaktischen Aspekt im Blick und weniger den semantischen. Die Geschichte von Grandjots Einwand zu Peanos Axiomen der natürlichen Zahlen, den wir in Abschnitt 5.3 genauer erläutern werden, ist in dieser Beziehung aufschlussreich. Wenn die Dedekind-Peano-Arithmetik häufig nur Peano-Arithmetik genannt wird, ist das nach unserer Meinung eine Verfälschung der Entstehungsgeschichte. Solche Entwicklungen haben dazu geführt, dass Dedekinds Arbeiten in den Grundlagen der Mathematik, besonders in der logischen Theorie der Dedekind-Peano-Arithmetik, in der Mengenlehre und auch in der Rekursionstheorie (Theorie der Berechenbarkeit) oft nicht richtig eingeordnet wurden. Es ist historisch interessierten Kollegen wie Hao Wang zu verdanken, dass einige dieser fehlerhaften Einschätzungen aufgeklärt wurden. Wir wollen die Rezeptionsgeschichte im Hinblick auf Dedekindsche Arbeiten zu den Grundlagen der Mathematik in diesem Buch zu korrigieren versuchen, ohne dabei die Leistungen Peanos in der mathematischen Logik oder die anderer Mathematiker wie Skolem geringzuschätzen.

Der Aufbau dieses Buches folgt der bewährten Reihenfolge aus anderen Bänden der Reihe ,,Klassische Texte der Wissenschaft". Zunächst geben wir eine kurze Biographie von Dedekind in Kapitel 1, und stellen seine Person und sein Wirken in einen historischen Kontext. Insbesondere gehen wir auf Dedekinds Umfeld und seine Briefwechsel mit berühmten Kollegen ein. Aus seinem Habilitationsvortrag von 1854 untersuchen wir einige programmatische Thesen und stellen sie, ebenso wie einige andere Behauptungen über Dedekinds Persönlichkeit, an dieser Stelle schon zur Diskussion. Das Kapitel 2 widmet sich auf eine einführende Art den Dedekindschen Untersuchungen zum Zahlbegriff, insbesondere den Dedekindschen Schnitten und dem Rekursionssatz. Dedekinds Arbeiten zur Algebraischen Zahlentheorie werden am Rande gestreift. Das Kapitel 3 besteht aus den Abdrucken der letzten Auflagen der beiden Bücher. In Kapitel 4 werden die Inhalte der beiden Werke ausführlich erläutert und nochmals zusammengefasst. Die historische Deutung und moderne Interpretation wechseln sich dabei oft ab. Kapitel 5 enthält viele Details aus der Rezeptionsgeschichte der beiden Bücher, insbesondere im Hinblick auf die Rekursionstheorie und die Dedekind-Peano-Arithmetik. Der Einfluss Dedekinds zeigt sich natürlich besonders in der Wirkungsgeschichte, die in Kapitel 6 behandelt wird. Darin gehen wir auf die Weiterentwicklung der Mengenlehre und Logik ein, heben die Rekursionstheorie als eigene Disziplin mit ihrer Wirkung im Hilbertschen Programm und der Theorie der Berechenbarkeit besonders heraus und geben einen Ausblick auf die heutige Forschung in der Zahlentheorie. Viele weitere interessante Aspekte des historischen und philosophischen Diskurses über Dedekind werden in diesem Buch nur am Rande erwähnt. Zum Ausgleich wurde eine ausführliche Bibliographie angefügt, und es wurden Verweise zur heutigen Forschung gegeben.

Noch ein Wort zur Notation: Wir folgen in allen zitierten Quellen der originalen Rechtschreibung. Mathematische Resultate werden jedoch oft in heutiger Weise notiert, um die Lesbarkeit zu verbessern.

Ich möchte einen herzlichen Dank an Jürgen Jost aussprechen für die Anregung, das vorliegende Buch in der Reihe ,,Klassische Texte der Wissenschaft” zu verfassen. Der Verlag hat mich dabei durch Annika Denkert, Agnes Herrmann, Ulrike Schmickler-Hirzebruch und eine Copyeditorin hervorragend betreut. Die folgenden Personen gaben mir auf unterschiedliche Weise hilfreiche (und teils unschätzbare) Kommentare und Hinweise zu vorangegangenen Versionen dieses Buches: Oliver Deiser, Sabine Fähndrich, José Ferreirós, Steffen Fröhlich, Emmylou Haffner, Nick Haverkamp, Hans Niels Jahnke, Reinhard Kahle, Eva Kaufholz, Franz Lemmermeyer, Sieglinde Müller-Stach, Walter Purkert, David Rowe, Tilman Sauer, Norbert Schappacher, Winfried Scharlau, Hans-Helmut Scheel, Katrin Scheel, Dirk Schlimm, Wilfried Sieg, Thomas Sonar, Christian Tapp und Klaus Volkert. Bärbel Mund und ihre Mitarbeiter von der Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen haben mir die Möglichkeit eines ausführlichen Studiums von Dedekinds Nachlass gegeben und die Erlaubnis zum Abdruck einiger kleiner Ausschnitte daraus erteilt. Josef Kurr von der Staatsbibliothek Preußischer Kulturbesitz in Berlin hat mir kurzfristig Einsicht in Zariskis italienische kommentierte Ausgabe verschafft. Die Johannes Gutenberg-Universität Mainz und die Deutsche Forschungsgemeinschaft haben mich seit 2013 in meiner Arbeit an diesem Buch unterstützt. Allen genannten Personen und Institutionen bin ich äußerst dankbar für ihre großzügige Unterstützung.

Mainz, Februar 2017 *Stefan Müller-Stach*

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1
# Historische Einführung

> Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden ...
> Indem ich die Arithmetik (Algebra, Analysis) nur einen Teil der Logik nenne ...
> Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes ...
>
> Vorwort zu *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888)

In diesem Kapitel wollen wir besonders auf die historischen Umstände von Richard Dedekinds Leben und seine Beziehungen zu Zeitgenossen eingehen. Wir werden sehen, dass Dedekind sich aus seinem Umfeld durch viele seiner Charaktereigenschaften deutlich hervorgehoben hat. Insbesondere der mathematische Stil und die Art seiner Kommunikation mit Kollegen zeugen davon. Dedekind ist in der Literatur[1] schon an vielen Stellen ausführlich gewürdigt worden. Sein wissenschaftlicher Einfluss ist bis in die heutige Zeit in der Mathematik, der Philosophie, der Logik und der Informatik spürbar. Dedekinds wissenschaftliche Leistungen werden wir in den folgenden Kapiteln eingehend würdigen.

[1] Da sind insbesondere der Nachruf (Gedächtnisrede) [142] von Edmund Landau, der Gedenkband von Winfried Scharlau zum 150. Geburtstag [198], die Gedenkschrift der Industrie- und Handelskammer Braunschweig [102] und die beiden einschlägigen Bücher von Pierre Dugac [59] und José Ferreirós [73] zu nennen. Weiterhin sei der Leser auf die beiden Bücher von Leo Corry [44, 45] und den Band [200] von Katrin Scheel verwiesen sowie auf die ausführliche Dissertation von Emmylou Haffner [97].


S. Müller-Stach (Hrsg.), *Richard Dedekind,* Klassische Texte der Wissenschaft,
DOI 10.1007/978-3-662-54339-9_1

## 1.1 Biographie

**Lebensdaten:** Richard Dedekind wurde am 6. Oktober 1831 in Braunschweig geboren und starb dort am 12. Februar 1916.
Aus Ahnenverzeichnissen geht hervor, dass Ferdinand Dedekind, der Autor des recht einflussreichen lateinischen Gedichts ,,Grobianus – De morum simplicitate" von 1549, ein Vorfahre von Richard Dedekind war.
Dedekinds Großvater väterlicherseits war Johann Julius Wilhelm Dedekind, ein Arzt und ,,Physicus". Er entdeckte den hohen Zuckergehalt der weißen Rübe. Diese Entdeckung wurde ihm jedoch nie zugesprochen, da zehn Jahre später ein Chemiker namens Franz Carl Achard die Zuckergewinnung wieder ,,entdeckte" und eine Fabrik damit aufbaute. Dedekinds Großvater starb recht früh in Verbitterung darüber und hinterließ seiner Familie nichts. Dedekinds Vater Julius Levin Ulrich Dedekind (1795–1872) wuchs deshalb ohne Vater in Armut auf und erkämpfte sich sein juristisches Studium hart. Er war Hochschullehrer am Collegium Carolinum.
Dedekinds Mutter Caroline (1799–1882) stammte aus der großbürgerlichen Familie Emperius. Ihr Vater Johann Friedrich Ferdinand Emperius (1759–1822) war ebenfalls Professor für klassische Literatur am Collegium Carolinum und eine weltoffene, weitgereiste Persönlichkeit. Er war verheiratet mit Dorothea Sophie Henriette Eisenbiel (1771–1820). Im Auftrag des Herzogs von Braunschweig holte er napoleonische Kriegsbeute aus Frankreich nach Wolfenbüttel und Braunschweig zurück.
Dedekind hatte drei ältere Geschwister: den Bruder Adolf (1829–1909), Jurist und späterer Landgerichtspräsident, sowie die beiden Schwestern Julie (1825–1914), die sich schriftstellerisch betätigte, und die früh verstorbene Mathilde (1827–1860). Mit Julie (und mit seiner Mutter bis 1882) lebte er bis zu deren Tod 1914 zusammen. Julie war eine erfolgreiche Schriftstellerin, die sich politisch und sozial engagierte. Sie ist eine der Mitbegründerinnen der Inneren Mission in Braunschweig und hat sich stark für Frauenrechte und ein Rettungshaus für Kinder eingesetzt [53]. Sowohl Dedekind als auch Julie blieben unverheiratet. Der Bruder Adolf hatte dagegen eine Familie, die Dedekind gerne und oft besuchte. Das Elternhaus hat Dedekind und seine Geschwister künstlerisch und im Sinne der Wissenschaft geprägt. Dedekind pflegte eine lebenslange Freundschaft mit Hans Zincke (genannt Sommer), der ein Stiefsohn des Gründers der Voigtländer-Werke war und als Musiker und Komponist arbeitete. Dedekind war ebenfalls musikalisch begabt und spielte ausgezeichnet Cello und Klavier.[2]

**Studium und Ausbildung:** Richard Dedekind studierte von 1848 bis 1850 am Collegium Carolinum in Braunschweig, das ab 1862 zum Polytechnikum

[2] Weitere biographische Daten findet man in den beiden Artikeln von Heiko Harborth und Thomas Sonar, in Scharlaus Gedenkschrift [102], in Landaus Gedächtnisrede [142], in Scheels Band [200] sowie in Ilse Dedekinds Aufsatz in [198].

wurde, also eine Technische Hochschule, und die heute die Technische Universität Braunschweig ist.[3] Von 1850 bis 1852 folgte ein Studium an der Georg-August-Universität in Göttingen. Dedekind hörte mathematische Vorlesungen bei Moritz Abraham Stern[4], Georg Karl Justus Ulrich, Johann Benedict Listing, Carl Wolfgang Benjamin Goldschmidt und seinem späteren Doktorvater Carl Friedrich Gauß[5]. Er hörte auch Vorlesungen in Physik bei Gustav von Quintus-Icilius und Wilhelm Weber sowie in Philosophie bei Hermann Lotze. Dedekind verkehrte privat besonders gerne bei den Familien von Wilhelm Weber und des Anatomen Friedrich Gustav Jacob Henle. Er war von 1850 bis 1902 Mitglied in der Burschenschaft Brunsviga, die von seinem Bruder Adolf 1848 mitbegründet worden war. Im Jahr 1852 erfolgte Dedekinds Promotion in Göttingen als letzter Doktorand von Gauß. Die Dissertation trägt den Titel ,,Über die Elemente der Theorie der Eulerschen Integrale" und ist abgedruckt in den *Gesammelten Werken* [56, Band 1, S. 1]. Dedekind habilitierte sich 1854 in Göttingen. Der Titel der Habilitationsschrift lautete ,,Über die Transformationsformeln für rechtwinklige Koordinaten", der des mündlichen Vortrags war ,,Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik", abgedruckt in [56, Band 3, S. 428]. Von 1854 bis 1858 war Dedekind Privatdozent in Göttingen. Besonders enge Beziehungen hatte er zu den dortigen Kollegen Peter Gustav Lejeune Dirichlet und Bernhard Riemann, die den mathematischen Ruf Göttingens zusammen mit Gauß (und Dedekind) nachhaltig geprägt haben.

**Dedekinds Wirken als Professor:** Von 1858 bis 1862 war Dedekind Ordinarius am Polytechnikum in Zürich. Anschließend kehrte er nach Braunschweig zurück und blieb von 1862 bis 1894 Professor am Collegium Carolinum (bzw. dem Polytechnikum). Von 1872 bis 1875 war Dedekind dessen Direktor und unterstützte die Weiterentwicklung dieser Institution auf vielfältige Weise. Dedekinds Schriftenverzeichnis, siehe Anhang A, umfasst nach seinen eigenen Angaben 45 Publikationen. Davon sind etwa die Hälfte ,,echte" wissenschaftliche Bücher und Artikel in Journalen, die meist in *Crelles Journal* oder in den *Mathematischen Annalen* publiziert wurden. Daneben existiert ein enorm großer und teilweise unerforschter wissenschaftlicher Nachlass in der Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen mit vielen unveröffentlichten Schriften, die nur teilweise in Dedekinds *Gesammelten Werken* [56] zu finden sind. Einige dieser Texte untersuchen wir in Abschnitt 2.1. Dedekind war bereits zu Lebzeiten ein weltberühmter und hochdekorierter Wissenschaftler. Er war Mitglied diverser wissenschaftlicher Akademien –

[3] Ab 1878 wurde das Polytechnikum in die Herzogliche Technische Hochschule Carolo-Wilhelmina umbenannt und ab 1968 in die Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig. Bis zu Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts hatten Technische Hochschulen kein Promotionsrecht (und für Frauen auch die Universitäten in Deutschland nicht). Vermutlich deshalb hatte Dedekind auch keine eigenen Doktoranden.

[4] Der erste jüdische Ordinarius in Deutschland.

[5] Gauß war ebenfalls Alumnus des Collegium Carolinum.

in Berlin, Paris, Rom und der Leopoldinisch-Carolinischen Akademie – sowie dreifacher Ehrendoktor an den Universitäten in Kristiania (heute Oslo), Zürich und Braunschweig. Im Laufe seines Lebens erhielt er Rufe nach Zürich, Hannover, Straßburg, Gießen, Karlsruhe, Göttingen (zweimal), die er abgelehnt hat. Dedekind bevorzugte offenbar das Leben in Braunschweig im Kreis seiner Familie.

Die größeren mathematischen Fachgebiete, die Dedekind im Lauf der Zeit bearbeitete, waren die Theorie der Eulerschen Integrale, die Gruppentheorie, die Galoistheorie, die Algebraische Zahlentheorie, die Theorie der Funktionenkörper, die Theorie der elliptischen Funktionen und Modulformen sowie die Grundlagen der Mathematik in den beiden hier abgedruckten Büchern.

Dedekind wirkte mit bei der Herausgabe der gesammelten Werke von Carl F. Gauß, Bernhard Riemann [194], Peter Gustav Lejeune Dirichlet und Lazarus Fuchs, siehe sein Schriftenverzeichnis in Anhang A. Wie man dem Briefwechsel mit H. Weber [200] entnehmen kann, war dies eine langjährige und stellenweise herausfordernde Arbeit.

**Dedekinds politisches Wirken:** Dedekinds politische Einstellungen waren durch seinen älteren Bruder Adolf geprägt: Dedekind unterstützte mit Adolf ab 1885 die Bewegung gegen die preußische Einflussnahme auf die Erbfolge im Land nach dem Tod des Herzogs Wilhelm 1884. Beide waren auf der ,,welfischen Seite"[6] und sind aus diesem Grund in Braunschweig zum Teil isoliert gewesen. Um 1897 verbot ein Ministerium die Mitgliedschaft in zwei ,,welfischen" Parteien. Diesen Vorgang nannte Adolf öffentlich sehr couragiert einen Hochverrat und musste sich in der Folge einem Disziplinarverfahren unterziehen. Adolf und Richard traten 1902 aus der Brunsviga Studentenverbindung aus, weil sie mit der dort aufkommenden nationalistischen Einstellung nicht mehr einverstanden waren. Im Jahr 1914 weigerte Dedekind sich, ein Manifest der deutschen Intellektuellen zur Unterstützung des Krieges zu unterschreiben und wurde dafür posthum zuerst von den Franzosen geehrt.[7]

## 1.2 Dedekinds mathematisches Umfeld

Dedekind war in seiner Zeit in verschiedene Entwicklungen innerhalb der Mathematik eingebettet. Wir wollen anhand einiger Beispiele illustrieren, welche Einflüsse und Anregungen mathematischer Art möglicherweise zu seinem Werk und seiner Persönlichkeit beigetragen haben.

---

[6] Das heißt der braunschweigisch-niedersächsischen ,,lokalen" Bewegung.

[7] Zu diesen politischen Dingen, die besonders Alfred Dedekind und später seine Kinder bis in den totalitären NS-Staat hinein betrafen, siehe das Buch [52] von Ilse Dedekind, einer Großnichte Dedekinds, ihren Artikel zur Familie in [198], sowie den Artikel von Thomas Sonar in [102]. Ein Nachlass Ilse Dedekinds befindet sich in der KZ-Gedenkstätte Schillstraße in Braunschweig.

### *1.2.1 Göttingen*

Carl Friedrich Gauß war für Richard Dedekind sicherlich eines der größten Vorbilder zu Zeiten seines Studiums in Göttingen. Dedekind war dessen letzter Doktorand. Man kann sich vorstellen, welche Ehrfurcht mancher Student vor Gauß hatte. Trotz der zeitweisen Unnahbarkeit von Gauß hat Dedekind von dieser Konstellation natürlich profitiert. Die anderen beiden mathematischen Größen in Göttingen zu dieser Zeit waren Bernhard Riemann und – nach dem Ableben von Gauß – Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Beide waren leuchtende Vorbilder für Dedekind.

Mit dem fast gleichaltrigen Bernhard Riemann verband ihn eine Freundschaft, obwohl Riemann ein eher zurückhaltender Mensch war.[8]

Wie Landau berichtete[9], war die Beziehung zu Dirichlet so eng, dass beide Dirichlets Vorlesung zur Zahlentheorie oft gemeinsam betraten und wieder verließen. Im Vorwort zur ersten Auflage von *Was sind und was sollen die Zahlen?* betont Dedekind, dass Dirichlet sinngemäß die Behauptung ausgesprochen habe, dass

> jeder auch noch so fern liegende Satz der Algebra und höheren Analysis sich als ein Satz über die natürlichen Zahlen aussprechen läßt.

Somit geht Dedekinds logizistische Einstellung zur Mathematik (siehe Abschnitt 1.2.4) zum Teil auch auf Dirichlet zurück.

Hermann Minkowski hat 1905 in einem Artikel zu Dirichlets hundertstem Geburtstag auf das „andere Dirichletsche Prinzip" hingewiesen [160, S. 163]:

> ... mit einem Minimum an blinder Rechnung, einem Maximum an sehenden Gedanken die Probleme zu zwingen.

Wie wir in Abschnitt 1.5 sehen werden, passt dieses Prinzip auch sehr gut auf Dedekinds mathematischen Stil. Dies legt nahe, dass er insgesamt von Dirichlets Denkweise sehr stark beeinflusst wurde.

Über das Verhältnis Dedekinds zu Dirichlet und Riemann und das gesellschaftliche Leben in Göttingen, insbesondere auch über die musikalischen Aktivitäten, geben viele Briefe an seine Familie Aufschluss [52].

Zu den Vorbildern von Richard Dedekind in der Göttinger Zeit gehörten gewiss auch Ernst Eduard Kummer und Evariste Galois. Dedekind studierte sowohl die Arbeiten Kummers als auch die von Galois sehr gründlich. Er entwickelte aus Kummers unvollständigen Ideen zur Teilbarkeit die Grundbegriffe der Algebraischen Zahlentheorie, wobei er Idealtheorie und Galoistheorie zugrunde legte. In jahrelanger Arbeit baute er sein Wissen auf und beherrschte am Ende die Gruppentheorie, Galoistheorie und Algebraische Zahlentheorie (in den heutigen Bezeichnungen) wie kaum ein anderer in seiner Zeit.

---

[8] Siehe dazu [123, S. 7] und den Brief von Dedekind vom 13. August 1857 in [52, S. 82–83].

[9] Landau hatte dies offenbar von Paul Bachmann erfahren, [142, S. 52]. Bachmann war ein Doktorand von Kummer und hielt sich um 1856 zeitweise in Göttingen auf.

Dedekind war der erste Mathematiker, der – als Göttinger Privatdozent in den Wintersemestern 1856/57 und 1857/58 – Vorlesungen mit dem Titel ,,Höhere Algebra" über Themen aus der Galoistheorie las. Der Begriff des Körpers in der heutigen Form geht auch auf Dedekind zurück [142, S. 53].[10] Dedekind hat in einem Supplement zu Dirichlets Zahlentheorievorlesung seine eigene Auffassung der Algebraischen Zahlentheorie ausgearbeitet. In mehreren Auflagen hat er den Stoff immer weiter entwickelt und die Methoden und Beweise verbessert. In späteren Jahren hat sich Dedekind intensiv mit kubischen Zahlkörpern befasst. Wir geben eine ausführliche Inhaltsangabe des Supplements in Abschnitt 2.6.

### *1.2.2 Das Ende der Größenlehre*

Die Theorie der Mannigfaltigkeiten und Periodenintegrale von Riemann und seinen Vorgängern haben Dedekind maßgeblich inspiriert. Der Mengenbegriff Dedekinds von 1872 in *Was sind und was sollen die Zahlen?* hängt belegbar mit dem Mannigfaltigkeitsbegriff zusammen, da Dedekind bereits im ersten Entwurf (entstanden 1872–1878) neben den Begriffen ,,System" und ,,Inbegriff" auch ,,oder Mannigfaltigkeit" an den Rand schrieb. Der Begriff der Mannigfaltigkeit ist also Leitbild für Dedekinds Mengenlehre. Diese sprachliche Assoziation findet sich ebenfalls bei Cantor, der das Wort ,,Punktmannigfaltigkeit" für Mengen verwendete.
Natürlich war die Idee einer Menge schon bei vielen anderen Mathematikern vorher vorhanden. Jedoch war der Begriff einer Menge in der Regel unpräzise gefasst und ohne logische Grundlage. In der Zeit von Riemann, Dedekind und Cantor wurde – wie wir heute sagen würden – die Kategorie der Mengen zum ersten Mal als eigenständige mathematische Struktur zum Leben erweckt.
Es gab auch einen Mengenbegriff bei Bernard Bolzano in seinem Buch *Paradoxien des Unendlichen* [20]. Bolzano macht in §4 seines Buches einen Unterschied zwischen Mengen und beliebigen Ansammlungen, siehe [225, S. 32]. Der §13 bei Bolzano enthält ein Argument für die Existenz einer unendlichen Menge, das Dedekind womöglich zu seinem Beweis von Satz 66 in *Was sind und was sollen die Zahlen?* inspiriert hat. Wie problematisch dieser Beweis ist, werden wir in der Folge noch sehen.
Die neuen Begriffe von Mengen und Mannigfaltigkeiten bedeuteten auch eine Abkehr von der Mathematik der Zeit, in der Zahlen meist nur Synonyme für Größen wie Maße oder physikalische Einheiten waren. Moritz Epple hat diesen Umbruch das ,,Ende der Größenlehre" genannt [68]. Im Vorwort zur ersten Auflage von *Was sind und was sollen die Zahlen?* geht Dedekind auf

[10] Siehe dazu die Gedächtnisrede von Landau [142, S. 52–53] und den Aufsatz von Scharlau [198, S. 101] zu Dedekinds Manuskript über Algebra, das im selben Band abgedruckt ist und vermutlich eine Ausarbeitung dieser Vorlesungen ist. Wie Landau in seiner Gedächtnisrede berichtet, hatten die Vorlesungen in beiden Semestern jeweils nur zwei Hörer.

sein Buch *Stetigkeit und Irrationale Zahlen* ein und grenzt seine Theorie der Schnitte von den ,,meßbaren Größen" scharf ab. In diesem Zusammenhang erwähnt er das Beispiel einer (unstetigen) Geometrie über den algebraischen Zahlen. Dedekind beförderte mit seinem Buch somit bewusst das Ende der Größenlehre und einiger anderer historisch gewachsener Denkweisen.

### *1.2.3 Kronecker und Helmholtz*

Dedekind hat *Was sind und was sollen die Zahlen?* auch als Reaktion auf zwei Essays von Helmholtz und Kronecker von 1887 geschrieben, die in einem Festband für Eduard Gottlob Zeller[11] erschienen waren. Im Vorwort zur ersten Auflage schrieb er nämlich:

> Das Erscheinen dieser Abhandlungen [von Helmholtz und Kronecker] ist die Veranlassung, die mich bewogen hat, nun auch mit meiner, in mancher Beziehung ähnlichen, aber durch ihre Begründung doch wesentlich verschiedenen Auffassung hervorzutreten, die ich mir seit vielen Jahren und ohne jede Beeinflussung gebildet habe.

Mit den Meinungen von Kronecker und Helmholtz war Dedekind also nicht einverstanden. Er sah seine Schrift als entschiedenen und wissenschaftlich durchdachteren Gegenentwurf dazu.

Kronecker war eine einflussreiche Persönlichkeit der Berliner Mathematik. Wie private Briefe bezeugen, waren beide seit mindestens 1857 in Kontakt, und Dedekind bezeichnete Kronecker schon früh als ,,Rivalen" [52, S. 80–83]. Dedekind hatte insbesondere im Bereich der Algebraischen Zahlentheorie Anknüpfungspunkte zu ihm.

Kronecker verfasste 1881 eine zum Supplement von Dedekind alternative ,,Festschrift"[12] mit dem Titel ,,Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen". Dedekind studierte diesen langen Artikel von Kronecker sehr intensiv, woraus ein fast fertiges Manuskript entstand, das man im Nachlass (Kasten VII–14) finden kann. Kommentierte Auszüge daraus, die sogenannten ,,Bunten Bemerkungen", sind in [65] abgedruckt.

Die Bedeutung von Kroneckers ,,Festschrift" liegt darin, dass er einen allgemeineren Ansatz als Dedekind verfolgte, der die Analogie von *Zahlkörpern* und *Funktionenkörpern* beinhaltete. Darüber hinaus beinhaltet die ,,Festschrift" auch eine Theorie der Primidealzerlegungen, von der es auch eine Dedekindsche Version von 1871 in der zweiten Auflage des Supplements zu Dirichlets Vorlesungen gibt.[13]

---

[11] Nicht zu verwechseln mit Julius Christian Johannes Zeller, der einen eigenen Beweis des Gaußschen quadratischen Reziprozitätsgesetzes gab und über Kalender und Kongruenzformeln für Wochentage forschte.

[12] Der Artikel [138] war tatsächlich eine Festschrift für Kummer.

[13] All dies wird in [65] erläutert.

Dedekind kannte die Theorie der Funktionenkörper durch Riemanns Arbeiten über Riemannsche Flächen und seine gemeinsame Arbeit [56, Band 1, S. 238] mit Heinrich Weber. Die Analogie zwischen beiden Theorien ist durchaus kompliziert, so dass sich der Ansatz von Kronecker nicht sofort durchsetzte. André Weil hat zugunsten von Kronecker in einem Artikel [247] von 1950 eine historische Einordnung vorgenommen und von einem ,,Partisanenkampf" zwischen den beiden Lagern von Anhängern gesprochen.[14]

Einige dieser Arbeiten von Dedekind und Kronecker über Arithmetik sind vom heutigen Standpunkt aus die wichtigsten Beispiele für den *Aufstieg der Arithmetik* in der Mathematik des 19. Jahrhunderts.[15]

Von Kronecker soll auch der oft zitierte (und häufig auch missbrauchte) Ausspruch ,,Die natürlichen Zahlen hat der liebe Gott erschaffen, alles Andere ist Menschenwerk" stammen, wie Heinrich Weber in seinem Nachruf auf Kronecker schreibt [244]. Diese Aussage birgt die Einstellung, dass man die natürlichen oder ganzen Zahlen der Mathematik zugrunde legen kann, ohne deren Existenz eigens begründen zu müssen.

David Hilbert nannte Kronecker aus diversen Gründen einen Dogmatiker [112, S. 1]. Im selben Aufsatz von 1904 gibt Hilbert auch zum Teil psychologische Charakterbeschreibungen weiterer Protagonisten dieser Zeit, was mit Vergnügen zu lesen ist. Für die betroffenen Personen, unter denen auch Cantor, Dedekind und Frege waren, muss das allerdings bitter zu lesen gewesen sein (mit der Ausnahme von Kronecker, der zu dem Zeitpunkt nicht mehr lebte). Sicherlich hat Hilbert in seinen Urteilen partiell Recht gehabt, wie vermutlich auch in Kroneckers Fall. Jedoch würde man heute die Leistungen dieser Mathematiker wohlwollender bewerten.

Kronecker hat die Existenz reeller Zahlen in ihrer Gesamtheit abgelehnt.[16] Kroneckers Meinung nach war die Betrachtung einer reellen Zahl nur dann sinnvoll, wenn man sie mit konstruktiven Mitteln beschreiben konnte. Zahlen wie $\pi$ oder $e$ und alle algebraischen oder allgemeiner *berechenbaren* Zahlen fallen unter diese Kategorie. Nur abzählbar viele reelle oder komplexe Zahlen sind berechenbar[17]. Kronecker war somit ein *Konstruktivist*[18] in der Mathematik. Er hatte in Ansätzen auch *intuitionistische*[19] Tendenzen in seinem

[14] Zu Kroneckers Theorie siehe auch das Buch von Harold Edwards [64].

[15] Siehe dazu den Beitrag von Birgit Petri und Norbert Schappacher [176].

[16] Siehe [22, S. 268–270], aber auch [44, S. 66], [45, S. 280] und [137].

[17] Berechenbar heißt konkret für eine positive reelle Zahl $x$, dass man $x$ durch Folgen von Brüchen $\frac{a(k)}{b(k)}$ approximieren kann mit einem Fehler kleiner als $1/n$, falls der Index $k$ größer als $c(n)$ ist; die drei Funktionen $a, b, c\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sind berechenbar, d.h. partiell-rekursive Funktionen, siehe Abschnitt 2.4. In [220] findet man weitergehende Betrachtungen.

[18] Der Konstruktivismus wurde in Form der *konstruktiven Mathematik* in der Zwischenzeit weiterentwickelt. Eine Beschreibung vieler Ideen des Konstruktivismus zusammen mit historischen Hintergrundinformationen auch zu Dedekind findet man in dem Buch von Michael J. Beeson [13].

[19] Den Intuitionismus sollte man – trotz einiger Gemeinsamkeiten – nicht mit dem Konstruktivismus verwechseln. Seine Anfänge sind mit den Namen von Hermann Weyl und Luitzen E. J. Brouwer verbunden. Weyl hat sich in seinem Buch *Das Kontinuum* [248]

Denken, wie Jacqueline Boniface und Norbert Schappacher in ihrer Edition von Kroneckers Vorlesung „Über den Begriff der Zahl in der Mathematik" von 1891 angemerkt haben [22].

Dedekind lehnte den Konstruktivismus Kroneckers ab (und vermutlich auch den Intuitionismus). Kronecker und Dedekind erscheinen uns heute als mathematische Opponenten. Die Spannungen zwischen den beiden sind gewissermaßen eine Vorwegnahme der Konflikte zwischen Hilbert und den eher „dogmatischen" Vertretern des Intuitionismus und des Konstruktivismus.

### 1.2.4 Frege und der Logizismus

Einer der – aus heutiger Sicht – wichtigsten Zeitgenossen Dedekinds war Gottlob Frege, der in Jena wirkte. Im Vorwort der zweiten Auflage von *Was sind und was sollen die Zahlen?* erwähnte Dedekind die Nähe von Freges Betrachtungen zu seiner eigenen Grundlagenforschung, ebenso in seinem Brief an Keferstein vom 27. Februar 1890, der in unserem Anhang B und in [214] abgedruckt ist. Umgekehrt hat Frege in seinen Werken jedoch Dedekind manchmal mit kritischen[20] Worten bedacht. Außer diesen gegenseitigen Erwähnungen ist nicht viel bekannt über das persönliche Verhältnis beider. Vermutlich haben sie sich nicht näher gekannt. Obwohl Dedekind Vorlesungen in Philosophie gehört hatte und dieser Einfluss in seinen Texten oft in Wendungen spürbar ist, hatte er selbst keine rein philosophischen Arbeiten verfasst.

Frege gilt heute als Begründer der modernen Logik schlechthin. Seine Werke *Begriffsschrift* (1879) [78], *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884) [79] und *Grundgesetze der Arithmetik* (1893 und 1903) [80] enthalten neben mathematischer Logik auch eine Grundlegung der Arithmetik. Besonders wichtig ist Frege wegen seiner Einführung der Quantorenschreibweise [126, S. 13] mit den Zeichen $\forall$ und $\exists$ in heutiger Notation. Die Logik war bis dahin in erster Linie *aristotelische Logik* und eine Domäne der Philosophie gewesen. Allenfalls Gottfried Wilhelm Leibniz, der unter anderem auch Mathematiker war, bildete in dieser Hinsicht eine Ausnahme. Die (frühen) britisch-amerikanischen Logiker und Philosophen[21] sind in diesem Zusammenhang als Wegbereiter erwähnenswert. In der Zeit Dedekinds und danach begann sich die mathema-

auch mit Dedekind kritisch auseinandergesetzt. Der Intuitionismus lehnte später das logische Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten ab, was die Mehrheit der Mathematiker nie akzeptieren konnte. Neuerdings erfreuen sich aber intuitionistische Varianten der Typentheorie wieder zunehmenden Zuspruchs [139, 239].

[20] Diese Bemerkungen Freges finden sich in Band I der *Grundgesetze der Arithmetik* [80]. Eine Diskussion von Freges Kommentaren zu Dedekind, ebenso wie von Bertrand Russell und anderen findet sich bei Reck [191]. Siehe auch [192] und [193] zum Verhältnis zwischen Frege und Dedekind.

[21] Da sind die Logiker Augustus de Morgan, George Peacock, Charles Babbage, Ada Lovelace, John Herschel, George Boole, William Stanley Jevons, Charles Sanders Peirce

tische Logik durch Leistungen einflussreicher Protagonisten wie Frege, Peano und anderen vollständig von der Philosophie zu emanzipieren. Umgekehrt sind neue philosophische Gebiete wie die *Analytische Philosophie* zum Teil eine Folge der mathematischen Entwicklungen aus der Dedekindschen und der folgenden Zeit.

Frege gilt als Begründer des *Logizismus* und ist aufgrund seiner Forschungen über formale Sprachen, Logik und Teile der Philosophie, insbesondere der Sprachphilosophie, ab Mitte des zwanzigsten Jahrhunderts zu einem Vater der Analytischen Philosophie geworden. Dieser Mythos wurde insbesondere durch Texte und Bemerkungen von Bertrand Russell, Michael Dummett [61] und anderen geprägt, die dadurch neben Frege auch Ludwig Wittgenstein zu einer der wichtigsten Gründungsfiguren machten. Man berief sich jedoch seltener auf Dedekind, was in der Folgezeit eine geringere Wertschätzung Dedekinds innerhalb der Philosophie im Vergleich zu Frege bewirkte.

Der Logizismus sah ursprünglich eine Reduktion der Mathematik auf logische Grundprinzipien vor. Genauer hat Frege gefordert, dass die mathematischen Konzepte der Arithmetik (und auch die Analysis) auf logischen Prinzipien (Axiomen) fußen sollen und alle wahren Sätze in der Arithmetik (bzw. der Analysis) sich durch strenge Beweise folgern[22] lassen. Für die Geometrie hat Frege übrigens eher die Sichtweise von Euklid gefordert. Die logischen Prinzipien selbst sollten evidente und unbeweisbare Tatsachen sein.

Die axiomatische Methode aus diesem Programm des Logizismus hat sich in der Folge als erfolgreich erwiesen. Jedoch hat der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz gezeigt, dass die Beweisbarkeit aller wahren Sätze in hinreichend reichhaltigen Theorien nicht realisierbar ist. Zudem hat sich später bei der Entstehung der mathematischen Beweistheorie gezeigt, dass in den Grundlagen logischer Kalküle ein Mindestmaß[23] an elementarer Mathematik benötigt wird. Erst damit kann man überhaupt von logischen Ausdrücken und damit operierenden logischen Kalkülen sinnvoll sprechen oder gar etwas darüber beweisen. In der heutigen Mathematik ist es üblich, als eine derartige Grundlage die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre zu nehmen, was man aber nicht unbedingt als eine echte Reduktion auf die Logik bezeichnen kann. Nicht zuletzt aus all diesen Gründen[24] ist der Logizismus in einem engeren Sinne heute weitgehend unbedeutend.

Von etwas höherer Ebene aus betrachtet will der Logizismus die Mathematik als Konsequenz und damit Teil der Logik einordnen. Dieser Themenkreis hängt auch mit den Betrachtungen von Kant zusammen, der die Mathema-

und die Philosophen Alexander Bain, John Stuart Mill und John Venn zu nennen [173]. Besonders Peirce kommt mit einigen Arbeiten Dedekind und Cantor sehr nahe [49].

[22] Diese restriktive Auslegung wollen wir den Logizismus *im engeren Sinne* nennen.

[23] Vgl. dazu [132, S. 46] und [211, S. 9]. Dies hängt mit Poincarés Einwänden zum Logizismus und zur Hilbertschen Grundlagenforschung zusammen [57, 58, 91, 147].

[24] Freges Theorie war auch von der Russellschen Antinomie betroffen, wie Russell ihm in einem Brief vom 16. Juni 1902 mitteilte. Frege zeigte sich in seiner Antwort am 22. Juni betroffen und sah sein Gedankengebäude beschädigt.

tik für *synthetisch a priori* gehalten hat. Somit ist der Logizismus eine Art von Gegenentwurf zu dieser Kantschen Auffassung. Die Gegenposition zum Logizismus in einer solchen allgemeinen Form wäre, die Logik als Teil der Mathematik zu betrachten. Diese Einstellung vertreten damals wie heute auch viele Mathematiker. Die dahinterstehende Frage, nämlich was Mathematik eigentlich ist, bleibt bei dieser Sichtweise ungelöst. Solche Diskussionen über den Logizismus sind Teil der *Philosophie der Mathematik*[25].
Zu den bedeutendsten Vertretern des Logizismus im zwanzigsten Jahrhundert gehören Russell und Whitehead mit ihrem Werk *Principia Mathematica* [196] sowie Whiteheads Doktorand William Quine, der die Hinzunahme der Mengenlehre zur formalen Logik in seinen Arbeiten zum Logizismus ausdrücklich zugelassen hat. Es gibt auch neuere Strömungen des *Neo-Logizismus*. Eine davon gründet sich auf ein Theorem von Frege, welches die Dedekind-Peano-Axiome aus einem logischen Prinzip des Philosophen David Hume herleitet. Es ist eine interessante Frage, ob Dedekind als Logizist (im engeren oder weiteren Sinne) einzuordnen ist. Dazu gibt es eine umfangreiche Literatur.[26] Dedekind hat das Wort Logizismus nicht verwendet, aber er hat sich im Vorwort zu *Was sind und was sollen die Zahlen?* explizit zu dieser Frage geäußert, indem er sagte:

> Indem ich die Arithmetik (Algebra, Analysis) nur einen Teil der Logik nenne, spreche ich schon aus, daß ich den Zahlbegriff für gänzlich unabhängig von den Vorstellungen oder Anschauungen des Raumes und der Zeit, daß ich ihn vielmehr für einen unmittelbaren Ausfluß der reinen Denkgesetze halte.

Dedekinds Arbeiten zu den Grundlagen legen in ihrer Gesamtheit nahe, dass er die Reduktion der Mathematik auf die Mengenlehre angestrebt hat, also in einem weiteren Sinne ein Logizist war, ohne eigentliche Logik zu verwenden. David Hilbert hatte in den 1890er Jahren noch eine Position[27], die sehr nahe an Dedekind war. Aufgrund der Lektüre der *Principia Mathematica* [196] von Russell und Whitehead bekannte sich Hilbert um 1918 explizit zu einer Form des Logizismus, indem er sagte [113, S. 153]:

> Da aber die Prüfung der Widerspruchslosigkeit eine unabweisbare Aufgabe ist, so scheint es nötig, die Logik selbst zu axiomatisieren und nachzuweisen, daß Zahlentheorie sowie Mengenlehre nur Teile der Logik sind. Dieser Weg, seit langem vorbereitet – nicht zum mindesten durch die tiefgehenden Untersuchungen von Frege – ist schließlich am erfolgreichsten durch den scharfsinnigen Mathematiker und Logiker Russell eingeschlagen worden. In der Vollendung dieses großzügigen Russellschen Unternehmens der *Axiomatisierung der Logik* könnte man die Krönung des Werkes der Axiomatisierung überhaupt erblicken.

In der Literatur ist man sich jedoch nicht ganz einig, ob diese Aussage nur aus der kurzfristigen Euphorie über die Lektüre der *Principia Mathematica*

[25] Siehe dazu die Diskussionen bei Purkert und Ilgaud [184, S. 175], Reck [193], Bedürftig und Murawski [12] oder Ferreirós [71].

[26] Siehe dazu die Arbeiten von Hourya Benis-Sinaceur [15], José Ferreirós [73, 74], Erich Reck [188, 189, 190, 191, 192, 193], Wilfried Sieg und Dirk Schlimm [201, 207].

[27] Ferreirós [74] nennt diese Phase des „frühen" Hilbert „Dedekind-style logicism".