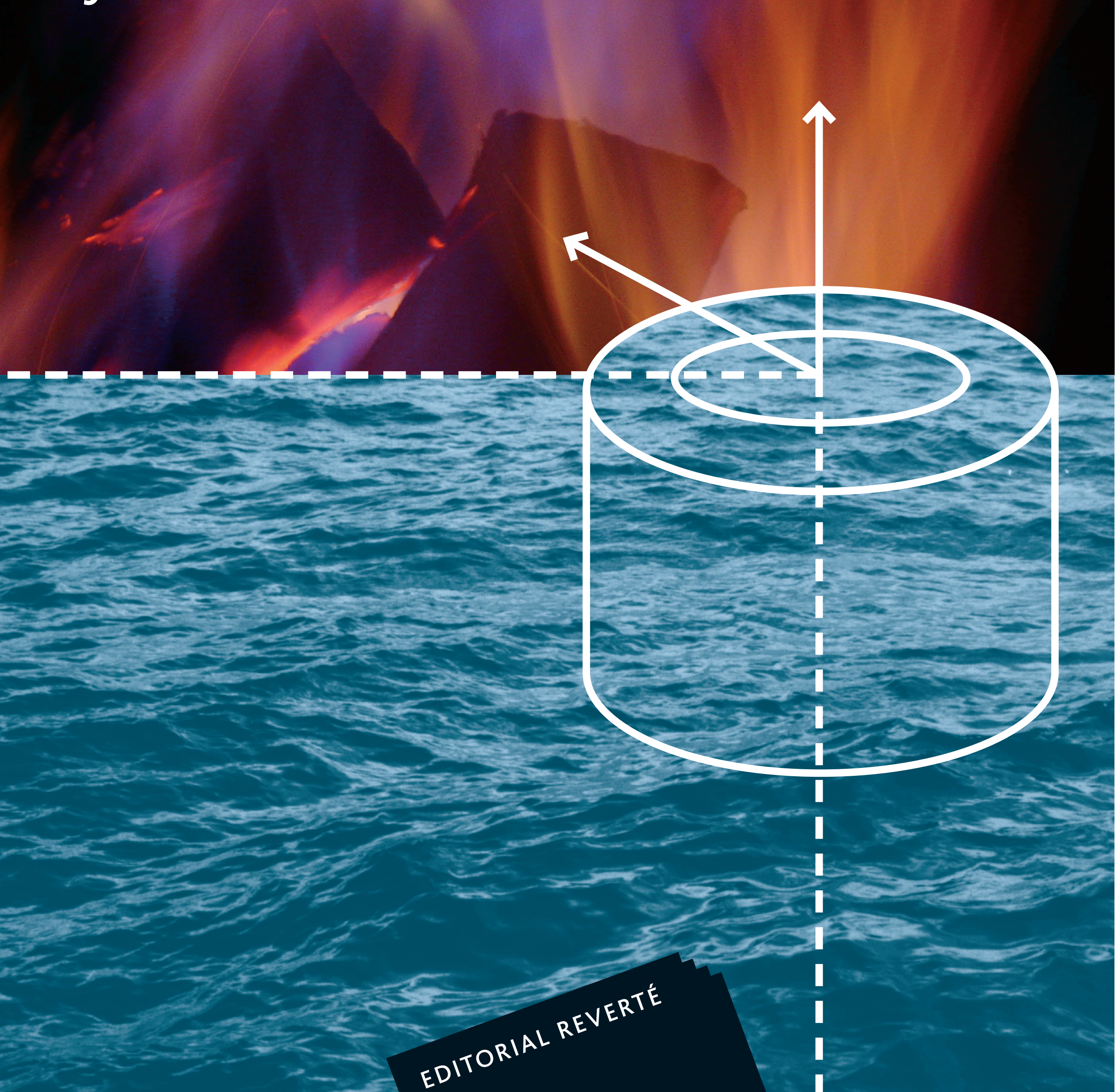
Francisco Alhama / Carmelo Nicolás Madrid

Análisis dimensional discriminado en **mecánica de fluidos** y **transferencia de calor**



EDITORIAL REVERTÉ

Análisis dimensional discriminado en mecánica de fluidos y transferencia de calor

Francisco Alhama / Carmelo Nicolás Madrid

Profesores de la Universidad Politécnica de Cartagena
Departamento de Física Aplicada

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · Caracas · México

Análisis dimensional discriminado en mecánica de fluidos y transferencia de calor

Edición en papel:
ISBN 978-84-291-4373-7

Edición e-book (PDF):
ISBN 978-84-291-9293-3

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15, Local B
08029 Barcelona
Tel: (34) 93 419 33 36
reverte@reverte.com
www.reverte.com

1371

A Juana Mari

F. Alhama

A mi esposa Adela y a mis hijos Adela, María y Nicolás

C. N. Madrid

Índice analítico

Prólogo

Sobre el texto

El presente trabajo es fruto de los trabajos que en la disciplina de análisis dimensional han llevado a cabo los autores en los últimos años. El concepto de discriminación no es nuevo y ha sido aplicado con éxito a numerosos problemas. Su importancia, que supone un salto cualitativo esencial, permite añadir el calificativo de discriminado al concepto de análisis dimensional, para distinguirlo expresamente de su concepción clásica. En general, el análisis dimensional discriminado proporciona soluciones más precisas que el clásico y, en todo caso, más formales, y constituye un paso previo a la aplicación de técnicas analíticas. El menor esfuerzo que requiere, frente a las frecuentemente engorrosas deducciones matemáticas, compensa la aplicación del método al menos en una primera, y a veces muy útil, aproximación a la solución del problema.

¿Qué se aporta, pues, en el presente texto? La concepción de discriminación en el pasado reciente, fundamentalmente debida a Palacios [1964], se ha justificado en aspectos relacionados con la medición y sus unidades y, en consecuencia, su uso se ha ceñido a las direcciones del espacio. Bajo esta orientación, Palacios aplica esta teoría a numerosos problemas en todas las ramas de la ciencia. La concepción que damos en este texto transciende de los temas de medida y unidades, y es más ambiciosa en tanto que con ella, mediante una profundización en el análisis de los fenómenos físicos que tienen lugar en el problema (carácter vectorial de las magnitudes, acoplamiento o no entre los diferentes procesos físicos, fenómenos transitorios y estacionarios, existencia de magnitudes ocultas…), se orienta de forma adecuada la selección de la lista (o listas) de variables relevantes para cada fenómeno, la elección de bases dimensionales y hasta (directamente, en ocasiones) las expresiones de balance que constituyen, en definitiva, los monomios buscados.

En suma, los objetivos del texto pueden sintetizarse en:

- Profundizar en el concepto de discriminación, y extenderlo a magnitudes que hasta este momento no aparecen en los textos.
- Investigar la existencia y el significado de ciertas magnitudes ocultas, así como su orden de magnitud. Estas son magnitudes características del problema con un claro significado físico. Su agrupación con otras magnitudes de la lista relevante permite formar monomios adimensionales discriminados que constituyen la expresión de los balances (de fuerzas, energías…) existentes en el problema.
- Abordar el conocido proceso de adimensionalización de las ecuaciones bajo el enfoque de la discriminación.
- Profundizar en el significado de los nuevos números adimensionales obtenidos mediante la discriminación.
- Aplicar los objetivos anteriores al estudio de ciertos problemas fundamentales en los campos de mecánica de fluidos y transferencia de calor, áreas en las que la disciplina de análisis dimensional se ha demostrado muy fructífera a lo largo de décadas.
- Demostrar que los procesos de aplicación del análisis dimensional discriminado, en su versión del teorema de π, y de adimensionalización discriminada de ecuaciones, son dos variantes de aplicación de la teoría del análisis dimensional que, usando diferentes protocolos de aplicación, conducen invariablemente al mismo conjunto de monomios.

Como consecuencia del penúltimo objetivo, al que se dedica la parte fundamental del texto, se ha revisado desde la nueva perspectiva del análisis dimensional discriminado el papel de los números adimensionales clásicos que aparecen en las disciplinas de mecánica de fluidos y transmisión de calor (Reynolds, Nusslet, Coeficiente de fricción, Rayleygh, Boussinesq, Grashof…), muchos de los cuales pierden su carácter adimensional y han de ser agrupados con otras variables, generalmente geométricas, formando nuevos números (monomios) que conservan su carácter adimensional bajo la perspectiva de la discriminación y que desempeñan un papel realmente independiente en la solución del problema.

El texto, que contiene numerosos ejemplos para su mejor compresión, está especialmente orientado para ser impartido en un curso de doctorado de tres o cuatro créditos, aunque también puede ser útil como disciplina complementaria en la formación de titulados superiores de ciencias aplicadas e ingeniería o de doctores que trabajan en estos campos.

En el capítulo 1, tras una revisión exhaustiva de cómo se trata el análisis dimensional clásico en numerosos libros de texto, tanto específicos de análisis dimensional como especializados en los temas de mecánica de fluidos y transmisión de calor, se justifica sin necesidad de hipótesis especiales la necesidad de discriminar. Los diferentes tipos de bases dimensionales y de ecuaciones de dimensión de muchas de las magnitudes usadas en mecánica de fluidos y transmisión de calor, para las geometrías más comunes, se presentan en el capítulo 2. Los capítulos 3 y 4 son los más extensos y recogen los resultados de aplicar la discriminación a ciertos problemas fundamentales seleccionados de mecánica de fluidos y transmisión de calor, respectivamente. El capítulo 5 resume el significado físico de los "nuevos" números adimensionales que proporciona la discriminación. La aplicación directa de la discriminación al proceso de adimensionalización de ecuaciones diferenciales se recoge en el capítulo 6. Por último, capítulo 7, se compara el análisis de escala con el análisis dimensional discriminado para estudiar las similitudes y diferencias entre ambas técnicas. Una detallada lista de referencias bibliográficas se incluye al final del texto.

Notas para su lectura

En relación con la **nomenclatura** utilizada, las letras mayúsculas en cursivas utilizan para designar las magnitudes de la base dimensional. Las llaves {} denotan la base dimensional y las magnitudes que contiene son las elegidas para la base propuesta. Los corchetes [] denotan la ecuación de dimensiones de la magnitud que encierran. En general se eligen letras minúsculas cursivas para las características físicas del medio y letras minúsculas no cursivas para las magnitudes físicas y las constantes. Las variables de posición se escriben, indistintamente en letras cursivas y no cursivas. En cuanto a los subíndices, su significado responde a lo mencionado en la sección "nomenclatura". Sin embargo, en los ejemplos a lo largo del texto, se les han atribuido significados especiales que se explican puntualmente en los mismos.

Acerca de los **conocimientos previos**, el alumno o lector debe conocer la técnica de aplicación del análisis dimensional: deducción de la base dimensional, determinación de las ecuaciones de dimensión y aplicación del teorema de π. El conocido texto Buckingham [1914], o mejor el más moderno de Palacios [1964], pueden considerarse textos adecuados de introducción para aquellos que quieran repasar estos temas. El capítulo 2 constituye, asimismo, una introducción básica a los conceptos relacionados con el análisis dimensional clásico.

En cuanto al **orden de la lectura**, el capítulo 1 da acceso directo a cualquiera de los capítulos 3 o 4. El capítulo 5 debe estudiarse tras la lectura de los dos anteriores. Para una completa comprensión de los capítulos 6 y 7 (el último puede considerarse una extensión del anterior) conviene leer previamente los anteriores 3 y 4.

Nomenclatura

AE	Análisis de escala
ADC	Análisis dimensional clásico
ADD	Análisis dimensional discriminado
c_e	calor específico (J/kg K)
c_e'	calor específico volumétrico (J/m^{3}K), $c_e' = \rho c_e$
Fo	número de Fourier, $\mathrm{Fo} = \alpha\, t\, l_o^{-2}$
h	entalpía específica (J/kg)
	coeficiente de transferencia de calor (Wm^{-2})
k	conductividad térmica (Wm^{-1}K^{-1})
l	longitud (m)
Nu	número de Nusselt, Nu = h l/k
p	presión (N/m^2)
Pr	número de Prandtl, Pr = ν/α
Re	número de Reynolds, Re= (vl)/υ
s	entropía específica (J/kg K)
t	tiempo (s)
u	energía interna específica (J/kg)
v	velocidad (m/s)
W	energía mecánica (J)
x, y, z	coordenadas espaciales (m)
α	difusividad térmica (m^2/s)
δ	espesor de capa límite (m)
δ_{ik}	delta de Kronecker
μ	viscosidad dinámica (kg/m s)
θ	temperatura (K)
ρ	densidad (kg/m^3)

υ	viscosidad cinemática (m^2/s)
σ'	componente del tensor de esfuerzos asociado a las fuerzas de presión (N/m^2)
σ	tensor de esfuerzos (N/m^2)
ξ	radio de curvatura (m)
$\propto$	proporcional
$\sim$	orden of magnitud
[ ]	para expresar la ecuación de dimensiones
{}	para expresar la base dimensional
$\langle\,\rangle$	para expresar la lista relevante de variables

Letras mayúsculas cursivas (para las magnitudes de la base dimensional):

L	longitud
M	masa
T	tiempo
Q	energía transportada en forma de calor
θ	temperatura

Subíndices:

x, y, z	direcciones espaciales
ADC	referido al análisis dimensional clásico
ADD	referido al análisis dimensional discriminado
$\parallel$	alusivo a una dirección paralela a la velocidad de las partículas de fluido o a los planos deslizantes del mismo
$\perp$	ídem a una dirección perpendicular a los planos deslizantes o a estos mismos planos

Superíndices:

*	asigna el carácter de valor característico

capítulo 1

La discriminación: una extensión fundamental y necesaria del análisis dimensional clásico

1.1 Introducción

Históricamente, el análisis dimensional conocido al que llamaremos "análisis dimensional clásico" (ADC, de aquí en adelante), se ha considerado como un primer paso que, con poco esfuerzo intelectual, permite abordar el estudio de numerosos problemas complejos de ciencias e ingeniería. Los mayores frutos de esta técnica se han logrado en los campos de mecánica de fluidos y transmisión de calor en su doble vertiente de búsqueda de grupos adimensionales, que permiten reducir el número de variables independientes que intervienen en la solución del problema, y de la aplicación de estos grupos para establecer la semejanza en el estudio de modelos (aspecto que no se expondrá en este texto). Podría decirse que se trata de una técnica de análisis que permite, en un tiempo mínimo, estimar una primera aproximación a la solución del problema sin necesidad de resolverlo en detalle e incluso, quizás, sin tener que formular las ecuaciones de gobierno. El análisis dimensional reduce al mínimo los grados de libertad de un problema, sugiriendo así las leyes de escala más económicas e inmediatas. Otra de las ideas principales que subyace en esta teoría, íntimamente relacionada con el teorema de π de Buckingham [1914], es que el resultado de un problema es independiente del sistema de unidades elegido para expresarlas.

Antiguos y recientes trabajos han tratado de obtener resultados a partir de esta técnica en otros campos de la ciencia tales como economía (gestión de inventarios e investigación de operaciones), de Jong [1967] y Vignaux [1986]; biología y medicina, Gunther [1975], McMahon y Bonner [1983], Stephens y Dunbar [1993], Tennekes [1997], Charnov y Skuladottir [2000], Hutchinson y García [2002] y Prothero [2002], psicología y ciencias del comportamiento, Lehman y Craig [1963] y Dodd [1963], y física moderna y astrofísica, Wilczek [1999] y Kurth [1972].

El interés sobre el análisis dimensional no ha decaído con el paso del tiempo, a pesar de que haya sido desplazado, en determinados textos de nivel, por técnicas más precisas analíticas, empíricas y semianalíticas. Más bien, al contrario, de forma continuada hasta estos últimos años, siguen publicándose y reeditándose libros sobre este tema; por ejemplo, Lin y Segel [1974], que estudian la relación del análisis dimensional con otros métodos de análisis, Taylor [1974], Sedov [1993], Jacoby [1991], González de Posada [1994], Barenblatt [1996], Sonin [2001], Herranz y Arenas [1989 y 2003] y Szirtes [2007]. Más aún, algunos autores como Hart [1994] y Kasprzak y col. [1990] tratan de construir una teoría matemática del análisis dimensional.

También son muchos los profesores que incluyen el análisis dimensional como un aspecto esencial de su docencia en ciencias e ingeniería, y que han desarrollado, para sus alumnos, resúmenes o programas sobre este tema que han colgado en la web, S. Brückner: J. F. Price y A. A. Sonin.

Sin embargo, a pesar de su uso extendido en el campo de la ingeniería, los resultados que proporciona el ADC son bastante limitados en problemas de cierto nivel. La causa fundamental de esta limitación estriba en que el ADC se ha estructurado históricamente como una teoría escalar; sin tener en cuenta, de manera explícita, que el carácter vectorial de la mayoría de los fenómenos físicos da lugar a direcciones espaciales preferentes en la mayoría de los problemas. Así, el ADC es una teoría que "no discrimina" ni el carácter vectorial inherente a la mayor parte de las magnitudes físicas, ni el carácter tensorial de gran parte de las características físicas de los medios materiales.

Durante décadas la aplicación del ADC, en los textos más extendidos al alcance de los estudiantes, ha asumido esta hipótesis "escalar" y solo cuando los resultados experimentales correspondientes a un problema específico han demostrado que los números adimensionales que proporcionaba no eran adecuados como grupos de variables que juegan un papel independiente en el problema, se adoptaban combinaciones de dichos números con otras magnitudes (del problema) para formar nuevos grupos adimensionales (monomios π) con los que expresar la solución de forma correcta. En este sentido, por ejemplo, es frecuente encontrar el número de Reynolds (Re) en numerosas representaciones gráficas en mecánica de fluidos multiplicado por un cociente de longitudes características del problema. Lo mismo ocurre con el número de Nusselt (Nu) en el campo de la transferencia de calor. Sin embargo, la intervención de este tipo de agrupaciones no se justifica adecuadamente desde la perspectiva del análisis dimensional clásico.

Comentarios de índole similar cabe indicar en relación con el significado físico de los números adimensionales, tema que en muchos textos se trata sin el rigor adecuado. Es frecuente asignar a estos números el significado físico de un balance de fuerzas o energías sin la debida justificación, pues no se indica la región o el dominio físico del proceso donde se aplican dichos balances. Se trata de un aspecto sobre el que algunos autores, como Arpaci y Larsen [1984] y Bejan [1995], manifiestan su discrepancia con las interpretaciones clásicas de ciertos números, tales como Re, Nu, etc.

Con todo, el concepto de discriminación, que arroja luz definitiva sobre estos controvertidos aspectos del ADC, no es ni mucho menos nuevo. Fue introducido de manera formal a mediados del siglo pasado por Palacios [1955, 1964], pero su difusión a nivel internacional y de manera sorprendente fue escasa y quedó circunscrita, prácticamente, a profesores y colegas de su entorno, quienes han aplicado este concepto a nuevos problemas, Herranz y Arenas [1989, 2003]. El texto de Palacios, cuya edición en castellano [1955] es ligeramente diferente a la edición en lengua inglesa [1964], contiene numerosos problemas en todas las disciplinas científicas (mecánica, termodinámica, electricidad y magnetismo, física cuántica…). Muchos de ellos (solo en los campos de mecánica de fluidos y termodinámica) han sido estudiados de nuevo por sus colegas Herranz y Arenas, quienes los han completado en algunos aspectos usando la discriminación en diferentes sistemas de coordenadas, siempre bajo la misma óptica en relación con el concepto de discriminación. Para estos autores y para Palacios, la discriminación está asociada al concepto de "medida" y se aplica solo a las variables espaciales. Fuera de este ámbito se pueden encontrar algunas contribuciones de tipo individual, tanto antiguas, Chida y Katto [1976], como recientes, Martynenko y Khramtsov [2005].

En los textos de Herranz y Arenas [1989] se aplica el análisis dimensional discriminado (ADD) a problemas de mecánica de fluidos y de transmisión de calor poniendo de manifiesto insistentemente los aspectos que atribuyen al ADD características novedosas de mayor potencialidad en relación con el ADC. En general, la aplicación de ADD por estos autores conduce a un menor número de monomios independientes en la solución de los problemas. Además, en algunos casos se asigna un significado físico a determinados números adimensionales como balance entre energía mecánica y energía calorífica. Sin embargo, no siempre se justifica en estos textos que el uso de la discriminación conduzca invariablemente a una mejor solución del problema, aspecto de interés esencial para nosotros.

Como se verá más adelante existen problemas en los que, gracias a la simetría de revolución, el uso del ADC conduce a la misma solución que el ADD, merced a una simplificación asociada a la existencia de proporcionalidad numérica entre variables del problema, lo que origina que una de ellas se suprima de la lista de variables relevantes en el ADC (se trata de variables del mismo orden de magnitud que darían lugar a factores, de forma que desaparecen al eliminar una de las variables). A nuestro modo de ver, una de las claves para aplicar correctamente el análisis dimensional es "justificar" formalmente, mediante razonamientos puramente físicos, la inclusión de todas y cada una de las magnitudes en la lista de variables relevantes del problema.

Un ejemplo. En el movimiento de una esfera en el seno de un fluido con formación de capa límite se han de considerar las variables radio de la esfera, R, y extensión de la capa límite (arco de esfera), *s*, por separado (véase su justificación en el Capítulo 3). El ADC proporciona inmediatamente un factor de forma, *s*/R, factor que en muchos textos no aparece, pues se ha eliminado injustificadamente el arco de la lista de variables relevantes del problema.

En este primer capítulo incluimos una sucinta pero completa revisión histórica del análisis dimensional y presentamos la solución de algunos problemas tipo que ponen de manifiesto las deficiencias del método en cuanto a los resultados que aporta (gran número de monomios adimensionales o factores de forma) cuando el número de variables involucradas es grande, bien a causa de los diferentes tipos de procesos que tienen lugar, bien a causa de la compleja geometría del problema. Posteriormente, se introduce el concepto de discriminación en su concepción más general, que transciende de su relación con la medida como afirman Palacios [1955, 1964] y Herranz y Arenas [1989, 2003]), indicando de manera pormenorizada las ventajas que presenta frente al ADC en todo tipo de problemas de cierta complejidad. Se finaliza el capítulo con una exposición del tratamiento que dan al tema de análisis dimensional los textos más conocidos de mecánica de fluidos, de transmisión de calor y de fenómenos de transporte.

Para finalizar se introduce al alumno o lector en el método de la adimensionalización de ecuaciones utilizando la discriminación, una técnica aparentemente ajena al análisis dimensional pero que sin embargo, invariablemente, conduce a los mismos grupos adimensionales que el ADD. La relación entre ambas técnicas permite determinar el orden de magnitud de las variables incógnitas, un tema sobre el que el ADC proporciona una información claramente ambigua.

Como se pondrá de manifiesto a lo largo del texto, la idea de discriminación, que subyace en todos los fenómenos físicos, permite interrelacionar, y hasta cierto punto equiparar, técnicas tan aparentemente distintas como el análisis dimensional y los procesos de adimensionalización de las ecuaciones. Con la discriminación, los grupos formados por el AAD son los mismos que los derivados de la adimensionalización (discriminada) y estos, a su vez, constituyen siempre un balance entre magnitudes del problema (fuerzas o energías, según la ecuación de que se trate). La única diferencia reside en que para adimensionalizar se requiere conocer el modelo matemático y para aplicar el AD se requiere conocer la lista de variables relevante del problema. Sin embargo, conocer esta lista con exactitud implica conocer los fenómenos que tienen lugar en el problema lo que, a su vez, ciertamente, permitiría escribir las ecuaciones del modelo, y viceversa. Esta relación no es posible establecerla sin la idea de discriminación.

1.2 Aplicación del análisis dimensional. Lista de variables relevantes

Remitimos a un texto básico de análisis dimensional para que el alumno o lector no familiarizado con esta técnica, en su vertiente de búsqueda de números adimensionales a partir de la lista relevante de variables, adquiera las nociones fundamentales inherentes a esta teoría: magnitudes primarias y secundarias, fundamentales y derivadas, bases dimensionales, ecuaciones dimensionales y teorema de π. Uno adecuado podría ser el *Análisis Dimensional* de Palacios [1964].

El proceso clásico de aplicación del análisis dimensional no requiere conocer de antemano las ecuaciones de gobierno del problema, si bien es indispensable un profundo conocimiento de las leyes básicas y de los propios fenómenos que tienen lugar en el mismo, aspectos que permiten deducir el conjunto de parámetros (datos relevantes del problema referidos a la geometría y las condiciones de contorno e iniciales) y propiedades físicas relevantes, así como sus ecuaciones dimensionales. Todos los autores clásicos y modernos inciden, obviamente, en que los resultados del análisis dimensional dependen de la lista adoptada de variables relevantes: Palacios [1964], Smits [2000], Szirtes [2007], etc. No se trata de un tema baladí, como veremos más adelante. Para establecer correctamente esta lista es necesario conocer los fenómenos físicos que acontecen. Potter y Wiggert [1997], por ejemplo, dicen textualmente: "[…] no está claro, sin embargo, qué parámetros deberían ser incluidos en la lista relevante de variables. La selección de estos parámetros requiere una detallada comprensión de los fenómenos físicos envueltos. […] debería considerarse que la selección de los parámetros apropiados es el paso primero y crucial para la aplicación del análisis dimensional".

Por un lado, la inclusión de cada una de las variables características ha de estar justificada, debidamente, por la influencia que sus valores concretos ejercen en la solución o patrón de soluciones del problema; la discriminación permite incluir la misma magnitud más de una vez si los fenómenos a los que está asociada tienen lugar en diferentes direcciones espaciales. Por otro lado, la inclusión de las propiedades físicas, generalmente de carácter tensorial o vectorial, está justificada por las leyes que intervienen en el fenómeno y que contienen y definen estas propiedades. El carácter vectorial o tensorial de ciertas constantes cuando se aplica la discriminación (como se verá más adelante) obliga a introducirlas más de una vez, asociándolas a cada dirección del espacio, pues tienen ecuaciones dimensionales diferentes. Por otro lado, la geometría del cuerpo debe quedar completamente definida en relación con su influencia en el proceso. Es frecuente especificar, por ejemplo, la geometría de una esfera mediante su radio, lo que la hace indistinguible geométricamente de otro cuerpo como el cubo; así, con discriminación es preciso añadir nuevas variables geométricas que especifiquen completamente el cuerpo, lo que permite obtener la mejor solución posible. Una vez bien establecida es la llamada lista relevante de variables, la aplicación del teorema de π conduce a la obtención de los grupos adimensionales que son argumentos de las funciones de las que dependen las magnitudes incógnita buscadas.

En ocasiones ocurre que la aplicación del teorema de π expulsa alguna de las variables de la lista relevante. Sin duda se trata de una casualidad, digamos "dimensional" y que la expulsión de dicha variable ha sido fortuita. Lo normal es que la introducción de variables inadecuadas conduzca a resultados falsos. En todos los problemas estudiados en los capítulos 3 y 4 se comprueba que una precisa selección de variables conduce siempre a resultados correctos.

La obtención del orden de magnitud de las magnitudes ocultas se logra por la introducción de estas en la lista de variables relevantes del fenómeno considerado (que no ha de coincidir necesariamente con la lista completa de variables relevantes del problema cuando concurren simultáneamente varios fenómenos físicos) aplicando el teorema de π. Su significado, muchas veces deducido a posteriori, se extrae del propio monomio formado. Adviértase que la propia selección de la lista de variables (deducida generalmente bajo la asunción de ciertas hipótesis) induce a la existencia de estas magnitudes ocultas sin necesidad de considerar dichas hipótesis. Dicho de otro modo, solo existirán magnitudes ocultas si se han asumido ciertas hipótesis que conducen invariablemente a una determinada lista de variables relevantes. O también, si una determinada lista de variables relevantes conduce a la obtención de determinadas magnitudes ocultas, podemos asegurar la existencia de ciertas hipótesis en el problema.

Así pues, la búsqueda de variables ocultas se convierte quizás en el primer paso para obtener soluciones mediante el análisis dimensional ya que, por una parte, supone un primer conocimiento del orden de magnitud de ciertas magnitudes características no explícitas en el enunciado del problema y, por otra, puede ayudar a definir magnitudes de referencia que intervengan en la adimensionalización de otras magnitudes o a interpretar correctamente los balances del problema.

Para la búsqueda de cualquier otro tipo de variables se procede de igual modo. Si, en particular, esta depende de las coordenadas independientes (posición y tiempo), deben introducirse estas últimas, obviamente, en la lista de variables relevantes.

Según la elección de una base adecuada se seguirán las reglas indicadas en Palacios [1964] y se tendrá en cuenta la discriminación.

En síntesis, la correcta aplicación del análisis dimensional que permita alcanzar los resultados más precisos se puede concretar en las siguientes etapas:

Primera **Encuadrar el problema en una teoría física** y adoptar una base dimensional deducida de sus leyes fundamentales. La base ha de ser completa y sus magnitudes dimensionalmente independientes.

Segunda **Seleccionar la lista de variables relevantes**, incluidas las geométricas, a partir de las leyes físicas (fundamentales y constitutivas) envueltas en el proceso, para lo que se requiere un considerable juicio físico y cierta experiencia. Incluir también las constantes universales y características necesarias. La lista debe ser completa y estricta (ni una más ni una menos de las necesarias), pero sin restricciones en cuanto a la elección de magnitudes, tales como ángulos o superficies. La geometría de los cuerpos que intervienen, así como los dominios de problema, han de especificarse adecuada y completamente según su influencia en problema.

Tercera **Discriminar las variables** y deducir las fórmulas dimensionales de estas en la base elegida.

Cuarta **Aplicar el teorema de π** para obtener el número y la forma de los monomios adimensionales independientes que puede formarse con las variables de la lista.

Quinta **Expresar la solución del problema** en función de los monomios deducidos.

Es frecuente buscar magnitudes incógnitas cuyo valor depende de dos o más fenómenos físicos independientes. Por ejemplo, la tensión del hilo de un péndulo simple en movimiento, cuando pasa por el punto más bajo depende (separadamente) del peso colgante y de la velocidad (o del desplazamiento angular máximo), por lo que estas dos influencias deben determinarse por separado, y después sumarse para dar la tensión del hilo. Lo mismo ocurre con la fuerza de arrastre sobre una esfera que se mueve a una velocidad constante en el seno de un fluido en reposo; dicha fuerza es la suma de la debida a efectos viscosos y la debida a efectos de inercia y, al igual que antes, cada componente ha de calcularse por separado y después determinar la fuerza total como suma de estas componentes. Este aspecto podría considerarse como una etapa más a la hora de aplicar correctamente el análisis dimensional.

1.3 Revisión crítica del concepto y las aplicaciones del análisis dimensional clásico. Significado de los números adimensionales clásicos

Aunque ya en el Renacimiento y la Edad Media, incluso en la Antigua Grecia, se usaban algunos de los conceptos precursores de lo que hoy se conoce como análisis dimensional, tales como el significado de las magnitudes, la medida, las operaciones entre números representativos de diversas magnitudes, magnitudes primarias y derivadas, etc., no es hasta los siglos XVIII, con la discusión de Euler (Macagno [1971]) acerca de la homogeneidad dimensional, y XIX, con el establecimiento de los fundamentos del análisis dimensional por Fourier [1822] en su *Teoría analítica del calor*, cuando se asientan los fundamentos de esta técnica. Posteriormente, cabe citar a un gran número de autores que han desarrollado otros aspectos puntuales de esta teoría, tales como Vaschy [1892], Riabouchinsky [1911] y Buckingham [1914, 1921], así como otros que han contribuido y tratado de construir una teoría global de análisis dimensional, tales como Rayleigh [1915], Bridgman [1922,1937], Langhaar [1951], Le Corbeiller [1966], Palacios [1964] y Drobot [1954]. Una interesante revisión histórico crítica hasta 1971, que incluye referencias al tema desde la propia Grecia, se recoge en el trabajo de Macagno citado anteriormente.

Son numerosos los libros de texto, clásicos y modernos, de ciencias e ingeniería que, en mayor o menor grado, enseñan y aplican el ADC en las disciplinas de mecánica de fluidos y de transmisión de calor. Entre estos mencionaremos los de Gröber y Erk [1967], Arpaci y Larsen [1984], Lienhard [1987], Kay y Nedderman [1990], Kreith y Bohm [1997], Baehr y Stephan [1998], Mills [1999], Kessler y Grenkorn [1999] y Martynenko y Khramtsov [2005]. Aunque las soluciones que proporciona el análisis dimensional clásico siempre son correctas, los resultados obtenidos en problemas de cierta complejidad son ciertamente pobres debido al gran número de monomios adimensionales y de factores de forma a los que conduce su aplicación. Quizás sea esa la razón por la que otros textos modernos no hacen referencia alguna al AD, aunque trabajen con muchos de los números adimensionales clásicos conocidos; por ejemplo, los textos de Ghebart y col. [1988], Kays y Crawford [1993], Özisik [1993], Incropera y DeWitt [1996], Holman [1997] y Rohsenow y col. [1998].

Cabe aplicar estos comentarios, asimismo, a la literatura científica que, en general, da por buenos los resultados que el ADC ha proporcionado desde antiguo y que trabaja con sus números adimensionales u otros derivados de su combinación con otras variables del problema que la experiencia ha demostrado más idóneos. En los textos anteriores pueden encontrarse numerosas referencias a la literatura científica que hacen uso explícito de los resultados del ADC. Entre los trabajos que utilizan el análisis dimensional como técnica para obtener soluciones de problemas citaremos a:

- Remillard [1983] que emplea la teoría de matrices para mejorar la aplicación del teorema de π, aplicando estos procedimientos a problemas de aerodinámica y fluidos.
- Price [2002], que lo aplica a la teoría de modelos.
- Bohren [2003], que muestra con ejemplos ilustrativos la aplicación de esta técnica a la determinación de errores asociados a la simplificación de fórmulas físicas.
- Rajesh y Bijwe [2004], que aplican el análisis dimensional a problemas mecánicos de fricción.
- Pelesko, Cesky y Huertas [2004], que resuelven problemas de electromagnetismo.
- Hilfer y Helming [2004], que estudian problemas de flujo en medios porosos.
- Sonin y Huber [1978], Chun y Sonin [1985], Anderson y col. [1978] y Chiang [2004] que aplican el análisis dimensional a problemas de transferencia de calor.

- Song y Han [2005], Lokarnik [1991] y Hristov [2004-2007] que lo aplican a problemas en reactores y a otras cuestiones de ingeniería química.

Todos estos autores aplican el análisis dimensional en su concepción clásica (no discriminada).

Es importante mencionar también los trabajos de Adiutori [1982], un investigador que, explícitamente, rechaza la idea fundamental que subyace en el ADC: "la homogeneidad dimensional de los términos de las ecuaciones físicas". Las ideas de Adiutori acerca de esta teoría "no homogénea" despertaron gran interés en su momento y fueron publicadas en las cubiertas de varias ediciones de la revista *Journal Heat Transfer* [1989]. Para Adiutori, las leyes de enfriamiento de Newton, $j'' = h(\Delta\theta)$, y de conducción de calor de Fourier, $j'' = k(d\theta/dx)$, introdujeron artificialmente los coeficientes de transferencia de calor, h, y de conductividad térmica, k, respectivamente; coeficientes que no eran necesarios en su singular teoría.

A pesar del nivel avanzado de los textos mencionados, la aplicación del AD a la transmisión del calor se realiza según los casos partiendo de bases dimensionales de diferente multiplicidad. Por ejemplo, en transferencia de calor por convección se usa una base compuesta por 4 o 5 magnitudes, $\{L,M,T,\theta\}$ y $\{L,M,T,Q,\theta\}$, sin justificar formalmente cuándo se adopta una u otra. Así, McAdams [1954] usa la base $\{L,M,T,\theta\}$, mientras que Chapman [1960] y Gröber y Erk [1967] usan la base $\{L,M,T,Q,\theta\}$. Esta controversia también existe entre los primeros especialistas; así Bridgman [1922] usa la base de McAdams, mientras que Huntley [1952] usa la de Chapman y Gröber y Erk.

El ADC, tal como se ha recogido en los textos anteriores, no distingue ni el carácter vectorial de muchas magnitudes físicas (velocidad, aceleración, fuerza…), ni el carácter tensorial de muchas propiedades físicas de la materia (conductividad térmica, viscosidad, difusividad…). Una consecuencia directa de esta falta de discriminación es el gran número de monomios adimensionales que forman parte de la solución de muchos problemas de dificultad media y grande. Otra consecuencia es que, al no existir asociación entre las fuerzas o energías que intervienen en el problema con las direcciones espaciales en las que estas se manifiestan, es casi imposible relacionar los números adimensionales con balances de fuerzas o energías en los mismos dominios físicos. Es decir, estos balances suelen establecerse entre dominios diferentes del medio, lo que no tiene sentido desde el punto de vista físico. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.1

La sección del conjunto aleta-recta-pared de la Figura 1.1, de un material anisótropo, está en contacto a un foco caliente en su cara AB y a un foco frío en sus caras CD, DE y EF; transmitiéndose calor por convección en dichas superficies. Las caras BC y AF, superficies de simetría del conjunto, son adiabáticas. Deduzca

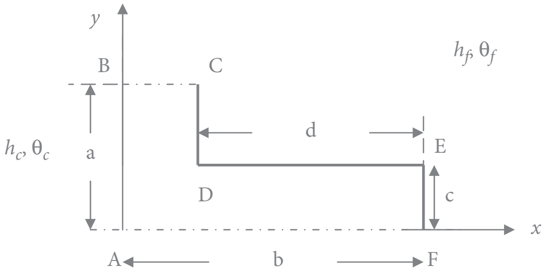


Figura 1.1 Conjunto aleta-recta-pared

los parámetros adimensionales independientes que caracterizan el proceso térmico en estado estacionario.

Solución

Partimos del siguiente conjunto relevante de variables independientes:

Magnitudes geométricas: a, b, c, d

Magnitudes térmicas: h_c, h_{fx}, h_{fy} (coeficientes de transferencia de calor de los focos caliente y frío), k_x, k_y (conductividades térmicas en las direcciones x e y)

ΔT_{fc} (diferencia de temperatura foco frío-foco caliente)

Con el fin de generalizar el proceso se consideran dos coeficientes de transmisión del calor distintos asociados al foco frío: uno relativo a las superficies verticales (CD y EF) y otro a la superficie horizontal (DE). El conjunto relevante de variables es, pues, $\langle a,b,c,d,h_c,h_{fx},h_{fy},k_x,k_y,\Delta T_{fc}\rangle$. No se han incluido magnitudes como el calor específico, la densidad y la temperatura inicial, pues no juegan papel alguno en la solución del campo térmico estacionario. En la base dimensional $\{L,T,Q,\theta\}$ estas magnitudes tienen los exponentes dimensionales mostrados en la Tabla 1.1

Entre los posibles grupos de monomios adimensionales independientes que proporciona la aplicación del teorema de π seleccionamos el siguiente (que incluye tres factores de forma):

$$\pi_1 = \frac{b}{a}, \quad \pi_2 = \frac{c}{a}, \quad \pi_3 = \frac{d}{a}, \quad \pi_4 = \frac{h_{fx}}{h_c}, \quad \pi_5 = \frac{h_{fy}}{h_c}, \quad \pi_6 = \frac{k_x}{k_y}, \quad \pi_7 = \frac{h_c\,a}{k_x}$$

Tabla 1.1 Exponentes dimensionales de las variables

	a	b	c	d	h_c	h_{fx}	h_{fy}	k_x	k_y	ΔT_{fc}
L	1	1	1	1	−2	−2	−2	−1	−1	
T					−1	−1	−1	−1	−1	
Q					1	1	1	1	1	
θ					−1	−1	−1	−1	−1	1

Así, desde el punto de vista del ADC, estos son los monomios adimensionales independientes que intervendrán como argumentos en la solución del problema. Cualquier magnitud incógnita (adimensional) como la distribución de temperatura estacionaria o el calor disipado depende de estos parámetros. En efecto, para determinar el campo térmico estacionario, $T = T(x,y)$, hemos de incluir en la lista anterior la variable incógnita y las coordenadas espaciales (x,y). Los exponentes dimensionales de las variables de la nueva lista, $\langle a,b,c,d,x,y,h_c,h_{fx},h_{fy},k,\Delta T_{fc},T\rangle$, se recogen en la Tabla 1.2.

Tabla 1.2 Exponentes dimensionales de las variables

	a	b	c	d	x	y	h_c	h_{fx}	h_{fy}	k_x	k_y	ΔT_{fc}	T
L	1	1	1	1	1	1	−2	−2	−2	−1	−1		
T							−1	−1	−1	−1	−1		
Q							1	1	1	1	1		
θ							−1	−1	−1	−1	−1	1	1

La inclusión de las nuevas magnitudes proporciona tres nuevos monomios,

$$\pi_8 = \frac{x}{a}, \qquad \pi_9 = \frac{y}{a}, \qquad \pi_{10} = \frac{T}{\Delta T_{fc}}$$

y la solución del problema es

$$\frac{T}{\Delta T_{fc}} = f\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}, \frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{h_{fx}}{h_c}, \frac{h_{fy}}{h_c}, \frac{k_x}{k_y}, \frac{h_c\, a}{k_x}\right)$$

donde f es una función indeterminada de los argumentos indicados. Es evidente que la contribución del ADC a este problema (ciertamente elegido a propósito) es prácticamente nula y no sirve de mucho al investigador. Por ejemplo, el monomio $\pi_7 = h_c a/k_x$, cuya forma se identifica con la de un número de Biot, Bi, podría haberse presentado de modo diferente, combinando cualquiera de las longitudes con un coeficiente de convección y la conductividad térmica, con independencia de que la combinación elegida tenga o no significado físico.

Ejemplo 1.2

El estudio de la aleta simple, recta rectangular anisótropa, mostrada en la Figura 1.2, es una variante más simplificada del problema anterior. Las condiciones de contorno son isoterma en la base de la aleta (sección AB) y de convección en su superficie lateral (BC) y en su extremo (CD). La sección AD (adiabática) es de simetría. Estudie las aportaciones del ADC a la solución de campo térmico estacionario de esta aleta.

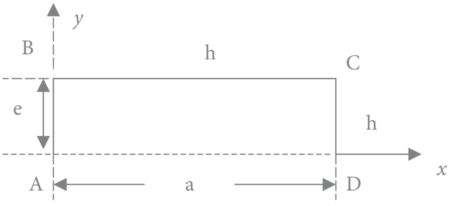


Figura 1.2 Aleta recta rectangular

Solución

Partimos del siguiente conjunto relevante de variables:

Magnitudes geométricas: a, e

Magnitudes térmicas: h_x, h_y, k_x, k_y, ΔT_o (diferencia de temperatura entre la temperatura de la base T_o y la temperatura del fluido lejos de la superficie de convección T_f)

La tabla formada por los exponentes dimensionales, en la base $\{L,T,Q,\theta\}$, es:

Tabla 1.3 Exponentes dimensionales de las variables

	a	e	h_x	h_y	k_x	k_y	ΔT_o
L	1	1	−2	−2	−1	−1	
T			−1	−1	−1	−1	
Q			1	1	1	1	
θ			−1	−1	−1	−1	1

y da lugar (por aplicación del teorema de π) a cuatro monomios adimensionales independientes,

$$\pi_1 = \frac{e}{a}, \quad \pi_2 = \frac{h_x}{h_y}, \quad \pi_3 = \frac{k_x}{k_y}, \quad \pi_4 = \frac{h_y\,a}{k_x} = \mathrm{Bi}$$

Siguiendo el ejemplo anterior, para determinar la distribución de temperaturas, $\theta(x,y)$, añadiremos al cuadro anterior la variable $\Delta\theta = \theta(x,y) - \theta_f$ y las coordenadas espaciales x e y, Tabla 1.4.

El conjunto independiente de monomios es ahora

$$\pi_1 = \frac{e}{a}, \quad \pi_2 = \frac{h_x}{h_y}, \quad \pi_3 = \frac{k_x}{k_y}, \quad \pi_4 = \frac{h_y\,a}{k_x} = \mathrm{Bi}, \quad \pi_5 = \frac{x}{a}, \quad \pi_6 = \frac{y}{a}, \quad \pi_7 = \frac{\Delta T}{\Delta T_o}$$

y proporciona la solución (algo más precisa que la del ejemplo anterior)

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_o} = f\left(\frac{e}{a}, \frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{h_x}{h_y}, \frac{k_x}{k_y}, \frac{h_y\, a}{k_x}\right)$$

Tabla 1.4 Exponentes dimensionales de las variables

	a	e	x	y	h_x	h_y	k_x	k_y	ΔT_o	ΔT
L	1	1	1	1	−2	−2	−1	−1		
T					−1	−1	−1	−1		
Q					1	1	1	1		
θ					−1	−1	−1	−1	1	1

Ejemplo 1.3

Estudiar la aleta recta 1-D del Ejemplo 2 en los casos: (i) aleta de longitud "muy" larga; (ii) aleta de longitud muy larga y de espesor despreciable.

Solución

(i) La consideración de aleta muy larga significa que la disipación de calor ocurre en una pequeña parte de la misma cercana a la base y, por tanto, h_x no interviene, ya que el extremo de la aleta se encuentra a la misma temperatura que el fluido. La longitud a, Figura 1.2, no cabe introducirla en la lista de variables y, por ser el problema 1-D, tampoco intervienen k_y. Por consiguiente, la lista relevante se reduce al conjunto $\langle e, x, h_y, k_x, \Delta T, \Delta T_o\rangle$. Con el cuadro de exponentes dimensionales de la Tabla 1.4, la solución es

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_o} = f\left(\frac{x}{e}, \frac{h_c\, a}{k}\right)$$

Si se desea encontrar una longitud característica, l^*, relacionada con la extensión de la aleta en donde existen gradientes de temperatura apreciables se obtendría la solución

$$l^* = f\left(\frac{x}{e}, \frac{h_c\, a}{k}\right)$$

(ii) Se elimina a, pero no puede eliminarse e aunque sea despreciable (pero no nula), ya que define la superficie de conducción del calor a lo largo de la aleta. La solución es la misma que en el caso anterior.

Puede apreciarse, como es obvio, que las soluciones del ADC son más precisas conforme aumenta el número de hipótesis simplificadoras del problema. En el Capítulo 2 se volverá a estudiar esta aleta bajo la perspectiva del ADD.

Ejemplo 1.4

Parámetros que caracterizan la transmisión de calor en una aguja larga de sección circular, Figura 1.3.

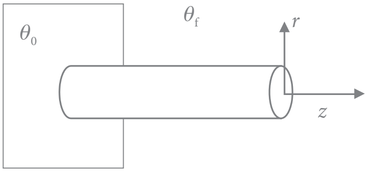


Figura 1.3 Aguja de sección circular

Con el término "larga" quiere indicarse que únicamente se produce transferencia de energía calorífica en una región limitada de la misma.

Solución

Desde el punto de vista geométrico, la aleta queda completamente definida por su diámetro, d, y por una longitud, l^*, que represente la extensión de aleta en dirección longitudinal en donde los gradientes de temperatura en esta dirección son apreciables. Desde el punto de vista térmico, hemos de considerar las siguientes variables: diferencia de temperaturas $\Delta T_o = T_o - T_f$, conductividad radial, k_r, conductividad axial, k_z, y coeficientes de transferencia de calor en la superficie lateral y en el extremo, h_{sl} y h_e respectivamente. Estos últimos se han de incluir con independencia de que su valor numérico sea el mismo, ya que tienen diferentes ecuaciones dimensionales. Así, las variables independientes del problema son $\langle d, l^*, h_{sl}, h_r, k_r, k_z, \Delta T_o \rangle$.

Los exponentes dimensionales de estas variables en la base $\{L, Q, T, \theta\}$ se muestran en la Tabla 1.5.

Tabla 1.5 Exponentes dimensionales de las variables

	d	l^*	h_e	h_{sl}	k_r	k_z	ΔT_o
L	1	1	−2	−2	−1	−1	
T			−1	−1	−1	−1	
Q			1	1	1	1	
θ			−1	−1	−1	−1	1

Se obtienen cuatro monomios:

$$\pi_1 = \frac{l^*}{d}, \qquad \pi_2 = \frac{k_z}{k_r}, \qquad \pi_3 = \frac{h_e}{h_{sl}}, \qquad \pi_4 = \frac{h_{sl}\, l^*}{k_z}$$

En el caso 1-D, el monomio $\pi_2 = k_z/k_r$ queda excluido. También, si el extremo de la aleta es adiabático, puede eliminarse el monomio $\pi_3 = h_e/h_{sl}$.