CURSO DE VARIABLE COMPLEJA

LEVINSON

REDHEFFER

EDITORIAL REVERTÉ

CURSO DE VARIABLE COMPLEJA

Norman Levinson

Massachusetts Institute of Technology

Raymond M. Redheffer

University of California, Los Angeles

EDITORIAL REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · Caracas · México

Título de la obra original:

Complex variables

Edición original en lengua inglesa publicada por:

Holden-Day, Inc., San Francisco
Copyright © by Holden- Day, Inc.

Edición en español

© Editorial Reverté, S. A., 1990

Edición en papel:
ISBN 978-84-291-5093-3

Edición e-book (PDF):
ISBN: 978-84-291-9122-6

Versión española por:

Luís Bou García
Profesor Encargado de Curso en la Universidad
Complutense de Madrid

Revisada por:

Dr. D. Enrique Linés Escardó
Catedrático de análisis matemático
de la Facultad de Ciencias de la
Universidad Complutense de Madrid

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15, local B
08029 Barcelona
Tel: (+34) 93 419 33 36
reverte@reverte.com
www.reverte.com

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, queda rigurosamente prohibida, sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas por las leyes.

603

AGRADECIMIENTO

Es un placer expresar nuestra estimación a

FREDERICK H. MURPHY,

presidente de Holden Day, cuya actividad creadora como editor ha permitido dar a luz esta obra.

Prólogo

Este libro se ha escrito pensando en el amplio sector de estudiantes cuyo interés por el Análisis de variable compleja se debe, principalmente, a que puede resultarles útil. Su contenido representa lo que, en opinión de los autores, es la información mínima indispensable tanto para matemáticos como para físicos e ingenieros.

No existiendo amplio acuerdo acerca de los fundamentos de la Matemática, en Análisis se opta, generalmente, por establecer un conjunto de postulados, que tampoco son de aceptación universal, y desarrollar a partir de ellos el resto de la teoría. En este texto hemos asumido la validez de numerosos resultados de Análisis de variable real. En la actualidad estos resultados previos forman parte no sólo de los cursos de Cálculo y Análisis real, sino también de los primeros cursos de Matemáticas para físicos e ingenieros. De todas formas, un estudiante no familiarizado con algunos de los resultados asumidos puede, sencillamente, aceptar como válidas las proposiciones basadas en ellos y continuar el estudio del texto. En este sentido, el desarrollo lógico del texto es autónomo.

Al estudiar Matemáticas el objetivo no debe ser tan sólo un aprendizaje pasivo motivado por la belleza estética del tema. Debe sobre todo desarrollar la capacidad de utilizar los conocimientos adquiridos en otras regiones de la Matemática, de aplicar las Matemáticas en otras disciplinas y de crear nuevas matemáticas. Hemos intentado aquí dar idea tanto de la amplitud del Análisis de variable compleja como de su profundidad.

Norman Levinson
Raymond M. Redheffer

Al instructor

Para ciertos fines no es preciso estudiar con detalle las secciones afectadas de* que pueden, sin embargo, utilizarse ocasionalmente como material de consulta y referencia. Uno de los motivos para distinguir de esta forma una sección es que su contenido siga tan de cerca el correspondiente desarrollo en variable real que muchos lectores no tendrían inconveniente en aceptar sin mayor justificación los resultados que se dan en ella. También se han señalado con asterisco aquellas secciones en las que se presentan aplicaciones importantes, pero aisladas. En ocasiones, una sección marcada con asterisco contiene ideas nuevas y esenciales, pero expuestas con un grado de rigor y generalidad que podría parecer superfluo a quienes estén interesados principalmente en las aplicaciones. En estos casos se hace un resumen informal de su contenido en la primera de las secciones ordinarias siguientes. De acuerdo con nuestra experiencia, omitiendo las secciones "asterisco" el instructor puede alcanzar el núcleo de la integración de variable compleja antes de finalizar la cuarta semana. La rapidez de exposición así obtenida resulta muy satisfactoria para los estudiantes de Matemática aplicada, que sólo disponen de un tiempo muy limitado para adquirir las ideas esenciales.

Para ahorrar espacio muchos problemas se componen de varias partes no numeradas, dispuestas a lo ancho de la página. En general, su dificultad técnica aumenta horizontalmente, mientras que su dificultad conceptual lo hace en sentido vertical; es decir, su dificultad teórica es función creciente de su número de orden. Los problemas pueden clasificarse en tres grandes categorías: (1) Aquellos cuyo objeto es asegurar la asimilación de las ideas de la sección que los precede, (2) aquellos que preparan al lector para comprender mejor otros conceptos expuestos más adelante, y (3) los que dan nuevos teoremas y sirven como punto de partida para una posible investigación original del lector. Algunos problemas de carácter superior se han incluido con objeto de enriquecer el texto cuando éste se usa con alumnos adelantados, como han hecho los autores. En tales casos las condiciones y conocimientos previos se enuncian explícitamente.

Ambos autores han efectuado gran parte de sus trabajos de investigación sobre teoría de funciones de una variable compleja, por lo que este tema es para ellos de gran dinamismo y vitalidad. Al objeto de llevar rápidamente al estudiante a un nivel desde el que pueda disponer de perspectiva y la teoría se le presente como un cuerpo vivo, hemos debido efectuar algunos "recortes". Ciertos desarrollos analíticos se han simplificado

mediante consideraciones de Geometría plana; también han sido precisos ciertos compromisos en la notación. La presentación de la teoría se ha hecho en el orden lógico, "teorema" - "demostración", pero en nuestra opinión debe concederse gran valor a la intuición, a fin de conseguir a un tiempo una comprensión más profunda de los conceptos y fundamento de ellos. Aunque nuestros objetivos sean limitados, hemos tratado de enseñar más la actitud del realizador activo que la del espectador pasivo en esta elegante y fundamental región de las Matemáticas.

Norman Levinson
Raymond M. Redheffer

Sugerencias para usar este texto

Este libro está organizado en cincuenta lecciones. La última de cada capítulo es muy breve, y da oportunidad de repasar las anteriores.

Curso de un semestre para matemáticos

Capítulo 1: 1,2,3,4,5,6
Capítulo 2: 1,2,3,4,7
Capítulo 3: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10
Capítulo 4: 1,2,3,6,9
Capítulo 5: 1,2,6,7,8
Capítulo 6: 1,2,3

Curso de un semestre para ingenieros

Capítulo 1: 1,2,3,4
Capítulo 2: 1,2,3,5,6
Capítulo 5: 1,2,3,4,5
Capítulo 3: 3,5,6,7,8,9
Capítulo 4: 2,3,4,5,6,7,10
Capítulo 6: 1,2,3,4

Curso de un semestre para físicos

Capítulo 1: 1,2,3,4
Capítulo 2: 1,2,3,4,5
Capítulo 3: 3,5,6,7,8,9
Capítulo 4: 2,3,4,5,6,8,10
Capítulo 5: 1,2,3,4
Capítulo 6: 1,2,3,5,6,7,8,9

Curso de dos semestres

Primer semestre: Capítulos 1,2,3
Segundo semestre: Capítulos 4,5,6

Curso de dos semestres para estudiantes avanzados

Primer semestre: Casi todo este libro
Segundo semestre: Temas escogidos de obras superiores y de artículos originales.

Índice analítico

Prólogo VII
Al instructor IX
Sugerencias para usar este texto XI

Capítulo 1. Números complejos y funciones 1

1. Los números complejos 1
2. Valores absolutos 8
3. La multiplicación y el plano complejo 15
4. Regiones y funciones 22
5. Límites y continuidad 31
6. Los números complejos como pares de números reales 37

Capítulo. 2. La derivación de variable compleja 42

1. Funciones analíticas 42
2. Funciones exponencial y trigonométricas 50
3. Las funciones logarítmica-exponencial 58
4. La superficie de Riemann de log z 65
5. Funciones armónicas 72
6. Aplicación al estudio de flujos planos 77
7. Los fundamentos del análisis de variable compleja 87

Capítulo 3. La integración de variable compleja 93

1. Integración sobre un contorno 93
2. Otras propiedades de las integrales. Invariancia 102
3. El teorema de Cauchy; caso particular 113
4. El teorema de Cauchy-Gousart; caso particular 122
5. La fórmula integral de Cauchy y sus consecuencias 128
6. La serie de Taylor 136
7. Principios de identidad y del módulo máximo 144
8. Singularidades aisladas 151
9. Series de Laurent 160
10. La noción de analiticidad 169

Capítulo 4. Teoría de residuos 176

1. Dominios simplemente conexos 176
2. El teorema de los residuos 185
3. Integrales sobre el eje real 194
4. Integrales impropias. Valores principales 201
5. Integrandos con puntos de ramificación 209
6. Principio del argumento; teorema de Rouche 215
7. Fórmulas de Poisson, Hilbert y Bromwich 223
8. Residuo en el punto del infinito 232
9. Otras formas del teorema de los residuos 241
10. Deformación de contornos 251

Capítulo 5. Representación conforme 258

1. Representación conforme. Transformaciones bilineales 258
2. Transformaciones bilineales. Continuación 267
3. Funciones armónicas y representación conforme 277
4. La transformación de Schwarz-Christoffel 288
5. Polinomios de Hurwitz. Funciones positivas 296
6. Aplicaciones inversas. Funciones univalentes 304
7. Teoremas globales 312
8. Teorema de representación de Riemann 319

Capítulo 6. Convergencia uniforme 330

1. Convergencia de sucesiones 330
2. Convergencia de series 338

3. Series de potencias 346
4. Fórmulas de Parseval, Schwarz y Poisson 353
5. Funciones definidas por integrales 360
6. Series asintóticas 369
7. Productos infinitos 379
8. Desarrollos de Weierstrass y de Mittag-Leffler 387
9. Prolongación analítica 397

Notas 411
Respuestas 415
Indice alfabético 423

Capítulo 1

Números complejos y funciones

En este capítulo se revisan desde el punto de vista de la variable compleja los conceptos y resultados referentes a polinomios, funciones, regiones y límites que ya son familiares en el Análisis de variable real. Aunque existen muchas semejanzas, el carácter bidimensional de los números complejos da a las descripciones geométricas un aspecto peculiar. Por ejemplo, una función real de variable real suele transformar un intervalo de la recta en otro intervalo, mientras que una función de una variable compleja aplica generalmente una región plana sobre otra región plana. El carácter bidimensional de los números complejos explica, en parte, el destacado papel de la topología del plano en el Análisis de variable compleja, así como la efectividad y potencia de este análisis en los problemas bidimensionales de la Física matemática.

1. Los números complejos. Como el cuadrado de un número real cualquiera es positivo o nulo, no es posible resolver la ecuación $x^2 = -1$ mediante números reales. Los números complejos son una extensión del sistema de los números reales; constituyen un sistema más amplio en el que la ecuación anterior y otras parecidas admiten soluciones. Los matemáticos conocen desde hace mucho tiempo la imposibilidad de resolver ecuaciones como la $x^2 + 1 = 0$ mediante números reales. Sin embargo, el desarrollo teórico de los números complejos no pudo realizarse sino siglos después de conocerse esta dificultad, lo que muestra que la noción de número complejo no es, en modo alguno, evidente.

En el pasado se construyeron los números complejos adjuntando al sistema de los números reales el símbolo $\sqrt{-1}$ que satisface la ecuación $x^2 + 1 = 0$ por definición. Esta notación no es, en realidad, muy satisfactoria, pues el símbolo $\sqrt{-1}$ origina las mismas dificultades que aparecen si se representa el 1 por $\sqrt{1}$. Como -1 es también una raíz cuadrada de 1, pueden darse situaciones aparentemente paradójicas al operar sin rigor con $\sqrt{1}$. Una conocida paradoja, debida a una ligereza excesiva al operar con $\sqrt{-1}$, es la siguiente: $(\sqrt{-1})^2 = -1$ y, por otra parte, $(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$. Se evita este escollo representando por i la $\sqrt{-1}$, notación que fue introducida por el matemático suizo Leonhard Euler en 1779. Con ella se respeta la propiedad fundamental $i^2 = -1$, y en cambio, hay poco peligro de confundir i con $-i$. El símbolo i se denomina a veces unidad imaginaria, del mismo modo que el 1 suele denominarse unidad real.

Sirviéndonos de la notación de Euler, daremos aquí un resumen de las propiedades algebraicas de los números complejos. Se supone que el lector posee ya cierta práctica en

el manejo de los números complejos, por lo que, tal vez, podrá interesarle una exposición exclusivamente algebraica. Se le supondrá también familiarizado con el sistema de los números reales; pero en las páginas próximas no se hará ninguna consideración de tipo geométrico.

Se define un número complejo α por dos números reales a y b, y se designa por:

$$\alpha = a + ib.$$

El número a es la parte real de α; y el b es su parte imaginaria. Siempre que se escriba una igualdad del tipo $\alpha = a + ib$ y no se especifique otra cosa, ha de entenderse que a y b son reales. Así pues

$$a = \operatorname{Re} \alpha, \qquad b = \operatorname{Im} \alpha$$

donde los símbolos Re e Im representan las partes real e imaginaria, respectivamente.

Si $\alpha = a + ib$ y $\beta = c + id$, los números complejos α y β son iguales si y solamente si $a = c$ y $b = d$. La suma y el producto de α y β son, por definición,

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= (a + c) + i(b + d) \\ \alpha\beta &= (ac - bd) + i(ad + bc). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Estos son los resultados que se obtendrían operando con los primeros miembros de acuerdo con las reglas ordinarias de la Aritmética y aplicando la relación $i^2 = -1$. De las fórmulas (1.1) se deducen fácilmente las leyes asociativas, conmutativas y distributiva:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \beta + \alpha & \alpha\beta &= \beta\alpha \\ \alpha + (\beta + \gamma) &= (\alpha + \beta) + \gamma & \alpha(\beta\gamma) &= (\alpha\beta)\gamma \\ \alpha(\beta + \gamma) &= \alpha\beta + \alpha\gamma. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Si en (1.1) hacemos $b = d = 0$, vemos que

$$\begin{aligned} (a + i0) + (c + i0) &= (a + c) + i0 \\ (a + i0)(c + i0) &= (ac) + i0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Las igualdades (1.3) indican que el número complejo $x + i0$ es, excepto en notación, equivalente al número real x, y haremos así, considerar que

$$x = x + i0.$$

Esta igualdad muestra que los números complejos contienen como caso particular a los números reales.

Se comprueba mediante (1.1) que $0 + i0$ y $1 + i0$ son el cero y la unidad, respectivamente. Es decir,

$$\alpha + (0 + i0) = \alpha, \qquad \alpha(1 + i0) = \alpha \tag{1.4}$$

para todo α. Como en la correspondencia entre números reales y complejos antes mencionada es $0 = 0 + i0$ y $1 = 1 + i0$, las ecuaciones (1.4) adoptan la forma familiar $\alpha + 0 = \alpha$, $\alpha 1 = \alpha$.

Se denota por $-\alpha$ el producto $(-1)(\alpha)$. Con más precisión,

$$\alpha + (-\alpha) = (1)(\alpha) + (-1)(\alpha) = [(1) + (-1)](\alpha) = 0.$$

Dados dos números complejos cualesquiera α y β, la ecuación

$$\alpha + z = \beta \tag{1.5}$$

tiene siempre una única solución z, que es su *diferencia* y se escribe $\beta - \alpha$. En efecto, sumando $-\alpha$ a los dos miembros de (1.5) se obtiene

$$z = \beta + (-\alpha)$$

y recíprocamente, este valor de z satisface a (1.5). Así pues, $\beta - \alpha = \beta + (-\alpha)$.
El *conjugado* de α se denota $\bar{\alpha}$ y se define como

$$\bar{\alpha} = a - ib.$$

El conjugado de $\bar{\alpha}$ es α. En virtud de (1.1),

$$\alpha\bar{\alpha} = a^2 + b^2$$

y por lo tanto, $\alpha\bar{\alpha} > 0$ salvo cuando $\alpha = 0$.

Si $\alpha \neq 0$ y $z = x + iy$, la ecuación

$$\alpha z = \beta \tag{1.6}$$

tiene una solución única z que es el *cociente* de β por α y que se designa por β/α. Podría obtenerse igualando las partes real e imaginaria de los dos miembros de (1.6), y resolviendo el sistema de dos ecuaciones lineales en x e y con determinante $a^2 + b^2$. Pero es más conveniente multiplicar ambos miembros de (1.6) por $\bar{\alpha}$, lo que da

$$\bar{\alpha}\alpha z = \bar{\alpha}\beta.$$

Como $\bar{\alpha}\alpha > 0$, la ecuación anterior se puede multiplicar por $1/(\bar{\alpha}\alpha)$ obteniéndose

$$z = \frac{1}{\bar{\alpha}\alpha}\bar{\alpha}\alpha z = \frac{1}{\bar{\alpha}\alpha}\bar{\alpha}\beta = \frac{1}{a^2 + b^2}(a - ib)(c + id). \tag{1.7}$$

Recíprocamente, el valor de z dado por (1.7) satisface a (1.6).

La discusión anterior muestra que las leyes formales de la adición, substracción, multiplicación y división de números complejos son análogas a las de los números reales, y por tanto, ciertas definiciones y conceptos ya conocidos para la variable real, pueden extenderse sin más al caso complejo. Por ejemplo, como el lector recordará del Análisis real, una expresión de la forma

$$P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$

es un polinomio en z con coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Si $a_n \neq 0$, el grado del polinomio es n. Las mismas definiciones son válidas para el caso complejo, pero ahora los coeficientes, y z pueden ser complejos. Cuando todos los coeficientes son reales se dice que el polinomio es un polinomio real.

Para construir el polinomio $P(z)$ solamente son precisas la adición y la multiplicación. Como en el caso real, una función $P(z)/Q(z)$ que puede representarse como cociente de dos polinomios se llama función racional. Cuando los dos polinomios P y Q sean reales se dice que la correspondiente función racional es real.

Esta terminología se generaliza de manera evidente a situaciones parecidas. Por ejemplo, sumando, multiplicando y dividiendo reiteradamente $\alpha, \beta, \ldots, \sigma$ entre sí y con números reales, se obtiene una función racional real de $\alpha, \beta, \ldots, \sigma$

De la definición de conjugado de un número se deduce que

$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \qquad \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}.$$

Estos resultados se extienden por inducción para cualquier número finito de sumandos o factores:

$$\overline{\alpha + \beta + \cdots + \sigma} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \cdots + \bar{\sigma}$$
$$\overline{\alpha\beta \cdots \sigma} = \bar{\alpha}\bar{\beta} \cdots \bar{\sigma}.$$

Diremos brevemente que el conjugado de una suma es igual a la suma de los conjugados, y que el conjugado de un producto es igual al producto de los conjugados de los factores.

Si $\alpha z = \beta$, entonces $\bar{\alpha}\bar{z} = \bar{\beta}$ y, puesto que $z = \beta/\alpha$, tenemos

$$\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} = \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \qquad (\alpha \neq 0).$$

Además, si c es real $\bar{c} = c$ y por tanto $\overline{c\alpha} = c\bar{\alpha}$ en este caso. Combinando estos resultados resulta que, si F es una función racional real cualquiera de $\alpha, \beta, \ldots, \sigma$, entonces

$$\overline{F(\alpha, \beta, \ldots, \sigma)} = F(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \ldots, \overline{\sigma}).$$

Ejemplo 1.1. Si α es un número complejo cualquiera, demostrar que

$$\operatorname{Re}\alpha = \frac{\alpha + \overline{\alpha}}{2}, \qquad \operatorname{Im}\alpha = \frac{\alpha - \overline{\alpha}}{2i}.$$

Si $\alpha = a + ib$, entonces $\alpha + \overline{\alpha} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2\operatorname{Re}\alpha$, lo que da la primera ecuación. La demostración de la segunda es análoga.

Ejemplo 1.2. Resolver como se indica en el texto la ecuación $(1 + i)z = 2 + i$. Multiplicando por $1 - i$, que es el conjugado del coeficiente de z, se tiene

$$(1 + i)(1 - i)z = (1 - i)(2 + i) = 2 - i - i^2,$$

es decir, $2z = 3 - i$. Finalmente, dividiendo por 2 resulta $z = \frac{3}{2} - (\frac{1}{2})i$.

Ejemplo 1.3. Escribir $(2 + i)/(1 + i)$ en la forma $a + ib$. Multiplicando por el conjugado del denominador, $1 - i$, el numerador y el denominador de la fracción, se obtiene

$$\frac{2 + i}{1 + i} = \frac{(2 + i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{3 - i}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Hemos utilizado el hecho de que si α y γ son distintos de cero, se tiene $\beta/\alpha = \gamma\beta/\gamma\alpha$. Esta propiedad se deduce de la definición de cociente, según la cual β/α y $\gamma\beta/\gamma\alpha$ son las únicas soluciones de

$$\alpha z = \beta \qquad \text{y} \qquad \gamma\alpha z = \gamma\beta,$$

respectivamente. Estas ecuaciones son claramente equivalentes por lo que sus soluciones son iguales. Las restantes propiedades de las operaciones con fracciones se generalizan con igual facilidad del caso real al complejo y no debe dudarse en utilizarlas. Una observación parecida es aplicable a las potencias con exponentes enteros; así, por ejemplo,

$$\alpha^m\alpha^n = \alpha^{m+n}, \qquad (\alpha^m)^n = \alpha^{mn}, \qquad (\alpha\beta)^n = \alpha^n\beta^n.$$

Ejemplo 1.4. Si P es un polinomio, un número α, real o complejo, tal que $P(\alpha) = 0$ es un *cero* del polinomio. Demostrar que los ceros complejos de un polinomio real se presentan siempre por pares conjugados.

Hay que probar que si $P(\alpha) = 0$, entonces es $P(\overline{\alpha}) = 0$. Como P es real, se tiene

$$P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = \bar{0} = 0,$$

lo que completa la demostración.

Ejemplo 1.5. Demostrar que para todo entero positivo n se verifica

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}, \qquad z \neq 1.$$

Si llamamos s al primer miembro de la igualdad, s y sz son respectivamente

$$s = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-2} + z^{n-1}$$
$$sz = z + z^2 + \cdots + z^{n-1} + z^n.$$

Restando miembro a miembro, $s(1 - z) = 1 - z^n$. Dividiendo por $1 - z$ se obtiene s.

Ejemplo 1.6. Si n es un entero positivo, demostrar que existen números reales positivos $c_0, c_1, \ldots, c_n$ tales que $c_0 = 1$, $c_1 = n$ y que

$$(1 + z)^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n$$

para todo número complejo z. Se efectúa la demostración por inducción. El resultado es trivial para $n = 1$ y suponiéndolo válido para n, multiplicando por $1 + z$ se tiene

$$(1 + z)^{n+1} = c_0 + (c_1 + c_0)z + \cdots + (c_n + c_{n-1})z^n + c_n z^{n+1}.$$

Observando esta expresión se comprueba que los nuevos coeficientes son positivos si lo eran los antiguos, que el término constante $c_0 = 1$ permanece invariable, y que el nuevo coeficiente de z es $n + 1$ si el primitivo coeficiente c_1 era n.

Este es el desarrollo de la potencia de un binomio que conocemos ya del análisis real; los coeficientes c_k son los coeficientes binomiales. La demostración anterior pone de manifiesto que este desarrollo es válido tanto si z es un número real como si es complejo.

Problemas

1. Calcular Re $(1+i)$, Im $(3-2i)$, $\overline{3-2i}$, $(1+i)+(3-2i)$, $(1+i)(3-2i)$.
2. Comprobar que $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ para $\alpha = 1 + 3i$, $\beta = 2 + 2i$, $\gamma = 3 + i$.
3. Resolver como en el Ejemplo 1.2 y comprobar el resultado sustituyéndolo:

$$(1 + i)z = 1, \qquad (5 + i)z = 6 - i, \qquad (1 + ib)z = 1 - ib.$$

4. Escríbanse en la forma $a + ib$ siendo $z = x + iy$, $z \neq 0$, $z \neq i$:

$$(1 + i)^2, \qquad (1 + i)^{11}, \qquad \frac{3 + 4i}{1 - 2i}, \qquad z^3, \qquad \bar{z}z, \qquad \frac{\bar{z}}{z}, \qquad \frac{z - i}{1 - \bar{z}i}.$$

5. Demostrar que $\operatorname{Re}(1/z) > 0$ si y solamente si $\operatorname{Re} z > 0$.
6. (a) Supongamos que en el ejemplo 1.6 n sea múltiplo de 4. Haciendo $z = i$ e igualando las partes imaginarias, demostrar que los coeficientes binomiales satisfacen, en este caso,

$$c_1 - c_3 + c_5 - c_7 + \cdots = 0.$$

(b) Obtener otra identidad igualando las partes reales.
(c) Considerar otros valores de n.

7. En el Ejemplo 1.6, poner $z = \beta/\alpha$ y multiplicar por α^n. Ha de obtenerse

$$(\alpha + \beta)^n = c_0\alpha^n + c_1\alpha^{n-1}\beta + c_2\alpha^{n-2}\beta^2 + \cdots + c_n\beta^n.$$

8. En el Ejemplo 1.5, poner $z = \beta/\alpha$ y multiplicar por α^{n-1}. Ha de obtenerse

$$\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \qquad \alpha \neq \beta.$$

9. Si $\alpha = \beta$ y $\gamma = \delta$, probar $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ y $\alpha\gamma = \beta\delta$.
10. Si $\alpha\beta = 0$, demostrar $\alpha = 0$ o $\beta = 0$. (Cuando $\alpha \neq 0$, α^{-1} existe.)
11. Si $\beta \neq 0$ y $\delta \neq 0$, entonces $(\alpha/\beta)(\gamma/\delta) = (\alpha\gamma)/(\beta\delta)$. (Mostrar que cada uno de los miembros verifica $(\beta\delta)z = \alpha\gamma$.)

Polinomios

12. Sea z_0 un número complejo dado. Se dice que un polinomio $P(z)$ es *divisible* por $z - z_0$ si $P(z) = (z - z_0)Q(z)$ donde $Q(z)$ es un polinomio. Para $n = 1, 2, 3, \ldots$ y c constante, demostrar que $c(z^n - z_0^n)$ es divisible por $z - z_0$. (Poner $\alpha = z$ y $\beta = z_0$ en el problema 8.)
13. Si $P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_mz^m$ es un polinomio arbitrario, demostrar que

$$P(z) - P(z_0)$$

es divisible por $z - z_0$. (Expresar $P(z) - P(z_0)$ en forma de una suma de términos análogos a los del Problema 12.)
14. Deducir del Problema 13 que $P(z)$ es divisible por $z - z_0$ si $P(z_0) = 0$.
15. Sea $P(z)$ un polinomio de grado $\leq n$ que se anula en n valores distintos $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Demostrar que

$$P(z) = c(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

donde c es una constante. (Por el Problema 14, $P(z) = (z - z_n)Q(z)$ y $Q(z) = 0$ en $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$. Proceder por inducción.)

16. Demostrar que si el polinomio $P(z)$ tiene grado $\leq n$ y se anula para $n+1$ valores distintos z_k, entonces $P(z) = 0$. (Haciendo $z = z_{n+1}$ en el Problema 15 se deduce $c = 0$.)
17. Si $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios de grado $\leq n$ que toman el mismo valor para $n+1$ valores z_k, distintos, entonces $P(z) = Q(z)$. (Aplicar el Problema 16 a $P(z) - Q(z)$.)

2. Valores absolutos. Muchos de los conceptos y proposiciones del Análisis se expresan por desigualdades, y no existe una relación $<$ entre números complejos que posea las propiedades habituales de la relación de orden de los números reales.[1] Sin embargo, introduciendo el concepto de valor absoluto se pueden expresar con facilidad desigualdades en las que intervienen números complejos.

Si $\alpha = a + ib$, el *valor absoluto* de α se representa por $|\alpha|$ y se define como la raíz cuadrada no negativa de $a^2 + b^2$. Así pues,

$$|\alpha|^2 = a^2 + b^2 = \alpha\bar{\alpha} \qquad \text{y} \qquad |\alpha| \geq 0.$$

Es evidente que $|\alpha| > 0$ excepto cuando $\alpha = 0$. Si c es positivo $|c| = c$. La expresión $|\alpha|$ se llama con frecuencia *módulo* de α.

Se deduce de $|\alpha|^2 = \alpha\bar{\alpha}$, que $|\bar{\alpha}| = |\alpha|$. Por consiguiente

$$|\alpha\beta|^2 = \alpha\beta\,\overline{\alpha\beta} = \alpha\beta\,\bar{\alpha}\bar{\beta} = \alpha\bar{\alpha}\,\beta\bar{\beta} = |\alpha|^2\,|\beta|^2,$$

y extrayendo la raíz cuadrada

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|. \tag{2.1}$$

Este resultado se generaliza por inducción para productos de cualquier número de factores, dando

$$|\alpha\beta \cdots \sigma| = |\alpha||\beta| \cdots |\sigma|,$$

que establece que el valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos de los factores.

Si $\alpha z = \beta$, entonces $|\alpha||z| = |\beta|$ y, dado que $z = \beta/\alpha$ si $\alpha \neq 0$,

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = \frac{|\beta|}{|\alpha|} \qquad (\alpha \neq 0).$$

Lo que nos dice que el valor absoluto de un cociente es igual al cociente de los valores absolutos.

Como $a^2 \leq a^2 + b^2$ y $b^2 \leq a^2 + b^2$ tomando la raíz cuadrada positiva de los dos miembros de las dos expresiones vemos que $|a| \leq |\alpha|$ y que $|b| \leq |\alpha|$, es decir,

$$|\text{Re}\,\alpha| \leq |\alpha|, \qquad |\text{Im}\,\alpha| \leq |\alpha|.$$

[1] Por lo tanto, una desigualdad como $a < b$ o $0 \leq t \leq 1$ implica automáticamente que los números considerados son reales.

Si $\gamma=\alpha\overline{\beta}$, entonces $\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta = \gamma + \overline{\gamma} = 2\text{Re}\ \gamma$, y por tanto la fórmula

$$(\alpha + \beta)(\overline{\alpha} + \overline{\beta}) = \alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + \beta\overline{\beta}$$

da

$$|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\text{Re}\,(\alpha\overline{\beta}). \tag{2.2}$$

Como

$$|\text{Re}\,(\alpha\overline{\beta})| \leq |\alpha\overline{\beta}| = |\alpha||\beta|,$$

resulta

$$|\alpha + \beta|^2 \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha||\beta| = (|\alpha| + |\beta|)^2$$

o sea

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|. \tag{2.3}$$

Este resultado se extiende por inducción para una suma finita cualquiera, así que es:

$$|\alpha + \beta + \cdots + \sigma| \leq |\alpha| + |\beta| + \cdots + |\sigma|. \tag{2.4}$$

Luego, el valor absoluto de una suma no puede ser mayor que la suma de los valores absolutos de sus términos.

En (2.3) es válido el signo de igualdad si y solamente si $\text{Re}\,(\alpha\overline{\beta})=|\alpha\overline{\beta}|$ en (2.2). A su vez, esto ocurrirá si y solamente si $\alpha\overline{\beta} \geq 0$. Dado que $\alpha\overline{\beta} = (\alpha/\beta)|\beta|^2$ si $\beta \neq 0$, resulta que la igualdad es válida en (2.3) si y solamente si $\alpha/\beta \geq 0$ o $\beta = 0$.

Terminaremos esta discusión acerca del valor absoluto y sus propiedades mencionando dos interpretaciones posibles de los conceptos anteriores; en la primera se hace uso de los vectores y en la segunda del plano cartesiano.

Si, como muestra la Figura 2-1 se representa el número complejo $\alpha=a + ib$ por un vector de componente horizontal a y de componente vertical b, la regla de adición

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

pone de manifiesto que los números complejos se suman como los vectores (Figura 2-2). También es claro que $|\alpha| = (a^2 + b^2)^{1/2}$ es la longitud del vector que representa a α. Así pues, (2.3) expresa el hecho de que la suma de dos lados de un triángulo es mayor o igual que el tercero. Por este motivo, a veces, (2.3) se denomina desigualdad triangular. Análogamente, en términos geométricos, (2.4) afirma que la línea recta es la distancia más corta entre dos puntos, como se muestra en la Figura 2-3. La sustracción de vectores se ilustra geométricamente en la Figura 2-4, donde

$$\alpha = \beta + (\alpha - \beta). \tag{2.5}$$

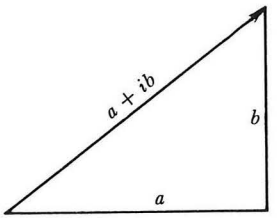

Figura 2-1

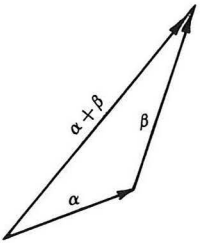

Figura 2-2

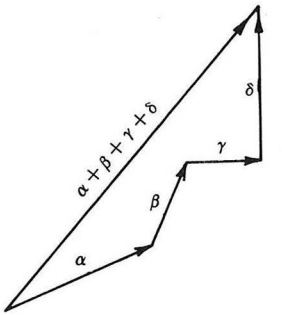

Figura 2-3

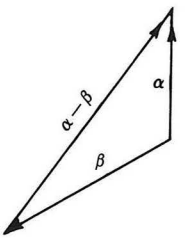

Figura 2-4

Como la suma de los valores absolutos acota superiormente al valor absoluto de la suma, de (2.5) se deduce $|\alpha| \leq |\beta|+|\alpha - \beta|$ y restando $|\beta|$ de los dos miembros,

$$|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha - \beta|.$$

Intercambiando los papeles de α y β se obtiene una desigualdad análoga para $|\beta| - |\alpha|$ y por consiguiente

$$\big||\alpha| - |\beta|\big| \leq |\alpha - \beta|. \tag{2.6}$$

De acuerdo con la Figura 2-4 esta desigualdad expresa que la diferencia de dos lados de un triángulo no puede ser mayor que el tercero.

La representación de los números complejos mediante vectores es de gran utilidad en Dinámica, en la teoría de las corrientes alternas, y en otras muchas cuestiones. Sin embargo, la representación mediante puntos del plano, que describimos a continuación, es mucho más importante desde el punto de vista conceptual.

Cada número complejo $z = x + iy$ puede asociarse con un único punto (x,y) del plano cartesiano, y recíprocamente, cada punto (x, y) del plano corresponde a un único

número complejo $x + iy$. Podemos, pues, sin riesgo de confusión, considerar a los números complejos como puntos del plano y hablar indistintamente del punto z o del número complejo z.

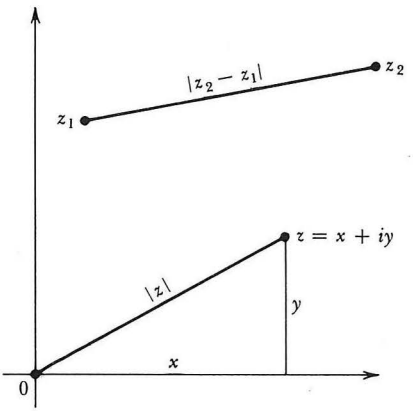

Figura 2-5

Como es evidente, $|z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$ representa la distancia desde z hasta el origen (Figura 2-5). La distancia entre dos puntos

$$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad \text{y} \qquad z_2 = x_2 + iy_2$$

es

$$[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}$$

como ya se sabe por una conocida fórmula de Geometría analítica, y por la definición de valor absoluto esta expresión es $|z_2 - z_1|$. Por consiguiente, desde un punto de vista geométrico, $|z_2 - z_1|$ debe interpretarse como la distancia de z_1 a z_2.

Sustituyendo z por $z' = z + \alpha$, donde $\alpha = a + ib$, las nuevas coordenadas son

$$x' = x + a, \qquad y' = y + b,$$

y por lo tanto la transformación $z' = z + \alpha$ representa una traslación. Como

$$|z_2' - z_1'| = |(z_2 + \alpha) - (z_1 + \alpha)| = |z_2 - z_1|,$$

la traslación conserva las distancias, como geométricamente era de esperar.

Si sustituimos z por $z' = \bar{z}$, las nuevas coordenadas son $(x, -y)$, y luego esta transformación representa la simetría (o reflexión) respecto del eje x (Figura 2-6). La simetría no modifica las distancias, pues

$$|z_2' - z_1'| = |\bar{z}_2 - \bar{z}_1| = |\overline{z_2 - z_1}| = |z_2 - z_1|.$$

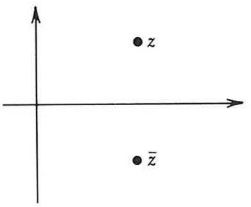

Figura 2-6

Si sustituimos z por $z' = \alpha z$, donde α es un número complejo cualquiera de módulo 1, entonces

$$|z_2' - z_1'| = |\alpha z_2 - \alpha z_1| = |\alpha||z_2 - z_1| = |z_2 - z_1|.$$

Por lo tanto, esta transformación también conserva las distancias. Como se verá en la próxima sección, representa un giro con centro en el origen.

Ejemplo 2.1. Si $|\alpha| < 1$, demostrar que $|z| \leq 1$ es equivalente a

$$\left|\frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}\right| \leq 1.$$

Multiplicando esta desigualdad por $|1 - \bar{\alpha}z|$ y elevando al cuadrado, vemos que la desigualdad anterior es equivalente a

$$|z - \alpha|^2 \leq |1 - \bar{\alpha}z|^2,$$

la cual, a su vez, es equivalente a

$$(z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) \leq (1 - \bar{\alpha}z)(1 - \alpha\bar{z}).$$

Reduciendo todos los términos semejantes, encontramos que esta última expresión se simplifica obteniéndose

$$(1 - |\alpha|^2)(1 - |z|^2) \geq 0,$$

que es válida si y solamente si $|z| \leq 1$. La demostración muestra que la igualdad se verifica si y solamente si $|z| = 1$

Ejemplo 2.2. Una colección de puntos del plano z se denomina también conjunto puntual o conjunto de puntos. Si ϵ es un número positivo dado, descríbanse los conjuntos de

puntos z tales que $|z - z_0| = \epsilon$ y $|z - z_0| < \epsilon$. Como $|z - z_0|$ es la distancia desde z hasta z_0, el primer conjunto representa una circunferencia de centro z_0 radio ϵ, que se muestra en la Figura 2-7. El segundo conjunto es el interior de este círculo representado por el disco circular de la Figura 2-8.

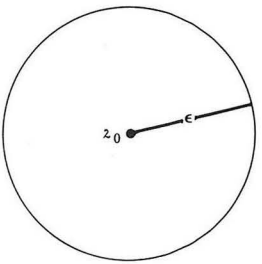

Figura 2-7

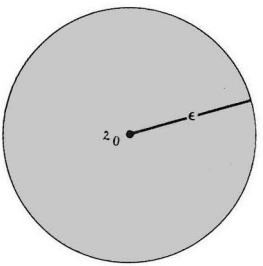

Figura 2-8

En Análisis es frecuente que al describir un conjunto, se den solamente las desigualdades que lo definen, omitiéndose la frase "el conjunto de todos los z tales que . . .". Según esto, se puede decir: la circunferencia $|z| = 1$, el disco $|z| < 1$, etc.

Ejemplo 2.3. Si $\beta \neq 0$ demuéstrese que

$$\left|\frac{(\alpha + \beta)^n - \alpha^n}{\beta} - n\alpha^{n-1}\right| \leq \frac{(|\alpha| + |\beta|)^n - |\alpha|^n}{|\beta|} - n|\alpha|^{n-1}. \tag{2.7}$$

Por el teorema del binomio (Ejemplo 1.6),

$$(\alpha + \beta)^n - \alpha^n = c_1\alpha^{n-1}\beta + c_2\alpha^{n-2}\beta^2 + \cdots + c_n\beta^n.$$

Como $c_1 = n$ el primer miembro de (2.7) se reduce a $|F(\alpha,\beta)|$ siendo

$$F(\alpha,\beta) = c_2\alpha^{n-2}\beta + \cdots + c_n\beta^{n-1}.$$

Los coeficientes binomiales son positivos y por lo tanto en virtud de (2.4) y después de (2.1) se tiene

$$|F(\alpha,\beta)| \leq F(|\alpha|,|\beta|).$$

Esta es la desigualdad (2.7).

Ejemplo 2.4. Hallar $\sqrt{\alpha}$. Poniendo $\alpha = a + ib$, $z = x + iy$, y $z^2 = \alpha$ las ecuaciones $|z|^2 = |\alpha|$ y $\operatorname{Re} z^2 = \operatorname{Re} \alpha$ dan, respectivamente,

$$x^2 + y^2 = |\alpha|, \qquad x^2 - y^2 = a.$$

Por tanto, $x^2 = \frac{1}{2}(|\alpha| + a)$ e $y^2 = \frac{1}{2}(|\alpha| - a)$. Si se eligen los signos de x e y de forma que $2xy = b$, se comprueba fácilmente que $z^2 = \alpha$. En la próxima sección se resuelve esta ecuación por otro método que es también aplicable a la ecuación $z^n = \alpha$. Obsérvese que si $\alpha \neq 0$ hay dos raíces cuadradas de α.

Problemas

1. Si $z = x + iy$ y los denominadores no se anulan, calcular

$$\left|\frac{(3 + 4i)(2 + i)}{(1 + 2i)(3 - 4i)}\right|, \qquad |z - 1|^2, \qquad |z|^4, \qquad \left|\frac{z + 1}{z - 1}\right|, \qquad \left|\frac{z + i}{1 - iz}\right|.$$

2. (a) Hallar $\sqrt{i}$, $\sqrt{-i}$, $\sqrt{1 + i}$, $\sqrt{2i + 3}$, y comprobar elevando al cuadrado. (b) Demostrar que una ecuación cuadrática $z^2 + az + b = 0$ puede ponerse en la forma $w^2 - \alpha = 0$ haciendo $z = w + h$ eligiendo h convenientemente.
3. Describir el conjunto de puntos z tal que

   (a) $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Re} z > 0$, $|z| = 1$, $|z| > 1$, $\operatorname{Im} z = 1$, $\operatorname{Im} z < 1$, $1 < |z| < 2$.
   (b) $|z - 1| = 2$, $|z - 1| < 0.01$, $|z - 1| = |z + 1|$, $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = 1$.

4. Describir las siguientes transformaciones del plano:

$$z' = z + 1, \qquad z' = z + 1 + 2i, \qquad z' = 2z, \qquad z' = 2z + i, \qquad z' = \bar{z} + 1.$$

5. Sabiendo que $13 = 2^2 + 3^2$ y que $74 = 5^2 + 7^2$, expresar $(13)(74) = 962$ como suma de dos cuadrados. (Se hace $\alpha = 2 + 3i$, $\beta = 5 + 7i$ y se tiene en cuenta que $|\alpha|^2|\beta|^2 = |\alpha\beta|^2$.)
6. Si c es real y $\alpha \neq 0$, demostrar que $\alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + c = 0$ es la ecuación de una línea recta en el plano (x, y) y hallar su pendiente.
7. Si $|\alpha|^2 \geq c$, ¿qué figura representa la ecuación $z\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + c = 0$?
8. Si $\alpha \neq 0$, demostrar que α puede escribirse de modo único en la forma $\alpha = h\nu$ donde $h > 0$ y $|\nu| = 1$. (Al igualar los valores absolutos se obtiene $h = |\alpha|$.)
9. Los vectores α y β son paralelos si $\alpha = t\beta$ o si $\beta = t\alpha$ donde t es un número real. Deducir que la condición de paralelismo es $\operatorname{Im}\alpha\bar{\beta} = 0$.
10. (a) Demostrar que $\alpha \perp \beta$ si y solo si $\operatorname{Re}\alpha\bar{\beta} = 0$. (Dos vectores α y β son perpendiculares si y solo si verifican el teorema de Pitágoras, $|\alpha - \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$.) (b) Demostrar que $i\alpha \perp \alpha$ y $|i\alpha| = |\alpha|$, así pues, la multiplicación por i equivale a α un giro de 90°.
11. (a) En relación con el Problema 10, explicar por qué $z' = iz$ representa un giro en el plano de 90°. Ilustrar este resultado representando gráficamente z y z' para $z = 1$, i, $1 + i$. (b) Al multiplicar otra vez por i se obtiene $z'' = i(iz) = -z$. ¿Representa $z'' = -z$ un giro de 180° en el plano?
12. Aplicando (2.2) a β y a $-\beta$, demostrar la *identidad del paralelogramo*

$$|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2).$$

Dibujando α y β como vectores con el mismo origen, dar la interpretación geométrica de esta identidad.