Kölner Beiträge zur Didaktik der Mathematik
und der Naturwissenschaften

RESEARCH

Simeon Schlicht

Zur Entwicklung des Mengen- und Zahlbegriffs

Springer Spektrum

Kölner Beiträge zur Didaktik der Mathematik und der Naturwissenschaften

Die Kölner Fachgruppe der MINT-Didaktiken verfolgt mit ihrem Forschungsprogramm das Ziel, ausgewählte Themen des Lehrens und Lernens der Mathematik und der Naturwissenschaften zu erforschen und auf dieser Basis weiter zu entwickeln. Die Publikationen dieser Reihe werden sich zwischen zwei Polen verorten lassen: Zum einen werden Theorien erstellt, die das Lehren und Lernen in den MINT-Fächern zu verstehen helfen, zum anderen werden Unterrichts- und Lehrkonzepte entwickelt und empirisch erprobt. Die VertreterInnen dieser Fachgruppe sind in allen Bereichen der Erforschung und Vermittlung von mathematisch-naturwissenschaftlichem Wissen tätig. Entsprechend umfasst die Reihe „Kölner Beiträge zur Didaktik der Mathematik und der Naturwissenschaften“ ein breites Spektrum: von vorschulischen Erfahrungen (auch in der Familie) bis zu Weiterbildungen nach dem Studium.

Simeon Schlicht

Zur Entwicklung des Mengen- und Zahlbegriffs

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Horst Struve

Springer Spektrum

Simeon Schlicht
Köln, Deutschland

Dissertation der Universität zu Köln, 2016

Kölner Beiträge zur Didaktik der Mathematik und der Naturwissenschaften
ISBN 978-3-658-15396-0 ISBN 978-3-658-15397-7 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-15397-7

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Strasse 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Geleitwort

Sowohl in der Mathematikdidaktik als auch in der Kognitionspsychologie gibt es umfangreiche Literatur, die sich mit der Entwicklung des Zahlbegriffes bei Kindern beschäftigt. Diese zeichnet sich im Allgemeinen dadurch aus, dass die kognitive Entwicklung vor dem Hintergrund der fachwissenschaftlichen Charakterisierung der Zahlbereiche beschrieben wird. So werden üblicherweise die natürlichen Zahlen in der Fachwissenschaft Mathematik über die Peano-Axiome definiert. Bereits bei der Formulierung der Axiome wird die Mengenlehre benötigt. Sie ist die Sprache, in der die Theorie formuliert ist. Die Theorie der natürlichen Zahlen – auch in konstruktiven Definitionen der natürlichen Zahlen wie etwa nach VON NEUMANN – wird daher in der Fachwissenschaft in zwei Schritten entwickelt: erst die Mengenlehre, dann die Arithmetik.

Simeon Schlicht zeigt in dieser Arbeit durch empirische Untersuchungen, dass die Vorstellung, dass Kinder zunächst den Mengenbegriff und darauf aufbauend den Zahlbegriff erwerben, fragwürdig ist. Die von ihm untersuchten Kinder erwerben den Mengen- und den Zahlbegriff gleichzeitig und in Abhängigkeit voneinander. Der Grund für diese Unterschiedlichkeit ist ein epistemologischer: Während es in der Fachwissenschaft um die axiomatische Definition einer formalistischen Theorie (i.S.v. HILBERT) geht, erwerben Kinder des hier betrachteten Alters mathematische Begriffe konstruktiv im Umgang mit Materialien, also empirisch-gegenständlich.

In seinen empirischen Untersuchungen mit Kindern im Alter zwischen 3 Jahren und 10 Monaten bis 4 Jahren und 8 Monaten verwendet Simeon Schlicht ein Design, das er von unserer Kölner Kollegin, Frau Professorin Inge Schwank, übernommen hat, sog. *Spielsituationen*. Von ausgewählten videographierten Szenen wurden sodann Transkripte hergestellt und diese nach den Regeln der *Interaktionsanalyse* interpretiert, eine Forschungsmethode unseres Kölner Kollegen Professor Michael Meyer.

Das Verhalten der Kinder beschreibt der Autor auf der Basis des kognitionspsychologischen Ansatzes der *theory theory*: Die Kinder verhalten sich so, als ob sie über eine gewisse Theorie verfügen würden. Dabei wird nicht postuliert, dass die Kinder diese Theorie formulieren können, sondern nur deren Äußerungen und Handlungen durch die Zuschreibung einer Theorie beschrieben und erklärt.

Von welcher Art sind die Theorien, die man Kindern zuordnen kann, um deren Verhalten im Umgang mit Mengen und Zahlen zu beschreiben? Kinder konstruieren ihr Wissen und ihre Vorstellungen im Umgang mit mathematikdidaktischem Material. Die zugeordneten Theorien beschreiben und erklären diesen Umgang und sind daher mit einem Ausdruck der *Wissenschaftstheorie* empirische Theorien. Die *strukturalistische Metatheorie* bietet eine Möglichkeit, empirische Theorien präzise darzustellen. Dies nutzt Simeon Schlicht, um den Zusammenhang zwischen der Mengen- und Zahlbegriffsentwicklung bei den untersuchten Kindern zu klären und die sich beim Erwerb dieser Begriffe beobachteten Probleme darzustellen. Damit zeigt sich, dass der gemeinsam mit Professor Hans Joachim Burscheid entwickelte Ansatz zur *Rekonstruktion mathematischer Theorien* auch dazu dienen kann, das Verhalten einzelner Kinder in konkreten Spielsituationen zu beschreiben und zu erklären.

Die Arbeit von Simeon Schlicht hat zum einen praktische Implikationen: Sie zeigt Erzieherinnen und Lehrern, an welchen Stellen im Lernprozess der Kinder sie mit Lernproblemen rechnen sollten – und dass und warum sie selbst unersetzlich sind. Zum anderen verwendet die Arbeit Ansätze aus verschiedenen Wissenschaften – Kognitionspsychologie (theory theory), Bildungswissenschaften (interpretative Unterrichtsforschung) und Wissenschaftstheorie (Strukturalismus) – und schafft somit instruktive und vielversprechende Querverbindungen zu anderen Wissenschaften.

Köln, im Sommersemester 2016 Horst Struve

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand am Institut für Mathematikdidaktik der Universität zu Köln und wurde von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität zu Köln als Dissertation angenommen. Die Abschlussprüfung fand am 13. April 2016 in Form einer Disputatio im Institut für Mathematikdidaktik statt. Neben den beiden Gutachtern, Herrn Prof. Dr. Horst Struve und Frau Prof. Dr. Inge Schwank, nahmen außerdem Frau Prof. Dr. Christiane Reiners (Vorsitzende) und Herr Dr. Martin Rotter (Beisitzer) als prüfungsberechtigte Mitglieder an der universitätsöffentlichen Prüfung teil.

Mein Weg zur Abgabe der Dissertation wurde hierbei von vielen Menschen begleitet, denen ich allen zu Dank verpflichtet bin.

Zuerst sei Horst Struve für die stetige Betreuung der Arbeit gedankt. Die vielen inhaltlichen Diskussionen, Ratschläge, Hinweise und Ermutigungen sowie die stets offene Tür haben den Weg zur Promotionen geebnet und ich freue mich auf weitere fruchtbare Zusammenarbeit!

Inge Schwank danke ich für die Begleitung des empirischen Teils der Arbeit und die Bereitschaft und das in mich gesetzte Vertrauen sowohl bestehende Beziehungen zu KiTas, als auch geeignete Arbeitsmittel für mathematikdidaktische Untersuchungen mit Drei- bis Vierjährigen nutzen zu dürfen.

Genauso sei auch der KiTa dafür gedankt, dass ich immer wieder mit Kameraausrüstung und Koffer voller Materialien willkommen geheißen wurde und, obwohl der Alltag in einer KiTa auch ohne Forscher stets neue Herausforderungen und viele Ereignisse bietet, immer ein willkommener Gast war, um den sich fürsorglich gekümmert wurde. Ein ganz besonderer Dank gilt hier selbstverständlich allen teilnehmenden Kindern für die eindrucksvolle Zeit!

Prof. Dr. Michael Meyer und Prof. Dr. Jörg Voigt danke ich für die Möglichkeit ausgewählte Szenen intensiv im Rahmen von Forschungskolloquien zu interpretieren und für die Hinführung zur Interpretativen Vorgehensweise. Ebenso danke ich allen teilnehmenden Kolleginnen und Kollegen.

Das Spektrum der Arbeit umfasst drei große Forschungsströmungen der Mathematikdidaktik: Rekonstruktion von empirischen Theorien, Kognitive Mathematik und Interpretative Forschung. Für die stetige Diskussionsbereitschaft und den informativen Austausch danke ich auch meinen Mitdoktorandinnen und Mitdoktoranden, Katrin Schiffer, Christopher Gerke, Solveig Jensen, Jessica Kunsteller, die in eben diesen Gebieten forschen.

Mein Dank gilt auch der (ehemaligen) studentischen Hilfskraft Janina Wiegelmann, die mich bei der Transkription von Videoszenen unterstützt hat.

Auch im Privaten wurde die Arbeit von vielen lieben Personen begleitet. Zuerst sei hier meinen Eltern, Andrea Meyer-Schlicht und Diakon Martin Schlicht, sowie meinen Geschwistern, Hannah Klaproth und Gereon Schlicht, gedankt.

Viola Schmidt, engagierte Deutsch- und Religionslehrerin, danke ich für die mühevolle Korrektur des Manuskripts der Dissertation.

Für die schon jahrzehnte andauernde Freundschaft und Einblicke in die Welt außerhalb des Kontexts Schule – Lehramtsausbildung – Forschung danke ich Markus Schäfer.

Für kritische Diskussionen über das Verhältnis von Forschung und Unterrichtspraxis, für die Einblicke in den Mathematikunterricht an Grundschulen, für das künstlerische Talent und nicht zuletzt für die gute Freundschaft danke ich Laura Leipertz, engagierte Grundschullehrerin in Köln.

Für das Entfliehen aus dem Forschungsalltag, für die stundenlangen Gespräche beim Spazieren, für das gemeinsame Lachen und für ein stets offenes Ohr danke ich Carolin Woitkowski.

Toll, dass man solche lieben Menschen als Freunde hat.

Köln, im Sommersemester 2016 Simeon Schlicht

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit thematisiert die Entwicklung des Mengen- und Zahlbegriffs bei Kindern. Die mathematische Bildung in der frühen Kindheit steht – nicht zuletzt seit dem PISA Schock – im Fokus politischer und gesellschaftlicher Diskussionen. Im Entwurf für die Grundsätze zur Bildungsförderung für Kinder im Elementar- und Primarbereich wird die Förderung von Grundfähigkeiten für mathematisches Denken gefordert. So sollen beispielsweise bereits in der KiTa den Kindern die Alltäglichkeit und Allgegenwärtigkeit von Mathematik bewusst gemacht werden (MFKJKS/MSW, 2011, S. 57).

Im Alltag sammeln Kinder Erfahrungen im Rahmen von Anwendungskontexten. Dies gilt insbesondere auch für erste Erfahrungen mit Mathematik. Diese Anwendungskontexte bestimmen hierbei die Vorstellungen der Kinder über Mathematik: Objekte und Handlungen sind zentral für die ausgebildeten Begriffe (vgl. BAUERSFELD (1983)).

Insbesondere folgt, dass sich die Begriffe, welche die Kinder erwerben, und das Verständnis von Mathematik, welches die Kinder ausbilden, grundlegend von den Auffassungen von Mathematik, welche Erzieherinnen und Lehrerinnen nach Ausbildung und Studium besitzen, und erst Recht von den Auffassungen von Mathematik, welche Mathematiker an der Universität vertreten, unterscheiden können. Dies ist nicht verwunderlich, jedoch sollte dies stets von Bildungsakteuren bei Planung und Durchführung von Maßnahmen berücksichtigt werden: Während für Erzieherinnen und Lehrerinnen die Bildungsmaßnahmen, welche in gewissen Anwendungskontexten, z.B. mit Hilfe von mathematikdidaktischen Arbeitsmitteln, durchgeführt werden, eine geschickte Veranschaulichung abstrakter Zusammenhänge von Regeln und logischen Folgerungen darstellen können, erwerben die Lernenden gerade eine Theorie über die Anschauungsmittel und gerade nicht eine abstrakte mathematische Theorie (vgl. STRUVE (1990) & BURSCHEID/STRUVE (2010)).

Eine Aufgabe mathematikdidaktischer Forschung ist hierbei, für diese Prozesse des Begriffserwerbs zu sensibilisieren und sie verstehen zu helfen:

> „Forschungen in der Mathematikdidaktik können dabei helfen, Unterrichtsvorschläge [und natürlich auch andere Maßnahmen, wie z.B. Lernsituationen in der KiTA, SJS] zu entwickeln und (partiell) zu rechtfertigen. Dazu benötigt man auch Theorien; denn erst ein Verständnis von Prozessen und Phäno-

S. Schlicht, *Zur Entwicklung des Mengen- und Zahlbegriffs*,
Kölner Beiträge zur Didaktik der Mathematik und der Naturwissenschaften,
DOI 10.1007/978-3-658-15397-7_1

> menen erlaubt es, diese sinnvoll und planmäßig zu beeinflussen.“ (STRUVE, 2015, S. 563)

Die vorliegende Arbeit setzt sich zum Ziel, mittels einer systematischen Beschreibung von Prozessen im Mengen- und Zahlbegriffserwerb einen Beitrag zu eben dieser Forschungsaufgabe der Mathematikdidaktik zu leisten.

Hierfür werden insbesondere solche Situationen analysiert, in denen Kinder sich im Umgang mit mathematikdidaktischem Material mit Mengen – als Kollektionen von Objekten – und Zahlen beschäftigen. Die *leere Menge* und die *Null* sind hierbei von besonderem Interesse, da diese für ein Verständnis unseres Dezimalen Stellenwertsystems grundlegend sind (HEFENDEHL-HEBEKER/SCHWANK, 2015, S. 96ff). Untersuchungen mit Berücksichtigung der prädikativen und funktionalen Zugangsweisen zu Aufgabenstellungen zeigen auf, dass gerade die Einnahme einer funktionalen Sichtweise im Einstieg in die Arithmetik helfen kann. Für eben diese Sichtweise ist die *Null* als Start der Konstruktion von Zahlen eine Basis (vgl. SCHWANK (2013a) & BRÜCKEL (2014)).

Eine Analyse entsprechender Szenen im Hinblick auf das mathematische Wissen der Kinder verspricht hierbei detaillierte Einsichten in mögliche Kognitionen der Kinder. Im Sinne des kognitionspsychologischen Ansatzes der Theory Theory (GOPNIK/MELTZOFF (1997)) kann das Verhalten von Kindern mittels Zuschreibens von Theorien über einen Phänomenbereich beschrieben werden. Kinder verhalten sich so, als ob sie eine Theorie über den Phänomenbereich besäßen. Hierbei werden die Kinder mit empirisch arbeitenden Wissenschaftlern verglichen:

> „The central idea of this theory is that the processes of cognitive development in children are similar to, indeed perhaps even identical with, the processes of cognitive development in scientists.“ (GOPNIK/MELTZOFF, 1997, S. 3)

Die Theorien, welche den Kindern zugeschrieben werden, können mit Hilfe des strukturalistischen Theoriekonzepts rekonstruiert werden. Das strukturalistische Theoriekonzept der Beschreibung der Theorien von Lernenden als *empirische Theorien* ermöglicht eine präzise Bearbeitung mathematikdidaktischer Fragestellungen. So konnte STRUVE (1990) in einer Schulbuchanalyse herausarbeiten, wie mögliche Theorien der Lernenden im Hinblick auf den Geometrieunterricht aussehen. Spezifische Probleme, z.B. mit dem Geradenbegriff, werden hierdurch erklärt: Schülerinnen und Schüler fassen Geometrie ähnlich einer naturwissenschaftliche Theorie über die Anschauungsmittel, d.h. Zeichnungen u.Ä., auf. Ein Spezifikum dieser *empirischer Theorien* sind die theoretischen Begriffe, welche ihre Bedeutung über die Theorie und nicht über die Anschauung gewinnen, wie STRUVE (1990) für den Geradenbegriff in der Schulgeometrie herausgearbeitet hat. Weitere Analysen, welche über den Kontext des Geometrieunterrichts hinausgehen,