



INTRODUCCIÓN A LAS
**SEÑALES y
SISTEMAS**

JUAN PABLO TELLO PORTILLO

UN UNIVERSIDAD
DEL NORTE

Editorial

Introducción
a las señales y sistemas

Introducción a las señales y sistemas

Juan Pablo Tello Portillo

Área metropolitana
de Barranquilla (COLOMBIA), 2017

 **UNIVERSIDAD
DEL NORTE**
Editorial

Tello Portillo, Juan Pablo.

Introducción a las señales de sistemas / Juan Pablo Tello Portillo.

-- Barranquilla, Colombia : Editorial Universidad del Norte, 2017.

151 páginas : ilustraciones ; 24 cm.

Incluye referencias bibliográficas.

ISBN 978-958-741-803-3 (impreso)

ISBN 978-958-741-804-0 (PDF)

1. Teoría de las señales (Telecomunicaciones). 2. Series de Fourier.
3. Transformaciones de Laplace. I. Tít.

(CO-BrUNB 621.3822 T277 ed. 23)



Vigilada Mineducación

www.uninorte.edu.co

Km 5, vía a Puerto Colombia, A.A. 1569

Área metropolitana de Barranquilla (Colombia)

© Universidad del Norte, 2017

Juan Pablo Tello Portillo

Coordinación editorial

Zoila Sotomayor O.

Diagramación

Juan Pablo Tello Portillo

Diseño de portada

Joaquín Camargo Valle

Corrección de textos

Nury Ruiz Bárcenas

Impreso y hecho en Colombia

Xpress Estudio Gráfico y Digital (Bogotá)

Printed and made in Colombia

© Reservados todos los derechos. Queda prohibida la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio reprográfico, fónico o informático, así como su transmisión por cualquier medio mecánico o electrónico, fotocopias, microfilm, *offset*, mimeográfico u otros sin autorización previa y escrita de los titulares del *copyright*. La violación de dichos derechos constituye un delito contra la propiedad intelectual.

A Dios, a mis padres, mis hermanos
y a mi hija, María Alejandra.

JUAN PABLO TELLO PORTILLO

Ingeniero Electrónico y magíster en Ingeniería, área Automatización Industrial, de la Universidad Nacional de Colombia (sede Manizales). Profesor asistente, vinculado al Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica de la Universidad del Norte (Colombia), desde el año 2006. Director del grupo de investigación en Bioingeniería – BioUning en el periodo 2008-2014. Actualmente adelanta estudios de Doctorado en Ingeniería Eléctrica y Electrónica en la Universidad del Norte. Áreas de interés e investigación: Procesamiento digital de señales e imágenes médicas.

Contenido

Contenido	i
Prefacio	iv
1. Representación de señales	1
1.1. Introducción	1
1.2. Señales	1
1.2.1. Clasificación de señales	2
1.3. Funciones de singularidad	14
1.3.1. Función signo	14
1.3.2. Función impulso unitario	15
1.3.3. Función escalón unitario	16
1.3.4. Secuencia impulso unitario	18
1.3.5. Secuencia escalón unitario	18
1.4. Transformación de señales	20
1.4.1. Escalamiento en amplitud	20
1.4.2. Desplazamiento en el tiempo	21
1.4.3. Escalamiento en el tiempo	21
1.4.4. Desplazamiento en el tiempo discreto	24
1.4.5. Escalamiento en el tiempo discreto	24
1.5. Sistemas	27
1.5.1. Clasificación de los sistemas	27

2. Respuesta de sistemas lineales e invariantes en el tiempo	43
2.1. Introducción	43
2.2. Sistemas LIT continuos	43
2.3. Respuesta al impulso en el dominio continuo	45
2.3.1. Procedimiento para realizar el cálculo de convolución continua	46
2.4. Respuesta al impulso en el dominio discreto	59
2.4.1. Procedimiento para realizar el cálculo de la convolución discreta	60
2.5. Propiedades de la convolución	67
2.5.1. Identidad y desplazamiento	67
2.5.2. Conmutativa	68
2.5.3. Asociativa	68
3. Representación de señales en series de Fourier	73
3.1. Introducción	73
3.2. Representación de señales	73
3.3. Serie exponencial de Fourier	75
3.4. Serie trigonométrica de Fourier	80
3.5. Representación compacta de la serie de Fourier	82
3.6. Convergencia de la serie de Fourier	83
4. Transformada de Fourier	97
4.1. Introducción	97
4.2. Transformada de Fourier en tiempo continuo	97
4.3. Convergencia de la transformada de Fourier	101
4.4. Transformadas de Fourier de algunas funciones	102
4.4.1. Función impulso	102
4.4.2. Función rectangular	102
4.4.3. Exponencial complejo	103
4.4.4. Funciones sinusoidales	104

4.4.5.	Función exponencial decreciente	104
4.4.6.	Funciones periódicas	105
4.5.	Propiedades de la transformada de Fourier	105
4.5.1.	Linealidad	105
4.5.2.	Desplazamiento en el tiempo	106
4.5.3.	Desplazamiento en frecuencia	106
4.5.4.	Escala de coordenadas	106
4.5.5.	Dualidad	106
4.5.6.	Inversión en el tiempo	107
4.5.7.	Conjugación	107
4.5.8.	Diferenciación	109
4.5.9.	Integración	109
4.5.10.	Convolución	110
4.5.11.	Teorema de Parseval para señales de energía	110
4.5.12.	Densidad espectral de energía y de potencia	111
4.6.	Modulación y demodulación de señales	113
4.7.	Teorema de muestreo	119
4.8.	Respuesta en frecuencia	123
4.9.	Filtrado	123
4.9.1.	Filtro pasa bajas	124
4.9.2.	Filtro pasa altas	124
4.9.3.	Filtro pasa banda	124
4.9.4.	Filtro rechaza banda	124
5.	Transformada de Laplace	137
5.1.	Introducción	137
5.2.	Transformada de Laplace	137
5.2.1.	Región de convergencia para la transformada de Laplace	139
5.2.2.	Polos y ceros de la función	143

5.3. Transformadas de Laplace de algunas funciones	146
5.3.1. Función impulso	146
5.3.2. Función escalón unitario	146
5.4. Propiedades de la transformada de Laplace	147
5.4.1. Linealidad	147
5.4.2. Corrimiento en el tiempo	147
5.4.3. Corrimiento en el dominio transformado s	147
5.4.4. Escala en el tiempo	148
5.4.5. Inversión en el tiempo	148
5.4.6. Diferenciación en el dominio del tiempo	148
5.4.7. Diferenciación en el dominio transformado s	148
5.4.8. Integración en el dominio del tiempo	149
5.4.9. Convolución	149
5.4.10. Teoremas de los valores inicial y final	149
5.5. Transformada inversa de Laplace	150
5.6. Caracterización de los sistemas	151
5.6.1. Causalidad	152
5.6.2. Estabilidad	153
5.7. Representación en diagrama de bloques para sistemas LIT causales descritos por ecuaciones diferenciales.	154
Bibliografía	165

Prefacio

Este libro ha sido escrito con base en la recopilación y organización de información procedente de varias fuentes bibliográficas y de la experiencia misma adquirida en los cursos de señales y sistemas que se han venido impartiendo durante algunos años. En este se describen los conceptos teóricos básicos de las señales y los sistemas, con cierto nivel de profundidad matemática acorde a la fundamentación que los estudiantes han adquirido en los cursos de cálculo. El libro contiene diversos ejemplos en cada uno de los temas abordados, permitiendo al lector tener una herramienta de apoyo útil, ya que el contenido en muchos casos es de un nivel de complejidad alto y también, cuando este no es lo suficientemente claro en otros textos de la misma área.

El libro está diseñado para estudiantes de los programas de Ingeniería Eléctrica e Ingeniería Electrónica que cursan la materia Señales y Sistemas. Su contenido está dividido en cinco capítulos, con temas de un amplio componente matemático y fundamental para los cursos que se imparten en niveles superiores del programa, tales como: curso de Comunicaciones y curso de Control Automático.

En el Capítulo 1 se inicia con la definición de las señales y su respectiva clasificación. Así mismo, se presenta una variedad de ejemplos que ilustran todos los conceptos y además permite al estudiante interpretar de manera clara los temas abordados. Posteriormente, se realiza una descripción breve de las funciones singulares, útiles en la solución de problemas de ingeniería. Se continúa con la transformación de señales, haciendo alusión a las operaciones de escalamiento y desplazamiento. Más adelante, se definen los sistemas y de igual manera, su respectiva clasificación. Para cada uno de los temas se presentan algunos ejemplos que permiten al estudiante aclarar los conceptos estudiados. Todo esto para los dominios del tiempo continuo y tiempo discreto.

En el Capítulo 2 se estudian los sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo (LIT) y su interacción ante cualquier señal de entrada. Se describe la respuesta del sistema ante una entrada impulso unitario para luego, mediante la representación matemática de una función arbitraria, obtener la expresión que relaciona la entrada con la salida denominada integral de convolución. Así mismo, para el caso del dominio discreto, se parte de un modelo de representación de una secuencia discreta y se llega a otra operación que relaciona la entrada con la salida, denominada la suma de convolución. Cada uno de los temas presenta un sinnúmero de ejemplos que permiten comprender mejor los conceptos estudiados.

En el Capítulo 3 se presenta otra forma particular de representación de señales denominada, series de Fourier. La representación está basada en la combinación lineal de ondas sinusoidales que están relacionadas armónicamente. Se inicia con la descripción matemática de las diferentes formas de representación en Fourier, su convergencia y posteriormente se muestra algunos ejemplos con los que se ilustra de forma matemática y gráfica la utilidad de la misma.

En el Capítulo 4 se analiza la transformada de Fourier. Se inicia con un breve desarrollo matemático hasta llegar a su definición. Luego se realizan algunas transformadas de funciones que comúnmente son usadas en el análisis de las señales. Así mismo se presentan cada una de las propiedades de la transformada, muchas de ellas enfocadas a la aplicación práctica. Se hace énfasis en la propiedad de modulación y a la teoría que relaciona todo este tema. Más adelante se analiza el teorema de muestreo desde el punto de vista del dominio transformado. Finalmente, se estudia la respuesta en frecuencia de los sistemas y algunos conceptos básicos de la teoría de filtros. El capítulo incluye varios ejemplos que ilustran la importancia de la transformada de Fourier como herramienta matemática en la solución de problemas de ingeniería.

En el Capítulo 5 se presenta la teoría de la transformada de Laplace y sus aplicaciones. Se inicia con la definición y la descripción de su relación directa con la transformada de Fourier. Seguidamente, se desarrollan algunos ejemplos, donde se ilustra la existencia de una misma función del sistema (dominio s) correspondiente a dos funciones distintas en el dominio del tiempo. Así mismo se grafican las regiones de convergencia para cada uno de ellos y se estudia la importancia de estas en el análisis de la estabilidad de los sistemas. Se continúa con el análisis de los polos y ceros de la función del sistema junto con la ubicación de los mismos en el plano complejo s . Se listan brevemente las propiedades de la transformada de Laplace y su uso en ingeniería. Más adelante se examina la causalidad y la estabilidad, como factores importantes en la caracterización de los sistemas. Por último, se plantea la solución de ecuaciones diferenciales parciales lineales utilizando transformada de Laplace y se realizan las diferentes formas de representación en diagramas de bloques de cada una de las funciones del sistema para los ejemplos desarrollados.

Representación de señales

1.1. Introducción

Desde sus inicios, la sociedad humana ha usado diversas maneras o procedimientos para lograr comunicarse entre sí; y para esto ha hecho uso de elementos, materiales y/o herramientas, que generan fenómenos físicos los cuales son percibidos e interpretados por los sentidos en forma de mensajes. Este tipo de fenómenos es lo que comúnmente se denominan *señales*. Hoy en día, con sofisticados dispositivos electrónicos y algoritmos de codificación avanzados, se ha conseguido transformar las innumerables formas de onda obtenidas del mundo físico a formas de onda que contienen información y que son percibidas a través de los sentidos. El resultado de la evolución de estas formas de comunicación dio como origen el lenguaje.

En este capítulo se presenta de manera general las diferentes formas de señales y la manera como interactúan con los sistemas. Se comienza con ciertas definiciones, junto con las estructuras matemáticas y modelos gráficos de los mismos, así como algunos ejemplos que complementan los conceptos abordados. Posteriormente, se realiza una breve descripción de las funciones singulares, útiles para la simplificación matemática de fenómenos con los que comúnmente se encuentra en el estudio de las señales y los sistemas. Se continúa, con el proceso de transformación de señales tanto en el dominio del tiempo continuo como en el dominio del tiempo discreto, siendo las operaciones de escalamiento y desplazamiento las que comúnmente se dan en diferentes problemas de ingeniería, específicamente en el procesamiento de las señales. Por último se estudian los sistemas, su respectiva clasificación y algunos ejemplos que facilitan la comprensión de los temas estudiados.

1.2. Señales

Se define una señal como una función de una o más variables que representan una cantidad física; típicamente contiene información acerca del comportamiento natural de los fenómenos; por ejemplo, las señales eléctricas, acústicas, de video, biológicas,

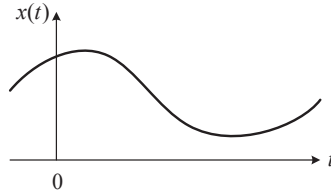


Figura 1.1: Representación gráfica de una señal

entre otras. Para el caso de una dimensión, la señal se representa mediante la forma $x(t)$, siendo t la variable independiente y x la variable dependiente. La representación gráfica de la misma se muestra en la Figura 1.1.

1.2.1. Clasificación de señales

Las señales se pueden clasificar de acuerdo a diferentes parámetros propios de las mismas; entre ellas están:

Aleatorias. Son aquellas en las que existe incertidumbre de sus valores en todos los instantes del tiempo y únicamente pueden ser caracterizadas estadísticamente [1]. Todas las señales por naturaleza son de carácter aleatorio; sin embargo, existen algunas que por su regularidad, se pueden tratar como determinísticas, teniendo en cuenta ciertas restricciones y aproximaciones.

Determinísticas. Son aquellas cuyos valores están completamente especificados para cualquier instante del tiempo y pueden representarse mediante una fórmula cerrada, un conjunto de valores o una fórmula recursiva.

Reales y complejas. Una señal es real, si sus valores que la representan son un número real y complejas, si sus valores que la representan son un número complejo. Matemáticamente se expresan como

$$x(t) = \Re\{x(t)\} + j\Im\{x(t)\} \quad (1.1)$$

donde \Re es la parte real, e \Im la parte imaginaria, con $j = \sqrt{-1}$.

Continuas o analógicas. Son aquellas que están definidas en todos los valores del continuo del tiempo, aunque su dependencia de este pueda soportar discontinuidades de primer grado, esto es $x(t_{0-}) \neq x(t_{0+})$. En la Figura 1.2(a) se muestra un ejemplo de ellas.

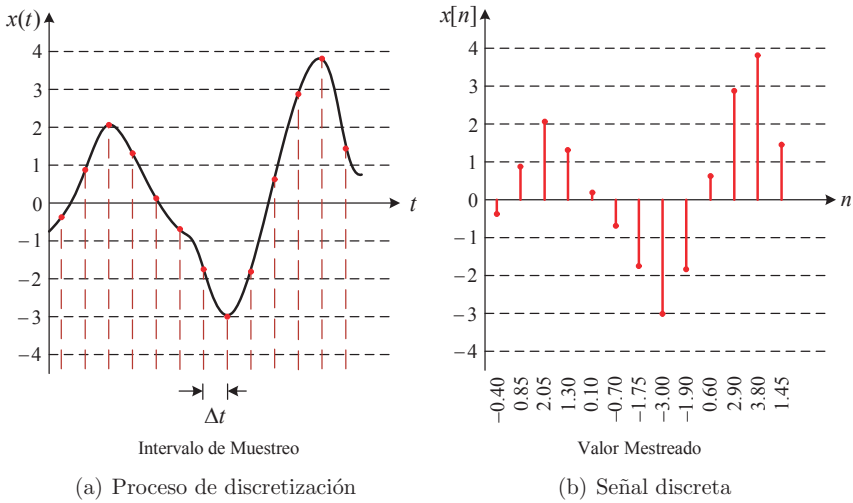


Figura 1.2: Muestreo de una señal.

Discretas. Son aquellas que están definidas en ciertos intervalos de tiempo y su representación se realiza mediante una secuencia de números enteros. Las señales discretas se obtienen a partir del muestreo de una señal continua (Figura 1.2(a)), cuyos valores corresponden a la amplitud de la señal en un instante particular (Figura 1.2(b)). De manera general, el teorema de muestreo define la relación de la frecuencia mínima de muestreo con la frecuencia máxima de la señal, cuyo valor de tal manera que a partir de las muestras sea posible reconstruir de manera completa la señal original. Esto es

$$f_s \geq 2f_{max} \tag{1.2}$$

con f_s la frecuencia de muestreo y f_{max} , la frecuencia máxima de la señal original.

Matemáticamente, las señales discretas se representan de la forma $x[n]$, siendo n el valor de la muestra.

Para el caso de la Figura 1.2(b) la secuencia discreta $x[n]$ está dada por:

$$x[n] = \{-0.4, 0.85, 2.05, 1.3, 0.1, -0.7, -1.75, -3, -1.9, 0.6, 2.9, 3.8, 1.45\}$$

Cuantificadas. Son aquellas señales discretizadas cuyos valores de amplitud han sido limitados a un número finito de valores cuantificados. La cuantificación inicia con la división del eje de la amplitud en intervalos iguales. El valor medio de cada intervalo corresponde al nivel o paso de cuantificación deseado, que finalmente es asignado como el valor más próximo a la muestra, resultado del proceso de discretización. La representación gráfica se muestra en la Figura 1.3(b).

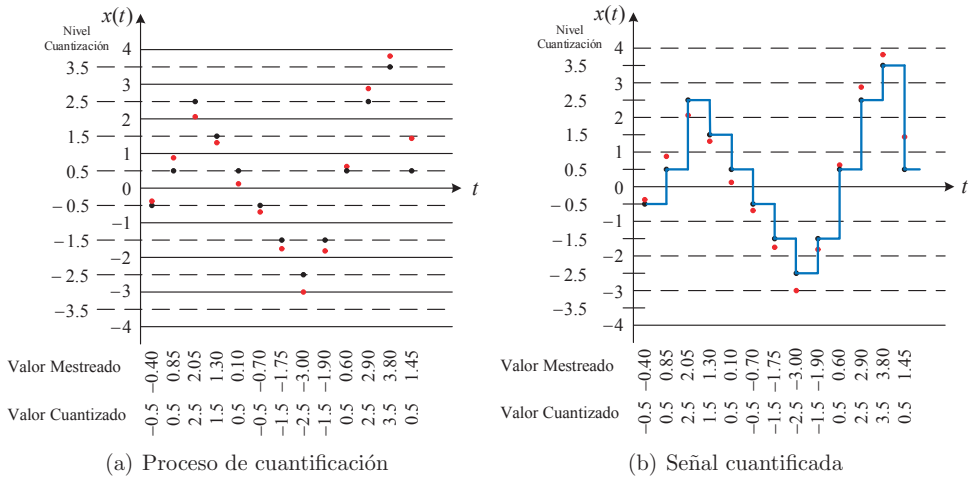


Figura 1.3: Proceso de cuantificación de una señal.

El número de valores de cuantificación está directamente relacionado con la precisión que se desea obtener de la señal a representar. En los sistemas electrónicos, generalmente los valores cuantificados se codifican en binario, es por esto que el número de niveles resultante está dado en potencia de dos. Matemáticamente se define por $L = 2^n$, donde L es el número de niveles de cuantificación y n el número de bits que se emplean para codificar la señal. Para el caso de la Figura 1.3, $L = 8$ y por consiguiente $n = 3$.

Digitales. Son aquellas señales que además de estar definidas en intervalos de tiempo discretos, sólo pueden tomar un número finito de estos valores.

Para codificar en binario, es necesario que cada uno de los valores cuantificados, sean, en primera instancia, codificados en decimal para luego transformar cada uno de ellos en dígitos binarios. En la Figura 1.4, se muestra todo el proceso; desde la discretización, pasando por la cuantificación, hasta la conversión de la señal en una secuencia binaria.

Así mismo, y de acuerdo a sus características, las señales continuas y discretas se pueden clasificar en:

Periódicas y aperiódicas. Una señal continua $x(t)$ es periódica si hay un número positivo T tal que se cumpla la igualdad

$$x(t) = x(t + T) \quad (1.3)$$

El número positivo más pequeño T se denomina *periodo*, mientras que su recíproco es llamado *frecuencia fundamental* y es igual a $f = 1/T$. En forma general se puede escribir $x(t) = x(t + nT)$, siendo n un número entero que indica la repetición periódica de la señal $x(t)$. Si la igualdad no se cumple, se dice que la señal es no periódica.

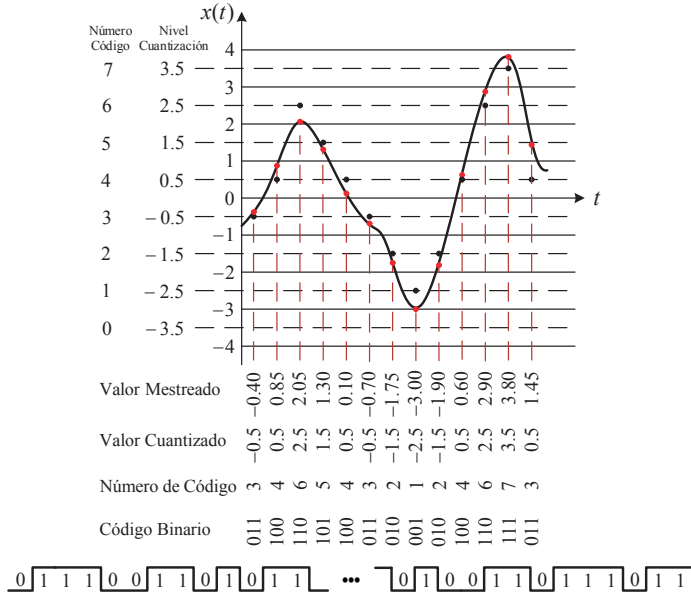


Figura 1.4: Codificación de una señal.

Para el caso de la suma de señales periódicas $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, con periodos T_1 y T_2 respectivamente. Es decir

$$x_1(t) = x_1(t + T_1) = x_1(t + mT_1)$$

$$x_2(t) = x_2(t + T_2) = x_2(t + nT_2)$$

Si T_1 y T_2 son tales que $mT_1 = nT_2 = T$, entonces la señal $x(t)$ es periódica, y

$$x(t + T) = x_1(t + T_1) + x_2(t + T_2) = x_1(t) + x_2(t)$$

de ahí que, la condición para determinar la periodicidad de la señal está dada por la relación T_1/T_2 . Ahora si la relación T_1/T_2 es un número racional, la señal $x(t)$ es periódica y el periodo T será el mínimo común múltiplo entre los periodos T_1 y T_2 . En caso de que la relación sea un número irracional, la señal toma el nombre de **Cuasiperiódica**.

Un tipo de señales continuas periódicas son las funciones exponenciales complejas de la forma $e^{j\omega t}$, donde ω es la frecuencia angular definida como

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{1.4}$$

con T el periodo de la señal.

Usando la definición de periodicidad se puede calcular el periodo de la señal exponencial compleja, haciendo

$$e^{j\omega t} = e^{j\omega(t+T)}$$