Ehrhard Behrends
Peter Gritzmann
Günter M. Ziegler
Hrsg.

π & Co.

KALEIDOSKOP DER MATHEMATIK

Das Buch zum DMV-Abiturpreis

DMV

Springer

π und Co.

Kaleidoskop der Mathematik

Ehrhard Behrends • Peter Gritzmann
Günter M. Ziegler
Herausgeber

π und Co.

Kaleidoskop der Mathematik

2., überarbeitete und erweiterte Auflage

Springer

Prof. Dr. Ehrhard Behrends
Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
Berlin, Deutschland
behrends@math.fu-berlin.de

Prof. Günter M. Ziegler
Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
Berlin, Deutschland
ziegler@math.fu-berlin.de

Prof. Dr. Peter Gritzmann
Zentrum Mathematik
Technische Universität München
München, Deutschland
gritzmann@tum.de

ISBN 978-3-662-48871-3 ISBN 978-3-662-48872-0 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-48872-0

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Einband: deblik Berlin, unter Verwendung von Motiven von Jürgen Richter-Gebert
(TU München / iOrnament)
Planung: Dr. Annika Denkert

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg ist Teil der Fachverlagsgruppe
Springer Science+Business Media
(www.springer.com)

Vorwort

Haben Sie schon einmal das Stichwort „Mathematik" bei *Google* eingegeben? Aktuell (im November 2015) finden sich dafür ungfähr 21.200.000 Einträge, beim englischen „mathematics" sogar 238.000.000 . . . Tendenz steigend. „Mathematik und Spaß" bringen es immerhin auf 1.160.000 Einträge, „Mathematik und Qual" bzw. „Mathematik und Frust" dagegen „nur" auf 179.000 bzw. 82.900. Mathematik ist also interessant und relevant, kann durchaus Spaß machen, aber manchmal auch frustrieren, dieses Fazit liegt nahe. Und so scheiden sich an dem Fach die Geister: glühende Begeisterung auf der einen, aber auch bissige Ablehnung auf der anderen Seite. Man macht sich lustig über die Mathematiker: *Kommt ein Mathematiker in ein Fotogeschäft: „Guten Tag, ich möchte einen Film entwickeln lassen." Verkäuferin: „9 × 13?", Mathematiker: „117, wieso?"* Eine perfidere Variante lässt den Mathematiker „137" antworten, eine Primzahl. Und das ist noch harmlos im Vergleich mit anderen Vorurteilen, denen das Fach bisweilen in der Öffentlichkeit begegnet: abstrakt, weltfremd, ohne Saft und Kraft, erfunden weniger als Mittel zur Bewältigung unserer immer komplexer werdenden Welt, sondern eher als Folterwerkzeug für Generationen von Schülerinnen und Schülern. Da ist es schon fast ein Trost, dass Paul Möbius vor mehr als hundert Jahren festgestellt hat, dass die Mathematik wenigstens „dem Liebestrieb nicht abträglich" ist. (Nein, die Feststellung verdanken wir nicht dem Mathematiker August Ferdinand Möbius, der das Möbiusband „erfunden" hat, sondern einem seiner Enkel – der war Neurologe und Psychiater, oder, wie es damals hieß, Irrenarzt.)

„Mathematik schult das logische Denkvermögen", heißt es. Das stimmt, aber Mathematik ist noch viel mehr. Mathematik ist ästhetisch, nützlich und ein wichtiges Instrument der Aufklärung. Mathematik ist kreativ, spannend und unterhaltsam. Und sie kommt überall vor – na ja, fast überall. Sie durchdringt und beeinflusst mittlerweile fast alle Lebens- und Arbeitsbereiche: vom Kraftwerk- oder Fahrzeugbau bis zur Straßen- und Routenplanung, vom bargeldlosen Zahlungsverkehr im Supermarkt bis zur Architektur der kühnsten Gebäude, von der Wettervorhersage bis zum MP3-Player. Natürlich basiert auch das Internet wesentlich (und in großer Vielfalt) auf Mathematik, auch *Google* und *eBay*. Die Mathematik hat vieles durchdrungen, aber es ist auch vieles noch ungelöst. Und der Gang der Welt stellt immer höhere Anforderungen an die Mathematik, Mathematik, die hilft, technische, wirtschaftliche, biologische oder gesellschaftliche Prozesse zu verstehen und zu optimieren.

Dieses Buch will Schlaglichter werfen auf die Mathematik, nicht als Monografie, nicht als Lehrbuch, sondern als eine ganz bunte Collage. Wir haben 43 Artikel und Buchbeiträge zusammengestellt, die viele Aspekte von Mathematik beleuchten. Nicht jeder Text wird alle ansprechen, aber für jeden sollte etwas dabei sein, wirklich für jeden, denn das Spektrum reicht von feuilletonistischen Einwürfen über fachliche Überblicke bis hin zu spezielleren mathematischen Texten. Leicht verständliche, unterhaltsame Texte finden sich ebenso wie anspruchsvollere mathematische Herausforderungen, Naheliegendes ebenso wie Kontraintuitives. Auch philosophische, theologische und kulturelle Aspekte werden aufgegriffen, genauso wie zentrale mathematische Probleme, die zum Teil schon seit mehr als einem Jahrhundert auf ihre Lösung warten. Wenn also etwas zu leicht oder zu schwer ist, einfach überspringen: Der nächste Text ist wieder ganz anders. Zwischen den Texten wird es manche Überschneidung und „Wechselwirkung" geben. Doch jeder steht für sich, die Texte bauen nicht aufeinander auf. Gemeinsam, wie es bei einer Collage so ist, ergeben sie jedoch ein Ganzes, ein Bild von der Vielfältigkeit und Schönheit der Mathematik, von ihrer Nützlichkeit und ihren Herausforderungen und – ganz besonders – von ihrer „jungen Quicklebendigkeit".

Aus einer Idee von Vasco Alexander Schmidt, die uns drei gleich begeistert hat, ist 2007/2008 die erste Auflage des vorliegenden Festbandes entstanden. Im Sommer und Herbst 2015 haben wir die vorliegende, aktualisierte und erweiterte zweite Auflage produziert. Wir bedanken uns bei allen, die uns in beiden Phasen durch Hinweise, Ratschläge und Ideen, Genehmigungen und Zuarbeit dabei unterstützt haben, einen so bunten und vielfältigen Band zusammenzusetzen – insbesondere bei Ulrike Schmickler-Hirzebruch, Clemens Heine, Joachim Heinze, Annika Denkert und Stella Schmoll bei Springer.

Die Herausgeber und die DMV sagen Herzlichen Dank!

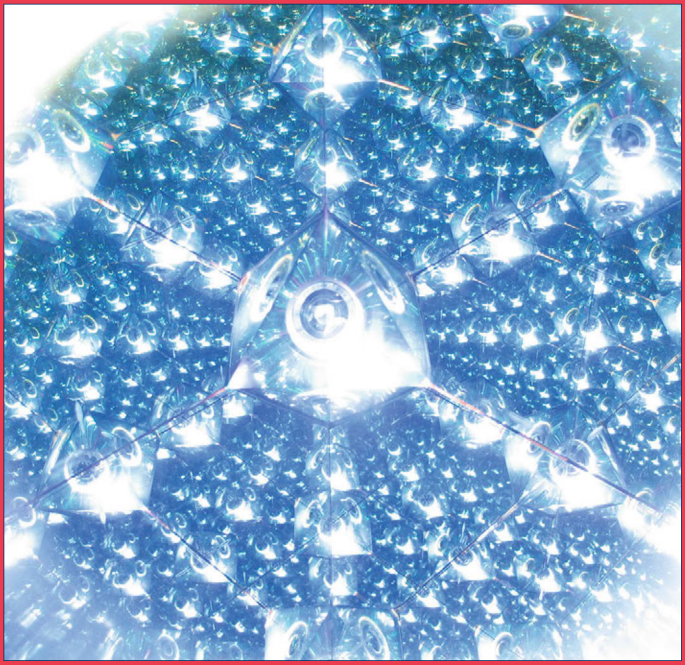
Berlin und München, Dezember 2015

Ehrhard Behrends
Peter Gritzmann
Günter M. Ziegler

Inhalt

I

Prolog



Mathe wird Kult – Beschreibung einer Hoffnung

Gero von Randow

Es hat sich etwas geändert. Seit der vorigen Auflage dieses Buches wird die Mathematik populär. Kein peinliches Schweigen mehr, wenn jemand auf einer Party sagt, er sei Mathematiker, stattdessen Bewunderung. Das Kokettieren damit, von Mathe keine Ahnung zu haben, ist auch nicht mehr en vogue. Und dass Mathematiker verschrobene Käuze seien, dieses Vorurteil befindet gleichfalls auf dem Rückzug.

Woran mag das liegen?

Die Auseinandersetzung um PISA und die Folgen dürften dazu beigetragen haben. Die Erkenntnis greift um sich, dass all' die neuen Ideen und Dinge, unsere Gesellschaft zu einer Wissenschaftsgesellschaft machen, eine mathematische Seele haben, von der Klimasimulation über Internetsoftware bis zur Biotechnologie; ja, dass sogar die Globalisierung ein mathematisch getriebenes Phänomen ist, denn ihr Kern ist die Auflösung von Zeit und Raum durch computervermittelten Informations- und Kapitalverkehr.

Und zugleich haben es die Mathematiker selbst verstanden, unterstützt von journalistischen Sympathisanten, ihre Wissenschaft dem Publikum näher zu bringen. Mittlerweile geht kein anderer Forschungszweig so offensiv, gut gelaunt und ideenreich an die Öffentlichkeit wie die Mathematik. Und das ist vielleicht noch wichtiger als die Pisadebatte. Denn die Bürger sollen nicht nur begreifen, dass Mathematik nötig ist, sondern dass sie Freude macht. Die Angewandte Mathematik, weil sie eine kreative Beschäftigung mit interessanten Problemen der Welt ist, und die Reine Mathematik, weil sie eine kreative Beschäftigung mit interessanten Problemen des Geistes ist.

Mit anderen Worten: Mathematik, das ist nicht nur Notwendigkeit, sondern auch Freiheit.

Mathematiker sind in gewisser Hinsicht freier als andere Wissenschaftler. Sie dürfen, ja sie müssen unausgesetzt ihre Kalküle verändern. Heute bauen sie diese Struktur, morgen jene. Heute legen sie diese Annahme zugrunde, morgen jene.

Sie dürfen das Unmögliche möglich machen. Sie erfinden beispielsweise eine Geometrie, in der es zu einer Geraden mehrere Parallelen gibt, die alle durch den gleichen Punkt gehen. Oder einen vier-, einen fünf-, einen 100- oder einen n-dimensionalen Raum. Theologen, die in ihrer Disziplin Ähnliches tun wollten, müssten mit Schwierigkeiten rechnen.

Mathematiker können sich Unvorstellbares ausdenken, weil sie von Vorstellungen abstrahieren, weil sie formalisieren. Dazu eine kleine Anekdote. Ein Ingenieur und ein Mathematiker besuchen eine Physikvorlesung, in der von Räumen mit elf Dimensionen die Rede ist. Zum Schluss sagt der Ingenieur: Das ist mir zu hoch, ein elfdimensionaler Raum. Darauf der Mathematiker: Ist doch ganz ein-

E. Behrends, G.M. Ziegler, P. Gritzmann (Hrsg.), *Pi und Co.*, DOI 10.1007/978-3-662-48872-0_1

fach. Sie denken sich einen n-dimensionalen Raum, und dann setzen Sie n gleich elf.

Ich will nicht übertreiben. Theoretische Abstraktion und Gedankenfreiheit sind in jeder Disziplin notwendig, von der Theologie bis zur Physik. Und es ist auch nicht so, dass Mathematiker willkürlich mit ihren Axiomen oder Grundregeln herumspielen. Nicht jede frei gewählte Notation, Annahme oder Umwandlungsregel ergibt etwas Sinnvolles, etwas Interessantes, etwas Praktisches, und auch nicht unbedingt einen Forschungsauftrag. Die mathematische Freiheit ist eine Idee, die nie rein umgesetzt wird. Aber sie gibt der Disziplin Kraft.

„Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit", schrieb Georg Cantor, der große Mathematiker. Es ist dem deutschen Schul- und Hochschulunterricht zu wünschen, dass er diese Freiheit anschaulich werden lässt. Sie ist nicht zu haben ohne formale Strenge, und auch nicht ohne konzentriertes Lernen, von mir aus Büffeln. Aber der kreative Geist der Mathematiker, der darf nicht davongepaukt werden.

Wer sich der Mathematik verschreibt, als Schüler im Leistungskurs, Student oder auch als Späteinsteiger, dem winken viele schöne Preise. Die Fähigkeit, Probleme kreativ zu lösen – kein Zufall, dass Personalabteilungen von Unternehmen an Bewerbungen von Mathematikern (und Physikern) so interessiert sind. Oder die Fähigkeit, die Plausibilität von Behauptungen und Rechnungen abzuschätzen. Ebenso erlernt man das Vermögen, sich geistig zu konzentrieren. Und wer die wichtigsten Methoden der Mathematik kennt, arbeitet sich schnell in neue Wissensgebiete ein.

Außerdem ist es mittlerweile cool, Mathematiker zu sein. Ich beneide jeden darum, gerade auch aus diesem Grund.

Wieviel Mathematik gibt es?

Gibt es in der Mathematik überhaupt noch etwas zu erforschen? Dieser Frage liegt die Vorstellung zu Grunde, dass, nachdem der Satz des Pythagoras und alle anderen Formeln schon entdeckt seien, es für Mathematiker eigentlich nichts mehr zu tun gebe. Das Gegenteil ist richtig: Die Mathematik wächst so schnell, dass kaum noch ein Satz von den Axiomen an verfolgt und kontrolliert werden kann.

Stellen wir uns vor, dass ein Mathematiker, nennen wir ihn Prof. B., einen Satz bewiesen hat. Nach wochen-, vielleicht monatelangen Kämpfen, langwierigen Literaturrecherchen, häufigen Gesprächen mit Kollegen, intensivem Nachdenken, intelligenten Fallunterscheidungen, seitenlangen Rechnungen (und vielen Irrwegen!) hat er endlich sein ersehntes Ergebnis erzielt: *Der endliche projektive Raum* PG(3, q) *besitzt einen Parallelismus!*

Prof. B. ist so stolz auf diesen Satz, dass er sich nicht mit der Erkenntnis an sich begnügt und diese still bei sich behält, sondern er möchte diese Tatsache der Welt bekannt machen. Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten. Er kann an alle Kollegen, die dies interessiert, einen Brief oder eine E-Mail schreiben; er kann auf mathematischen Tagungen darüber berichten; er kann seine Studenten in Spezialvorlesungen davon informieren; – aber die richtige Art und Weise, sich die Urheberansprüche an diesem Satz zu sichern, besteht darin, diesen in einer mathematischen Zeitschrift zu veröffentlichen.

Prof. B. wird also versuchen, seinen Satz so aufzuschreiben, dass auch seine Kollegen verstehen, worin seine neue Erkenntnis besteht. Dann reicht er diese Arbeit bei einer der vielen mathematischen Zeitschriften ein. Er hat dabei die Wahl zwischen allgemeinen Zeitschriften, wie etwa dem 1826 von Leopold Crelle gegründeten *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (kurz Crelle's Journal) oder moderneren, auf ein Gebiet spezialisierten Zeitschriften, wie etwa der Zeitschrift *Linear Algebra and its Applications*. In diesem Fall wird Prof. B. wohl eher versuchen, ihn bei einer geometrischen Zeitschrift, wie etwa dem *Journal of Geometry* oder (ganz vornehm) der Zeitschrift *Geometriae Dedicata* („der Geometrie geweiht“) unterzubringen. Alle diese Zeitschriften dienen ausschließlich dem Zweck, solche neuen Ergebnisse zu veröffentlichen.

E. Behrends, G.M. Ziegler, P. Gritzmann (Hrsg.), *Pi und Co.*, DOI 10.1007/978-3-662-48872-0_2

Die eingereichte Arbeit wird dort zunächst mit einem Stempel mit dem Eingangsdatum versehen, um später etwaige Prioritätsansprüche entscheiden zu können. Danach leitet der Herausgeber der Zeitschrift die Arbeit geeigneten Referenten zu. Dies sind Fachkollegen, deren Aufgabe darin besteht, festzustellen,

- ob die Ergebnisse der eingereichten Arbeit neu sind,
- ob die Ergebnisse richtig sind,
- ob die Beweise richtig sind (das ist etwas anderes!),
- ob die Arbeit gut aufgeschrieben ist, und zusammenfassend
- ob die Ergebnisse so interessant sind, dass sie eine Veröffentlichung in dieser Zeitschrift rechtfertigen.

Dafür brauchen die Kollegen, die ja noch viele andere Aufgaben zu erledigen haben, wenn's gut geht, zwei Monate. Danach wird dem Autor das Ergebnis mitgeteilt. Häufig lautet dies so, dass die Arbeit im Wesentlichen eine Veröffentlichung rechtfertige, *wenn* noch die Änderungswünsche und Anmerkungen der Referenten berücksichtigt werden. Außerdem, so setzt der Herausgeber hinzu, habe die Zeitschrift so viele Arbeiten zu veröffentlichen, dass der Autor seine Arbeit so kürzen müsse, dass sie maximal zehn Seiten umfasst.

Prof. B. muss also seine Arbeit umarbeiten, was nicht ganz einfach ist, da er inzwischen mit ganz anderen Gedanken beschäftigt ist. Dann reicht er die revidierte Fassung seiner Arbeit ein, diese wird nochmals referiert und, wenn alles gut geht, zur Veröffentlichung angenommen.

Das bedeutet aber nur, dass sie in die Warteschlange der Zeitschrift eingereiht wird. In der Regel dauert es noch ein Jahr, in vielen Fällen erheblich länger, bis der glückliche Prof. B. seine Arbeit im Druck sieht, die Sonderdrucke erhält und diese an seine engsten Fachkollegen verschicken kann.

So stellt sich eine mathematische Veröffentlichung aus Sicht eines *Autors* dar.

Ganz anders sieht das aus Sicht eines *Lesers* aus. Für ihn ist diese Arbeit eine in einer riesigen Menge von Veröffentlichungen, er kann eine einzelne Arbeit eigentlich gar nicht wahrnehmen.

In jedem Jahr werden mehr als 60.000 mathematische Arbeiten veröffentlicht. Jede Arbeit enthält mindestens einen neuen Satz. Also gibt es jedes Jahr mehr als 60.000 neue mathematische Sätze, pro Tag mehr als 150. Wer kann diese Menge bewältigen?

Dabei sind mathematische Arbeiten keineswegs leicht zu lesen, im Gegenteil: Wenn ich eine Arbeit aus meinem Spezialgebiet gründlich lesen will, brauche ich für eine Seite mindestens eine Stunde, häufig viel mehr. Fortgeschrittene Studierende, die über eine 10seitige Arbeit einen Seminarvortrag halten müssen, benötigen oft Monate, bis sie die Arbeit verstanden haben! Wie soll also ein einzelner Mensch 60.000 mathematische Arbeiten in einem Jahr zur Kenntnis nehmen können? Völlig unmöglich!

Daher hat man schon vor längerer Zeit *neue Zeitschriften* gegründet, aber nicht Publikationsorgane für weitere Arbeiten, sondern Zeitschriften, in denen das Wesentliche jeder veröffentlichten Arbeit kurz (und manchmal auch kritisch) dargestellt wird.

Es handelt sich um „Meta-Zeitschriften“, also solche, die über Veröffentlichungen in Zeitschriften berichten. Das erste dieser „Referateorgane“ waren die *Jahrbücher der Fortschritte der Mathematik*, die von 1869 bis 1945 erschienen. Schon zu Lebzeiten der *Fortschritte* wurden 1931 in Deutschland das *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete* und 1940 in den USA die *Mathematical Reviews* gegründet. Das russische Pendant heißt *Referativnij Journal Matematika* und erscheint seit 1945.

Für eine solche Referatzeitsschrift wird jede mathematische Veröffentlichung nochmals von einem Fachkollegen kritisch gelesen und kurz zusammengefasst. Bei der eingangs erwähnten Arbeit von Prof. B. über Parallelismen in $PG(3, q)$ lautet das Referat der *Mathematical Reviews* kurz und bündig so:

> Let $\Sigma = PG(d, q)$ be the d-dimensional projective space of order q. A *t-spread* of Σ is a set S of t-dimensional subspaces of Σ with the property that each point of Σ is incident with exactly one element of S. A *t-parallelism* of Σ is a collection P of t-spreads such that each t-dimensional subspace of Σ is contained in exactly one t-spread of S. The author proves first that there exist 1-parallelisms in any 3-dimensional projective space of finite order. Then, by induction, he proves that any finite projective space of dimension $d = 2^{i+1} - 1$ ($i = 1, 2, \ldots$) admits parallelism of lines.

Jede mathematische Arbeit wird also im Idealfall von mindestens fünf vom Autor unabhängigen Personen kritisch gelesen: Von den beiden Referenten, die ein Gutachten für die Zeitschrift machen, und von den Referenten des *Zentralblatt*s, der *Mathematical Reviews* und der *Referativnij Journal Matematika.*

Insgesamt werden jährlich vom Zentralblatt und von den Mathematical Reviews jeweils etwa 60.000 Arbeiten aus ca. 700 Zeitschriften referiert. Sie können sich vorstellen, wie umfangreich dann diese Zeitschriften werden. In der

Tat bringen es die Referatzeitschriften jährlich auf etwa einen laufenden Meter. Daher hat man vor einigen Jahren auch angefangen, die Daten nicht nur auf Papier, sondern auch auf CD-ROM zur Verfügung zu stellen.

Die Aufgabe der Referatzeitschriften besteht aber nicht nur darin, eine Kurzbeschreibung der Arbeit zur Verfügung zu stellen, sondern auch, die referierte Arbeit in ein spezielles mathematisches Gebiet einzuordnen. Man hat dazu die Mathematik nach einem gewissen Schema in Gebiete eingeteilt. Das geschieht zunächst grob: Algebra, Geometrie, Analysis, Stochastik usw. Jedes Gebiet wird dann nochmals in verschiedene Ebenen unterteilt. Obige Arbeit wurde beispielsweise dem Gebiet 51 E 20 zugeteilt. Dabei bedeutet „51“ Geometrie, „E“ heißt endliche Geometrie und „20“ zeigt an, dass es sich um das Spezialgebiet „kombinatorische Strukturen in endlichen projektiven Räumen“ handelt.

Das Verzeichnis all dieser Gebiete ist ein Heft von 50 eng bedruckten Seiten. Unten ist eine typische Seite abgedruckt. Jeder Mathematiker kennt sich nur in wenigen dieser Gebiete wirklich aus. Auf der abgebildeten Seite sind diejenigen Gebiete (dieser Seite) hervorgehoben, von denen ich sagen würde: Da fühle ich mich kompetent.

Also keine Spur von „in der Mathematik ist bereits alles erforscht“ – ganz im Gegenteil: Wie in allen anderen Wissenschaften auch ertrinken die Mathematiker in der Fülle der Information.

Wie konnte es zu dem Vorurteil „in der Mathematik nichts Neues“ kommen? Kein Mensch würde auf den Gedanken kommen, in der Physik, in der Biologie, in der Medizin sei bereits alles erforscht. Es wird höchstens die Frage gestellt, ob in diesen Wissenschaften die „richtigen“ Dinge erforscht werden.

Meinem Eindruck nach kommt dieses Vorurteil durch die Art und Weise zustande, wie Mathematik unterrichtet wird. Im Mathematikunterricht der Schule und in den Vorlesungen an den Universitäten wird die Mathematik als ein in der Regel abgeschlossenes Gebiet von Begriffen, Sätzen und Methoden präsentiert. Schüler und Studierende erleben Mathematik als eine für sie unzugängliche Wissenschaft, als ein zumindest scheintotes Gebiet.

Nur selten einmal haben Schüler oder Studierende die Möglichkeit, selbst Begriffe zu suchen, selbst Verfahren zu entwickeln, selbst Sätze zu entdecken. Schade. Denn so könnten Schüler und Studierende erleben, dass Mathematik eine quicklebendige Wissenschaft ist, die dann Spaß macht, wenn man sie aktiv betreibt!

51Dxx Geometric closure systems

51D05 Abstract (Maeda) geometries
51D10 Abstract geometries with exchange axiom
51D15 Abstract geometries with parallelism
51D20 Combinatorial geometries [See also 05B25, 05B35]
51D25 Lattices of subspaces [See also 05B35]
51D30 Continuous geometries and related topics [See also 06Cxx]
51D99 None of the above, but in this section

51Exx Finite geometry and special incidence structures

51E05 General block designs [See also 05B05]
51E10 Steiner systems
51E12 Generalized quadrangles, generalized ~~polygons~~
51E14 Finite partial geometries (general), nets, fractial spreads
51E15 ~~Affine and projective planes~~
51E20 Combinatorial structures in finite projective spaces [See also 05B05, 05B25]
51E21 Blocking sets, ovals, k-arcs
51E22 ~~Linear codes and caps in Galois~~ spaces [See also 94B05]
51E23 Spreads and packing problems
51E24 Buildings and the geometry of diagrams [See also 20E42]
51E25 Other finite nonlinear geometries
51E26 Other finite linear geometries
51E30 Other finite incidence structures [See also 05B30]
51E99 None of the above, but in this section

51Fxx Metric geometry

51F05 Absolute planes
51F10 Absolute spaces
51F15 Reflection groups, reflection geometries [See also 20H10, 20H15; for Coxeter groups see 20F55]
51F20 Congruence and orthogonality [See also 20H05]
51F25 Orthogonal and unitary groups [See also 20H05]
51F99 None of the above, but in this section

51G05 Ordered geometries (ordered incidence structures, etc.)

51Hxx Topological geometry

51H05 General theory
51H10 Topological linear incidence structures
51H15 Topological nonlinear incidence structures
51H20 Topological geometries on manifolds [See also 57-XX]
51H25 Geometries with differentiable structure [See also 53Cxx, 53C70]
51H30 Geometries with algebraic manifold structure [See also 14-XX]
51H99 None of the above, but in this section

51Jxx Incidence groups

51J05 General theory
51J10 Projective incidence groups
51J15 Kinematic spaces
51J20 Representation by near-fields and near-algebras [See also 12K05, 16Y30]
51J99 None of the above, but in this section

51Kxx Distance geometry

51K05 General theory
51K10 Synthetic differential geometry
51K99 None of the above, but in this section

51Lxx Geometric order structures [See also 53C75]

51L05 Geometry of orders of nondifferentiable curves
51L10 Directly differentiable curves
51L15 n-vertex theorems via direct methods
51L20 Geometry of orders of surfaces
51L99 None of the above, but in this section

51Mxx Real and complex geometry

51M04 Elementary problems in Euclidean geometries
51M05 Euclidean geometries (general) and generalizations
51M09 Elementary problems in hyperbolic and elliptic geometries
51M10 Hyperbolic and elliptic geometries (general) and generalizations
51M15 Geometric constructions
51M16 Inequalities and extremum problems [For convex problems see 52A40]
51M20 Polyhedra and polytopes; regular figures, division of space [See also 51F15]
51M25 Length, area and volume [See also 26B15]
51M30 Line geometries and their generalizations
51M35 Synthetic treatment of fundamental manifolds in projective geometries (Grassmannians, Veronesians and their generalizations) [See also 14M15]
51M99 None of the above, but in this section

51Nxx Analytic and descriptive geometry

51N05 Descriptive geometry [See also 65D17, 68U07]
51N10 Affine analytic geometry
51N15 Projective analytic geometry
51N20 Euclidean analytic geometry
51N25 Analytic geometry with other transformation groups
51N30 Geometry of classical groups [See also 20Gxx, 14L35]
51N35 Questions of classical algebraic geometry [See also 14Nxx]
51N99 None of the above, but in this section

51P05 Geometry and physics [Should also be assigned at least one other classification number from Sections 70 - 86]

Martin Aigner

Die pure Eleganz der Mathematik

Wie allgemein bekannt, unterscheiden sich Mathematiker erheblich von der Mehrheit ihrer Mitmenschen. Man braucht nur einige von Enzensbergers Gedichten zu lesen, in denen er staunend feststellt, dass sie (die Mathematiker) sich vornehmlich in gekrümmten Räumen aufhalten und ohne weiteres Links- mit Rechtsidealen vertauschen, ganz zu schweigen von Unterkörpern, die für sie etwas ganz anderes bedeuten, als der unbefangene Beobachter meinen könnte.

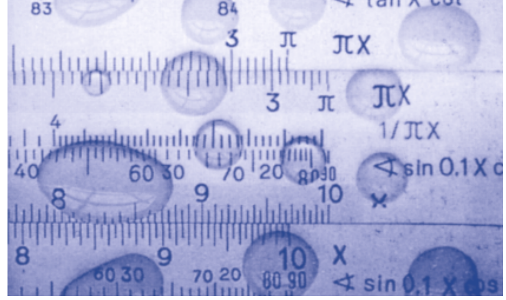
Hier wollen wir uns mit einem weiteren Unterschied befassen, der geradezu mitten ins Leben greift. Während sich die Mehrheit über die wirklich wichtigen Dinge wie Mülltrennung oder Zahnpflege einig ist, sich aber über künstlerische Dinge lustvoll auseinander setzt (der Volksmund sagt bekanntlich: Über Geschmack lässt sich nicht streiten – und meint natürlich das Gegenteil), so ist das in der mathematischen Welt genau umgekehrt. Spätestens seit Plato stehen sich Platonisten und Formalisten

»[…] es ist durchaus kein Zufall, dass den meisten Mathematikern ästhetische Kriterien nicht fremd sind. Es genügt ihnen nicht, dass ein Beweis stringent ist; ihr Ehrgeiz zielt auf ›Eleganz‹.«
H. M. Enzensberger

ideologiebewehrt gegenüber; der Disput, ob mathematische Gesetze entdeckt oder erfunden werden, ist ein Dauerbrenner; und die Frage über den Primat von reiner versus angewandter Mathematik kann ganze Institute in Aufregung versetzen. Aber wenn sich zwei Mathematiker über ein Blatt Papier beugen und der eine sagt: »Das ist ein ausgesprochen eleganter Beweis!«, kann er sich der Zustimmung seines Kollegen sicher sein. Über Schönheit und Eleganz von mathematischen Formeln, Sätzen und insbesondere Beweisen gibt es keinen Disput, da sind sich alle einig.

Aber was ist nun Eleganz in der Mathematik? Merkwürdigerweise lässt sich darüber bei den Großschreibern

E. Behrends, G.M. Ziegler, P. Gritzmann (Hrsg.), *Pi und Co.*, DOI 10.1007/978-3-662-48872-0_3



der Zunft nichts erfahren (wohl aber über Schönheit, wie wir gleich sehen werden). Ich will die Leser ein wenig in die mathematische Welt verführen, eine ganz persönliche Definition von Eleganz vorschlagen und sie mit einigen klassischen Beispielen illustrieren.

Vom Schönen und Wahren

Als 1995 Andrew Wiles das berühmteste offene mathematische Problem, die Fermat'sche Vermutung, bewies, war dies allen Zeitungen eine Schlagzeile auf Seite eins wert. In einer überregionalen Zeitung stand zu lesen: »Rechenkünstler aus Cambridge löste 350 Jahre altes mathematisches Rätsel«. Die virtuose Abfolge von logischen Schlüssen und Strukturaussagen in der Arbeit von Wiles als Rechnen zu bezeichnen könnte der Wahrheit nicht ferner sein. Aber offenbar ist es allgemeine Ansicht, dass ein Mathematiker jemand ist, der 99 Formeln durcheinander mischt und daraus eine 100. Formel gebiert.

Was einige der größten Mathematiker dazu meinen, hört sich anders an. Aristoteles schreibt in seiner *Metaphysik:* »Insbesondere die mathematischen Wissenschaften drücken Ordnung, Symmetrie und Beschränkung aus – und dies sind die höchsten Formen der Schönheit.« Johannes Kepler, der ohnehin zum Schwärmen neigte, war hingerissen von den ›goldenen‹ Proportionen der Mathematik. Henri Poincaré postulierte den erstaunlichen Satz: »Das Ästhetische mehr als das Logische ist die dominierende Komponente in der mathematischen Kreativität.« G. H. Hardy, ein Meister der Zahlentheorie, die notorisch komplizierte Formeln hervorbringt, merkte mit untypischem britischen Overstatement an: »There is no permanent place for ugly mathematics!« Ich hoffe, Ihre Sicht des Mathematikers als rigorosem Rechenmeister endgültig erschüttert zu haben, wenn ich den Physiker Paul Dirac zitiere: »Es ist wichtiger, dass eine Gleichung schön ist, als dass sie mit dem Experiment übereinstimmt.« Am prägnantesten beschreibt diese Gegenwart des Schönen vielleicht Hadamard in seiner *Psychology of Invention*: »Das mathematische Genie offenbart sich in zwei Weisen; es wählt mit untrüglicher Sicherheit unter einer Vielzahl von Alternativen die einzig richtige, und es wird dabei geleitet von der Idee des Vollkommenen, einer Ahnung vom Paradies, vom ewig Gültigen.«

Man sollte nun nicht meinen, die Mathematiker hätten sich in ihren Meta-Schriften nur mit dem Schönen beschäftigt – ganz im Gegenteil. In der Hauptsache geht es um Mathematik als Denkmodell, als Abbild der Wirklichkeit, kurz: um Erkenntnis und Wahrheit. Derselbe Poincaré schreibt in seinen *Letzten Gedanken* sinngemäß: Wissenschaft ist der Drang nach Wahrheit auf sittlicher Basis. Wittgenstein betont die kategorische Strenge der Logik, und Popper führte das masochistische Prinzip in die Wissenschaft ein: Eine Theorie ist nur dann etwas wert, wenn sie falsifizierbar ist. Man liest Sätze wie: »Nur der Nutzen adelt die Erkenntnis«, »Mathematik ist Humanismus«, und in dem vielleicht besten neueren Buch *Erfahrung Mathematik* von Davis und Hersh sind ganze vier von 400 Seiten Fragen der Ästhetik gewidmet.

Auch wenn der ästhetische Aspekt in den Hintergrund tritt, scheint er ein einigendes Band zu sein. Wenn ein Gutachter die bedeutenden Anwendungen einer mathematischen Arbeit herausstellt, so wird der Autor erfreut sein; schreibt er aber in seinem Referat: »The beauty of the theorem is matched by the elegance of its proof«, so kann er sich der Rührung und des ewigen Dankes des Verfassers sicher sein.

Das Buch der Beweise

Legenden werden üblicherweise nach dem Tod gestrickt. Entstehen sie zu Lebzeiten, so muss es sich um einen außergewöhnlichen Menschen handeln – und der ungarische Mathematiker Paul Erdös war solch eine Jahrhunderterscheinung. Er war der produktivste Mathematiker der jüngeren Geschichte mit über 1 500 Veröffentlichungen. Unermüdlich reiste er von Kontinent zu Kontinent, die eine Woche in Jerusalem, dann in den USA, und nächsten Monat war ein Touch-down in Berlin fällig. Mit seinem einen Koffer in der Hand war seine Begrüßung zugleich sein Motto: »My brain is open.« Gleichermaßen großzügig im Leben wie in der Wissenschaft, verschenkte er nicht nur die meisten seiner vielen Preisgelder, sondern teilte auch seine Ideen und Geistesblitze mit jedem, der sie hören wollte. Er lebte für die und in der Mathematik. Es gibt zahllose Anekdoten über Erdös, die folgende hat den Vorzug, wahr zu sein, weil ich selber dabei war. Eines Abends gegen 22 Uhr saßen wir zu dritt in New York über einem Problem, besser gesagt: Wir saßen fest und kamen nicht weiter. Plötzlich sagte Erdös: »Am besten,

Manche Beweise sind wunderschön, sie haben nur den kleinen Makel, dass sie falsch sind. Wieder andere sind richtig, aber hässlich.

Ein Computer-Beweis ist weder transparent noch von Leichtigkeit beseelt, aber vor allem lehrt er uns nichts.

wir rufen meinen Freund Davenport in Cambridge an, der kann uns bestimmt weiterhelfen.« – »Aber«, so wandte ich ein, »in Cambridge ist es jetzt 4 Uhr morgens.« Darauf Erdös: »Na umso besser, dann ist er sicher zu Hause.«

Ein immer wiederkehrendes Diktum von Paul Erdös führt geradewegs zu unserem Thema. Manche Beweise, erzählte er, sind wunderschön, sie haben nur den kleinen Makel, dass sie falsch sind. Wieder andere sind richtig, aber hässlich. Aber, so war er überzeugt, für jeden mathematischen Satz gibt es *den* Beweis, und mehr noch: Es gibt das BUCH, in dem der liebe Gott die perfekten Beweise aufbewahrt. Und er fügte hinzu: »Man muss nicht an Gott glauben, aber als Mathematiker sollte man an die Existenz des Buches glauben.« Mitte der neunziger Jahre schlugen Günter Ziegler und ich ihm vor, gemeinsam eine erste (und sehr bescheidene) Annäherung an das BUCH aufzuschreiben. Erdös hat die Idee enthusiastisch aufgegriffen, die Fertigstellung von *Proofs from the BOOK* aber nicht mehr erlebt. Wahrscheinlich wäre er weniger als wir über die überwältigende Resonanz auf das BUCH überrascht gewesen. Mathematiker sind in der Mehrzahl introvertierte Menschen. Die ungezählten Zuschriften, die wir erhielten, mit Vorschlägen, Korrekturen, eigenen Erlebnissen und viel Zustimmung, kommen daher einem veritablen Gefühlsausbruch gleich. Das BUCH hatte offenbar eine Saite zum Schwingen gebracht, die jedem mathematischen Instrument zu Eigen ist – mit Eleganz als gemeinsamer Grundstimmung.

Die Leichtigkeit des Augenblicks

Das Wesen der Mathematik ist das Beweisen von Sätzen – und das ist es, was Mathematiker tun: Sie beweisen Sätze. Aber, um ehrlich zu sein, was sie wirklich beweisen wollen, wenigstens einmal in ihrem Leben, ist ein Lemma, wie das Lemma von Fatou in der Analysis oder das von Gauß in der Zahlentheorie. Mit fast jedem berühmten Namen ist solch ein Lemma verbunden – das Wort hat für Mathematiker-Ohren einen fast mythischen Klang.

Nun, wann wird eine mathematische Aussage ein wirkliches Lemma? Zunächst sollten die Aussage (und der Beweis) vollkommen transparent sein: Das Komplexe wird einfach und folgerichtig, und man weiß: That's it! Auch ein akuter Anfall des Livor academicus (einer besonders häufigen Form des gemeinen Neides) ist denkbar: Warum habe ich das nicht gesehen? Zweitens sollte der Satz stringent sein (oder im mathematischen Jargon: tief). Der Beweis zeigt auf, worauf es wirklich ankommt; er hat vielfältige Anwendungen, sogar auf Probleme, die nichts miteinander zu tun zu haben scheinen. Und schließlich sollte ein Moment der Leichtigkeit vorliegen. Jeder Wissenschaftler hat einen Sack voll Methoden, den er immer wieder öffnet (von manchen, auch prominenten, heißt es, sie hätten mit nur einer Idee ganze Disziplinen beherrscht). Aber es gibt diese Ausnahmekönner, die ein Problem der Algebra mit Methoden der Topologie lösen und umgekehrt, die uns zeigen, dass die Mathematik in all ihrer Vielfalt eine wunderbare Einheit bildet, die uns die Leichtigkeit des Denkens für einen Augenblick erahnen lässt. Transparenz, Stringenz und Leichtigkeit bilden also den Dreiklang eines eleganten Beweises.

Als 1976 das berühmte und seit 100 Jahren offene Vier-Farben-Problem mit enormem Computereinsatz gelöst wurde, zog dies eine bis heute andauernde Kontroverse nach sich: Ist solch ein Beweis akzeptabel? Ein computergestützter Beweis derartiger Länge ist für den, der nicht über ähnliche Rechnerkapazität verfügt, nicht nachzuprüfen. Er ist, überspitzt formuliert, mehr eine Glaubenssache als ein mathematisches Faktum. Solche Einwände sind heute, auch aufgrund gestiegener Rechenleistung, nicht wirklich relevant. Der Computer macht nichts anderes als die Mathematiker mit Bleistift und Papier: Er geht Schritt für Schritt voran, bis das Resultat vorliegt. Aber das ist genau der springende Punkt: Ein Computer-Beweis ist weder transparent noch von Leichtigkeit beseelt, aber vor allem lehrt er uns nichts. Er zerhackt das Problem in endlich viele Einzelfälle und schließt dann einen Fall nach dem anderen aus, kurz: Er erschlägt den Satz, statt ihn zu erklären.

Der Physiker Eugene Wigner wird oft mit dem Wort von der »unreasonable effectiveness of mathematics« zitiert. Bescheidener drückt dies Erwin Schrödinger aus: »Ob die Natur nach mathematischen Gesetzen funktioniert, wissen wir nicht, aber wir haben vorläufig nichts Besseres.« Ich möchte Wigners Bonmot mit dem Satz von der ›unreasonable beauty of mathematics‹ ergänzen. »Die schöne Formel ist oft nahe an der wahren Natur,

und der elegante Beweis ist oft auch derjenige, der uns den größten Erkenntnisgewinn beschert.«

Vom Unendlichen …

Nun ist es aber an der Zeit, ein paar Beispiele solch eleganter Beweise zu präsentieren. Der Klassiker schlechthin ist Euklids Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen. Eine Primzahl ist bekanntlich eine Zahl größer als 1, die nur durch sich selbst und 1 teilbar ist. Jeder kennt die ersten Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, und heute kann man Primzahlen mit Millionen von Stellen konstruieren, aber auch die raffiniertesten Methoden liefern bis jetzt nur endlich viele. Gibt es vielleicht nur endlich viele? Nein, und der Beweis der Unendlichkeit, der Euklid zugeschrieben wird, ist von bestechender Einfachheit. Euklid argumentierte indirekt: Angenommen, es gäbe nur endlich viele Primzahlen, nennen wir sie $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Dann bilden wir die neue Zahl $M = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_k + 1$. M hat einen Primteiler p, und dieser Teiler muss nach unserer Annahme unter den p_i vorkommen. Damit teilt p die Zahl M, das Produkt $p_1 \times \ldots \times p_k$, also auch die Differenz 1. Die Zahl 1 hat aber keine Primteiler! – Widerspruch und Ende des Beweises.

Es gibt Dutzende weiterer amüsanter und lehrreicher Beweise für diesen Satz, aber der euklidische ist ein Muster an Transparenz und Leichtigkeit, und er arbeitet auch die Gründe für die Unendlichkeit heraus. Sieht man sich die Argumentation genau an, so erkennt man, dass sie auf zwei Tatsachen beruht: Es gibt unendlich viele Zahlen, 1, 2, 3, 4, …, und jede Zahl größer als 1 besitzt einen Primteiler. Man kann also einen analogen Schluss auf jedes algebraische System anwenden, das denselben Bedingungen genügt.

Thomas von Randow alias Zweistein, der jahrzehntelang die Wissenschaftsredaktion der *Zeit* leitete, brachte einmal in einer Augustnummer den Beweis von Euklid und resümierte ihn kurz: So viele Primzahlen ich auch habe, es gibt stets noch eine weitere, also unendlich viele. Wie immer erhielt er eine Anzahl von Zuschriften, darunter auch von einer Hausfrau in Bayern, die ihm schrieb: »Sehr geehrter Herr von Randow, ich sitze hier am Ammersee inmitten einer Heerschar von Mücken. So viele ich auch erschlage, es gibt immer noch eine weitere, kann ich daher schließen …?« Ja, ein Journalist hat es auch nicht leicht.

Mit Unendlichkeiten ganz anderer Art befasste sich Georg Cantor, der Schöpfer der Mengenlehre. Seine radikale Neubegründung der Mathematik wurde ebenso kompromisslos von vielen seiner Zeitgenossen abgelehnt, so dass der große David Hilbert ihm mit dem Ruf zu Hilfe eilen musste: »Niemand wird uns aus dem Paradies vertreiben, das Cantor für uns geschaffen hat!« Eine seiner größten Leistungen betraf die Frage: Wann sind zwei Mengen gleich groß? Für endliche Mengen bereitet dies natürlich kein Problem: Wir zählen sie einfach ab, und wenn dieselbe Anzahl herauskommt, dann (und nur dann) sind die Mengen gleich groß. Aber wie ist es mit unendlichen Mengen? Gibt es verschieden große Unendlichkeiten? Machen wir das folgende Gedankenexperiment: Nehmen wir an, einige Personen steigen in einen Bus; können wir feststellen, ob die Anzahl der Leute gleich jener der Sitze ist, ohne die Personen zu zählen? Natürlich geht das: Der Busfahrer ruft »Setzen«, und falls jede Person einen Sitz findet und kein Sitz frei bleibt, dann sind die beiden Mengen (der Leute und der Sitze) gleich groß. Mit anderen Worten, die beiden Mengen sind gleich groß, wenn es eine eindeutige Zuordnung oder, wie die Mathematiker sagen, eine Bijektion zwischen ihnen gibt.

Diese Idee übertrug Cantor nun auf ganz beliebige Mengen A und B: Sie sind gleich groß, wenn es eine Bijektion von A auf B gibt. Für endliche Mengen entspricht dies, wie gesehen, genau unserem gewohnten Zählbegriff, aber für unendliche Mengen wird Cantors Theorie sehr interessant und in hohem Maße nicht-intuitiv. Nehmen wir zum Beispiel die Menge $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ der natürlichen Zahlen. Wir nennen eine beliebige Menge A abzählbar, falls sie bijektiv auf N abgebildet werden kann, oder anders ausgedrückt, wenn die Elemente von A in der Form $a_1, a_2, a_3, \ldots$ durchnummeriert werden können. Aber jetzt passiert etwas Unerwartetes. Angenommen, wir geben zu A ein weiteres Element z hinzu. Dann ist A zusammen mit z immer noch abzählbar und daher gleich groß wie A, obwohl doch A in der Menge A plus z enthalten ist! Eine hübsche Illustration für dieses merkwürdige Phänomen ist ›Hilberts Hotel‹: Es hat abzählbar viele Zimmer mit den Nummern 1, 2, 3, 4 und so weiter, und es ist vollkommen ausgebucht. Nun kommt ein neuer Gast an und verlangt ein Zimmer, worauf der Hotelmanager sagt: Tut mir Leid, alle Zimmer sind belegt. Kein Problem, sagt der Gast: Bitten Sie doch den Gast aus Zimmer 1, in Zimmer 2 zu übersiedeln, den aus Zimmer 2 in Zimmer 3, und so fort – und dann nehme ich das frei gewordene Zimmer 1. Zur Überraschung des Managers (er ist des Unendlichen nicht so recht mächtig) funktioniert das: Er kann wieder alle Gäste unterbringen und den neuen Gast dazu.

… zum Unvollständigen

Verlassen wir ›Hilberts Hotel‹ und sehen wir uns ein paar vertraute Zahlbereiche an. Die Menge Z der ganzen Zahlen (positiv, negativ und 0) ist wieder abzählbar, da wir Z in der Form Z = {0, 1, -1, 2, -2, …} durchnummerieren können. Auch die Menge aller Brüche ist nach wie vor abzählbar. Und wie ist es mit den reellen Zahlen R? Hier konnte Cantor mit einer genialen Idee zeigen, dass R *nicht* mehr abzählbar ist. Wie schon Euklid argumentierte Cantor indirekt. Betrachten wir die reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Jede solche Zahl r ist ein nicht endender Dezimalbruch $r = 0{,}r_1r_2r_3\ldots$ so wie etwa $^1/_3 = 0{,}33333\ldots$ Angenommen, diese Zahlen könnten nummeriert werden, dann schreiben wir sie in einem Schema untereinander:

$$
\begin{aligned}
r_1 &= 0{,}\mathbf{r_{11}}r_{12}r_{13}\ldots\\
r_2 &= 0{,}r_{21}\mathbf{r_{22}}r_{23}\ldots\\
r_3 &= 0{,}r_{31}r_{32}\mathbf{r_{33}}\ldots
\end{aligned}
$$

Die ›Diagonale‹ des Schemas ist hervorgehoben, also die Zahlen r_{11}, r_{22}, r_{33} … Wir wählen nun für jeden Index n eine Kommastelle $b_n \neq 0$, welche verschieden von r_{nn} ist (offensichtlich ist dies möglich), und bilden $b = 0{,}b_1b_2b_3\ldots$ Da die Zahl b zwischen 0 und 1 liegt, muss sie in unserer Liste vorkommen und hat daher einen Index, sagen wir $b = r_k$. Aber das geht nicht, da $b_k \neq r_{kk}$ ist – und das ist der ganze Beweis!

Diese verblüffende Diagonalisierungsmethode von Cantor ist zu Recht in den Olymp der Mathematik aufgestiegen: Kürzer und eleganter geht es wirklich nicht! Und was die Stringenz betrifft, so führt sie uns bis an die Wurzeln der mathematischen Erkenntnis. Mit einer ganz ähnlichen Diagonalisierung bewies Kurt Gödel seinen Unvollständigkeitssatz, der von vielen als das bedeutendste mathematische Ergebnis des letzten Jahrhunderts angesehen wird. Dabei geht es um Folgendes: Gödel zeigte, dass es in jedem formalen System, in dem wir Schlüsse aufgrund unserer logischen Regeln ziehen, immer Sätze gibt, die innerhalb dieses Systems nicht bewiesen werden können. Und jetzt kommt die Pointe: Einer dieser Sätze ist die Widerspruchsfreiheit der Mathematik selbst! Wir werden niemals wissen, ob die Mathematik, wie wir sie betreiben, nicht einen Widerspruch in sich enthält und alles wie ein Kartenhaus zusammenstürzt.

Und wenn es denn so ist, dass die Mathematik eine pure Ausgeburt des Gehirns ist (es ist ja alles in der Mathematik erdacht), sie aber möglicherweise widerspruchsvoll ist, liegt da nicht der Rückschluss nahe, dass unser Gehirn vielleicht nicht ganz richtig verdrahtet ist oder dass es ganz anders funktionieren könnte und damit auch eine ganz andere Mathematik möglich und denkbar ist? Der Unvollständigkeitssatz ist sozusagen die Erbsünde der Mathematik. Wie Katholiken um die Erbsünde wissen (und sich nicht weiter darum kümmern), so wissen auch die Mathematiker um den schwankenden Grund, auf dem sie sich bewegen: Sie schreiben trotzdem ihre Bücher und beweisen ihre Sätze, immer in der Hoffnung, dass ihre Theoreme dereinst Eingang finden in das Paradies der ewigen Wahrheiten – und der eleganten Beweise.

Literatur
M. Aigner und G. M. Ziegler: Das Buch der Beweise. Berlin/Heidelberg/New York 2002
P. J. Davis und R. Hersh: Erfahrung Mathematik. Basel/Boston/Stuttgart 1985
J. Hadamard: The Psychology of Invention in the mathematical Field. Princeton 1945
G. H. Hardy: A Mathematician's Apology. Cambridge 1969
H. Poincaré: Letzte Gedanken. Leipzig 1913
B. Schechter: My Brain is open, the mathematical Journeys of Paul Erdös. Oxford 1998

Günter M. Ziegler

Wo Mathematik entsteht: Zehn Orte

Wo entsteht Mathematik? Im Kopf! Mathematik wird aus Ideen gemacht.

Wer Mathematiker und Mathematikerinnen nach dem Moment, dem Ort und dem Zeitpunkt fragt, ›wo die entscheidende Idee entstand‹, wird meist keine befriedigende Antwort bekommen. Mathematische Ideen entstehen nicht im Labor, nur selten planmäßig aufgrund intensiven Nachdenkens, sondern als Schritte und Sprünge entlang eines Weges, der sich ›durchs Leben zieht‹.

Zum Mathematik-Machen braucht man sehr wenig. Papier und Stift sind wohl die Standardausstattung (für mich etwa: Karopapier und ein Druckbleistift), aber Nachdenken geht im Kopf, Nachrechnen etwa im Laptop. Die Laborausstattung des Mathematikers ist also sehr bescheiden, und seine Labore sind transportabel. Deshalb ist der ›Ort, wo Mathematik entsteht‹, nicht durch Sachzwänge festgelegt; mathematische Ideen sind nicht durch ihre Produktionsmittel und Produktionsbedingungen lokalisierbar.

Wer als Mathematiker Ideen entwickeln will, muss sich frei machen von den Zwängen der Schreibtische. Er muss Zeit finden zum Nachdenken, muss Überlegungen nachhängen können, muss Ruhe und Muße haben, muss sich konzentrieren oder ausspannen. Er muss gedanklich auf die Reise gehen können. Dafür gibt es kein Erfolgsrezept. Mathematik ist vielfältig, und die Mathematiker sind vielfältig, auch wenn man weiter versucht, sie in grauhaarige Stereotypen mit dicker Brille zu pressen. Die Orte, an denen mathematische Ideen entstehen, spiegeln das wider. Wir machen deshalb einen Ausflug in die Vielfalt und nähern uns anekdotisch der Frage, wie und wo Mathematiker arbeiten, wie und wo ›Mathematik entsteht‹.

1) Am Schreibtisch

»Der Mathematiker ist ein mythologisches Wesen, halb Mensch, halb Stuhl.« So wird Simon Golin zitiert. Natürlich entsteht viel Mathematik am Schreibtisch, und oft ist ›die entscheidende Idee‹ einfach im Lauf einer langen Rechnung, einer Folge kleiner Skizzen, beim Ausarbeiten von Beispielen am Schreibtisch entstanden. ›Der Schreibtisch‹ markiert dabei einen Ort der Ruhe, der Konzentration ohne Ablenkung.

Der schwere, primitiv anmutende Labortisch, an dem Otto Hahn die Kernspaltung entdeckte, wird im Deutschen Museum in München ausgestellt. Das Arbeitszimmer von Thomas Mann kann man in Zürich im Original bestaunen. Ich weiß von keinem Mathematiker-Arbeitsplatz, der in einem Museum ausgestellt wird. Und vermutlich wird das auch in Zukunft nicht passieren – auch, weil die Schreibtische der Wissenschaftler wegen der Stapel von Forschungsantragsformularen für Exzellenzinitiativen nur noch eingeschränkt zum Forschen nutzbar sind.

Von Leonhard Euler (1707–1783) wird berichtet, dass er konzentriert und effektiv am Schreibtisch arbeiten und schreiben konnte, während seine vielen Kinder auf seinem Rücken herumturnten und zwischen seinen Beinen spielten. Euler, einer der produktivsten Mathematiker der Neuzeit, war offenbar ohnehin kaum abzulenken: Auch die Erblindung 1771 hat seine Produktivität nicht ernsthaft eingeschränkt; fast die Hälfte seiner Werke entstand danach.

2) Im Computer

Ein Computer kann keine Ideen haben und deshalb auch keine Mathematik machen. Aber es gibt Entdeckungen am Computer, im Computer, die ohne Computer nicht möglich wären. Zu diesen Entdeckungen zählt sicher das

E. Behrends, G.M. Ziegler, P. Gritzmann (Hrsg.), *Pi und Co.*, DOI 10.1007/978-3-662-48872-0_4

berühmte Apfelmännchen; die bemerkenswerten fraktalen Strukturen, die unter Iterationen entstehen, sind ohne Rechner (und Bildschirm) nicht zu sehen.

Aber auch tief in den Zahlen stecken Geheimnisse, die man ohne Computer nicht entdecken würde. Da ist zum Beispiel die Beobachtung, die ein gewisser Roy D. North in den siebziger Jahren in Kanada gemacht hat. Sie bezieht sich auf eine der schönsten Formeln der Mathematik – von Leonhard Euler, 1734: Wenn man die Inversen aller Quadratzahlen aufaddiert, also $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$, so erhält man laut Euler ein Sechstel von π^2. Dieses wunderbare, wichtige Ergebnis hat eine Vielzahl von brillanten Beweisen, Verallgemeinerungen und Anwendungen ermöglicht.

Die Euler-Summe ist eine *unendliche Reihe*, unendlich viele Terme sind aufzusummieren, und das Ergebnis ist eine *irrationale Zahl*, 1,64493406684822643647… Wenn man die Summe auf dem Computer bildet und diesen genau genug rechnen lässt, dann die Summe nach einer Million Terme abbricht, so erhält man die Summe auf fünf Stellen genau, 1,64493306684872643630… Dass die sechste Stelle falsch ist, muss hier nicht überraschen: Die unendliche Summe konvergiert eben nicht besonders gut. Dass aber die siebte, achte, neunte, zehnte, elfte und zwölfte Stelle alle wieder richtig sind, das ist überraschend! Dass die Fehler also ungefähr an sechster, zwölfter, achtzehnter usw. Stelle auftreten und die Größe der Fehler auch ganz systematisch ist, wobei die *Bernoulli-Zahlen* $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ 0,\ -\frac{1}{30},\ 0,\ \frac{1}{42}\ldots$ eine wichtige Rolle spielen, das ist ›von Hand‹ nicht zu errechnen oder ›mit dem bloßen Auge‹ nicht zu erkennen, auch nicht für meisterhafte Rechner wie Euler, Gauß und Riemann, sondern eben nur mit einem modernen Computer, dem hoch entwickelte Mathematik in Form von Software zur Verfügung steht. Als mathematisches Resultat *formulieren* und das *beweisen* muss der Mathematiker dann aber doch, letztlich mit Papier und Bleistift. Das haben die Brüder Borwein und Karl Dilcher als Erste getan.

3) Im Bett

Die Konstruktion des regelmäßigen Siebzehnecks durch den jungen Carl Friedrich Gauß (1777–1855) beschreibt er selbst in einem Brief (Gauß und Gerling, S. 187f.):

»Das Geschichtliche jener Entdeckung ist bisher nirgends von mir öffentlich erwähnt, ich kann es aber sehr genau angeben. Der Tag war der 29. März 1796, und der Zufall hatte gar keinen Anteil daran. […] Durch angestrengtes Nachdenken über den Zusammenhang aller Wurzeln untereinander nach arithmetischen Gründen glückte es mir, bei einem Ferienaufenthalt in Braunschweig am Morgen des gedachten Tages (ehe ich aus dem Bette aufgestanden war) diesen Zusammenhang auf das klarste anzuschauen, so daß ich die spezielle Anwendung auf das 17-Eck und die numerische Bestätigung auf der Stelle (sic!) machen konnte.«

G. H. Hardy berichtet über den indischen Mathematiker Ramanujan, »the most romantic figure in the recent history of mathematics«:

»Ramanujan used to say that the goddess of Namakkal inspired him with the formulae in his dreams. It is a remarkable fact that frequently, on rising from bed, he would note down results and rapidly verify them, though he was not always able to supply a rigorous proof.

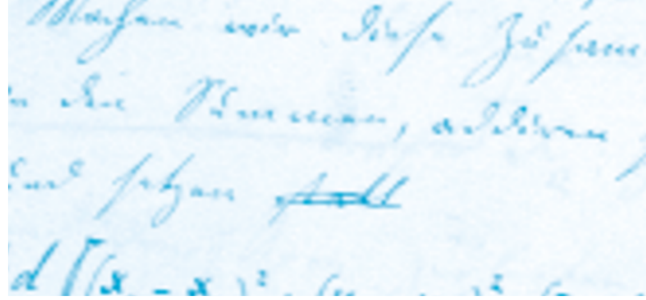
4) In der Kirche

Göttliche Inspiration ist vermutlich in kaum einer mathematischen Entdeckung nachweisbar. Aber warum soll nicht die feierliche Atmosphäre eines vatikanischen Gottesdienstes (inklusive der berauschenden Wirkung des Weihrauchs) zu Ideen führen?

»Es ist überliefert, dass Dirichlet den entscheidenden Gedanken zum Beweis des [Einheiten-]Satzes fand, während er die Ostermesse in der Sixtinischen Kapelle des Vatikans hörte. […] Für seine Arbeitsweise war es charakteristisch, dass er seine Überlegungen erst dann schriftlich formulierte, wenn er sie vollständig im Kopf durchdacht hatte«, schreibt Koch (S. 148) über Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), dessen 200. Geburtstag dieses Jahr gefeiert wurde.

5) In Gefangenschaft

Jean Leray (1906–1998) entwickelte seine tiefsten und wichtigsten Erkenntnisse, fundamentale Beiträge zur modernen algebraischen Topologie wie die Spektralsequenzen und die Theorie der Garben, im Kriegsgefangenenlager Edelbach in Österreich. Der napoleonische Offizier Jean-Viktor Poncelet entwickelte die projektive Geometrie in fünf Jahren russischer Kriegsgefangen-



schaft. »Nothing is more favourable than prison for the abstract sciences«, schrieb André Weil – in deutscher Kriegsgefangenschaft.

6) Die Kaffeemaschine

Der legendäre ungarische Mathematiker Paul Erdös (1913–1996) liefert vielfältige Aspekte und Anekdoten zur Entstehung mathematischer Ideen. Jahrzehntelang reiste Erdös ohne feste Stelle und ohne festen Wohnsitz um die Welt, zu Gast bei Freunden und Bekannten. Erdös' alter Reisekoffer, der seinen gesamten Besitz enthielt, war 2003 im Museum ausgestellt, in der Ausstellung ›10+5=GOTT‹ des Jüdischen Museums Berlin.

Wenn Erdös angekommen war auf dem Sofa im Wohnzimmer, eine Kaffeetasse in der Hand, fiel oft der Satz »My mind is open«: Mit dem Sofa und dem Kaffee waren die Voraussetzungen für Gespräche über Mathematik erfüllt. Dann können auch die Ideen kommen.

Erdös sagte: »A mathematician is a machine that converts coffee into theorems.« Meiner Erfahrung nach gibt es dabei keine Korrelation in der Qualität. Am Mathematik-Department des MIT wurde in den achtziger Jahren miserabler Kaffee in (teilweise) exzellente Mathematik überführt. Und in Berkeley wird auch immer noch zu viel »vanilla decaf low-fat cappuchino« konsumiert und trotzdem exzellente Mathematik gemacht. Erdös selbst brauchte Muntermacher und Schlaftabletten zusätzlich zum Koffein. Von einem Monat, den er (aufgrund einer Wette) ohne Tabletten durchhielt, sagte er: »It was a bad month for mathematics«.

7) Am Strand

Natürlich kann man als Mathematiker am Strand arbeiten, und Mathematiker tun das – gern und mit legendärem Erfolg. Stephen Smale berichtet über die Umstände seiner Arbeit 1960 in Rio de Janeiro:

»In a typical afternoon I would take a bus to IMPA and soon be discussing topology with Elon, dynamics with Mauricio or be browsing in the library. Mathematics research typically doesn't require much, the most important ingredients being a pad of paper and a ballpoint pen. In addition, some kind of library resources, and colleagues to query are helpful. I was satisfied.

Especially enjoyable were the times spent on the beach. My work was mostly scribbling down ideas and trying to see how arguments could be put together. Also I would sketch crude diagrams of geometric objects flowing through space, and try to link the pictures with formal deductions. Deeply involved in this kind of thinking and writing on a pad of paper, the distractions of the beach didn't bother me, moreover, one could take time off from the research to swim.«

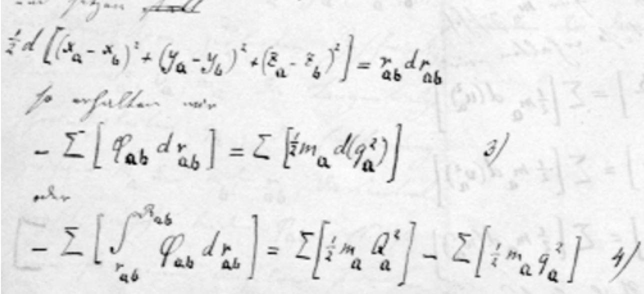
Smale wurde berühmt für seine Arbeiten aus Rio, darunter der Beweis der Poincaré-Vermutung für Dimensionen $n > 4$, und wichtige Einsichten zur Theorie der dynamischen Systeme. Die Behauptung »I did some of my best work on the beaches of Rio« hat Smale aber massiven Ärger eingebracht: Als man ihn wegen seines Engagements gegen den Vietnamkrieg angreifen wollte, wurde ihm das Arbeiten »on the beaches of Rio« vom Wissenschaftsberater des US-Präsidenten als Verschwendung von Steuergeldern vorgeworfen.

Das Arbeiten am Strand führt auch heute noch zu kuriosen Kontroversen. Die folgende Passage (Grötschel, S. 358) aus einer Festrede von Claude Berge wollte der Verlag zensieren, weil die Redakteurin die Passage für frauen-diskriminierend hielt:

»One may bump into Manfred here, there, everywhere, Berlin, Bonn, Lausanne, New York, Tampa, Hawaii, Grenoble, Paris, but do not interpret his work on the Traveling Salesman Problem in the context of his own peregrinations. If you meet him on the beach of Saint-Tropez, he will be very likeley working on a portable, without a look to the sea or to a group of attractive ladies! My personal opinion is that Manfred Padberg is a perfect specimen of a new type of man, one who prefers spending his time in front of a computer. Maybe after *Homo Erectus, Neanderthals, Cro-Magnons, Homo Sapiens*, we are confronting a new breed of *Homo Mathematicus*?«

8) Paradiese für Mathematiker

Für viele Mathematiker ist die perfekte Arbeitsumgebung ein Ort wie das Mathematische Forschungsinstitut Oberwolfach im Schwarzwald, an dessen Eingangstür ein Amerikaner einmal die Ankommenden mit den Worten »Welcome to mathematicians' paradise« begrüßt haben soll.



Das Forschungs- und Tagungszentrum Oberwolfach liegt recht abgelegen im Schwarzwald. Es gibt dort Ruhe, gutes Essen, eine hervorragende Bibliothek, große Tafeln, einen Fotokopierer, Computer, mehrere Espressomaschinen, einen Billardtisch, einen Tischtennisraum, ein Musikzimmer, einen großen Weinkeller, lange Wanderwege und Kollegen aus aller Welt. Jede einzelne dieser Komponenten kann man je nach Geschmack und Stimmungslage exzessiv nutzen oder nicht, und vermutlich spielt fast jede eine bedeutende Rolle beim Entstehen von Ideen.

So existiert angeblich noch ein roter Tischtennisschläger aus Oberwolfach, auf dem Gerhard Frey (Essen) mit einem schwarzen Filzstift Günter Harder (Bonn) begeistert seine Idee erklärt hat, die den Ausgangspunkt zum Beweis der Fermat'schen Vermutung gebildet hat.

Im weiteren Gang der Geschichte spielt dann doch wieder ein Café eine wichtige Rolle, das Caffè Strada in Berkeley, wo ein junger Amerikaner, Ken Ribet, den nächsten wichtigen Schritt schaffte.

9) Ein Dachzimmer in Princeton

Der Beweis der Fermat'schen Vermutung durch Andrew Wiles – dass $x^n + y^n = z^n$ für $n > 2$ keine Lösung in positiven ganzen Zahlen hat – gehört zu den großen dramatischen Stoffen der modernen Wissenschaft. Dass einer sich sieben Jahre in ein Dachzimmer zurückzieht, um eines der ganz großen Probleme der Mathematik zu lösen, für die Lösung wie ein Held gefeiert wird, dass sich dann in der Lösung aber doch ein fataler Fehler findet, der Held sich noch einmal in sein Dachzimmer zurückzieht, den Fehler letztlich nicht korrigieren, aber mit einer neuen Idee umschiffen kann: Warum soll man das nicht mit antiken Heldentaten vergleichen?

Warum soll man sich wundern, dass eben nicht nur Homer ein Epos, sondern ein britischer Wissenschaftsjournalist einen Bestseller schreibt? Das Drama spielt nicht in einer griechischen Arena, sondern landet als Theaterstück und als Musical auf dem Broadway. Das sind eben die modernen Zeiten.

Darüber, wie und wo die entscheidenden Ideen entstanden, berichtet Andrew Wiles selbst (Singh, S. 257f., 297f.):

»Much of the time I would sit writing at my desk, but sometimes I could reduce the problem to something very specific – there's a clue, something that strikes me as strange, something just below the paper which I can't quite put my finger on. If there was one particular thing buzzing in my mind then I didn't need anything to write with or any desk to work at, so instead I would go for a walk down by the lake. When I'm walking I find I can concentrate my mind on one very particular aspect of a problem, focusing on it completely. I'd always have a pencil and paper ready, so if I had an idea I could sit down at a bench and start scribbling away.

I was sitting at my desk one Monday morning, 19 September, examining the Kolyvagin–Flach method. It wasn't that I believed I could make it work, but I thought that at least I could explain why it didn't work. I thought I was clutching at straws, but I wanted to reassure myself. Suddenly, totally unexpectedly, I had this incredible revelation. I realised that, although the Kolyvagin–Flach method wasn't working completely, it was all I needed to make my original Iwasawa theory work. […] It was so indescribably beautiful; it was so simple and so elegant. I couldn't understand how I'd missed it and I just stared at it in disbelief for twenty minutes. Then during the day I walked around the department, and I'd keep coming back to my desk looking to see if it was still there. It was still there. I couldn't contain myself, I was so excited. It was the most important moment of my working life. Nothing I ever do again will mean as much.«

10) Die Bibliothek

Viele der besten neuen mathematischen Ideen sind Verbindungen zwischen alten. Dafür muss man natürlich die alten Ideen kennen: Die altbekannten finden sich in der Bibliothek, die neuen bekannten kennen die Kollegen. Man muss dann nur die Dinge richtig zusammensetzen.

Von Richard P. Stanley, Professor für Mathematik am MIT, stammt eine kurze Schilderung seines Wegs zu einer Meisterleistung der modernen Geometrie, die ihn 1979 berühmt machte und der er auch seine Professur am MIT verdankt. Er erzählt, wie er dazu kam, den »harten Lefschetz-Satz für torische Varietäten« in Stellung zu bringen, um ein fundamentales Problem aus der Theorie der Polyeder zu lösen: den Beweis von »McMullen's *g*-Vermutung« für simpliziale Polytope. Diese Bedingungen hatte Peter McMullen 1971 in einem mutigen Geniestreich postuliert, aufgrund sehr wenig »experimenteller

Daten« (nicht, wie ein Gerücht besagte, von viel Bier inspiriert, sondern verkatert – sagt McMullen heute).

Stanleys Schilderung sei hier im entschärften Originalton wiedergegeben. Wir zitieren Stanley (S. 221), ersetzen dabei aber die spezielleren mathematischen Details durch Pünktchen:

»The following comments on how the proof of the necessity of the *g*-conjecture was found may be of interest. I had realized from my first work on the […] that the necessity of the *g*-conjecture would follow from […] In 1976, Toni Iarrobino brought the hard Lefschetz theorem to my attention. It was now apparent that one needed a smooth projective variety X whose […] I had been aware for some time of the theory of toroidal embeddings [24] and had checked this reference to see whether the variety $X(P)$ had the right properties. Three problems arose: (i) I could not understand [24] well enough […] (ii) […] (iii) […] There matters rested until the spring or summer of 1979, when I stumbled upon the paper of Danilov [10] on the new journal shelf of the MIT library. Remark 3.8 immediately caught my attention. It asserted that […] But in reading [10] more carefully it became apparent that Remark 3.8 was stated rather carelessly. One needs to assume […] I therefore asked some algebraic geometers whether […] but none knew. Shortly thereafter I took the book [22] out of the library in order to look at a paper related to a completely different topic in which I was interested. In browsing through this book I discovered the paper of Steenbrink [41], with its proof of the hard Lefschetz theorem for projective V-varieties. It remained only to ascertain that for convex polytopes the varieties $X(P)$ were projective. This was accomplished via a conversation with David Mumford on September 13, 1979, and the proof was complete.«

Keiner wusste damals, dass der Beweis von Steenbrink nicht richtig war – und damit auch die Argumentationskette von Stanley eine Lücke enthielt. Davon erfuhr Stanley erst viel später, als die Lücke (von M. Saito) schon endgültig geschlossen worden war.

Mathematik ist vielfältig, und die Mathematiker sind vielfältig. Wir haben hier zehn Orte besucht, ›wo Mathematik entsteht‹. Es gibt viele andere Orte. Keiner davon ist eine Bühne. Die meisten der ›Helden‹ sind (weitgehend) uneitel, und das Glück des Findens ist oft umgeben von der Banalität des Alltags. Ich habe ja deshalb auch absichtlich die Akteure im Originalton zitiert. Die Hagiografie mag später kommen.

Literatur

M. Aigner und G. M. Ziegler: Das BUCH der Beweise. Heidelberg 2004 (2. Auflage)

K. Barner: Der verlorene Brief des Gerhard Frey, *Mitteilungen der DMV* 2/2002, S. 38–44

J. M. Borwein, P. B. Borwein und K. Dilcher: Pi, Euler numbers, and asymptotic expansions, *Amer. Math. Monthly* 96, 1989, S. 681–687

G. P. Csicsery: N Is a Number. A portrait of Paul Erdös. Dokumentarfilm (57 Minuten), 1993

C. F. Gauß und Ch. L. Gerling: Briefwechsel, hg. von Clemens Schaefer. Berlin 1927

M. Grötschel (Hg.): The Sharpest Cut: The Impact of Manfred Padberg and His Work. Philadelphia 2004

G. H. Hardy: Ramanujan. Twelve Lectures on Subjects suggested by his life and work. Cambridge, MA. 1940

H. Koch: Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859). Zum 200. Geburtstag, *Mitteilungen der DMV* 3/2005, S. 144–149

P. McMullen: The numbers of faces of simplicial polytopes, *Israel J. Math.* 9, 1971, S. 559–570

A. M. Sigmund, P. Michor und K. Sigmund: Leray in Edelbach, *Mathematical Intelligencer* 2/2005, S. 41–50

S. Singh: Fermat's Last Theorem. London 1997

S. Smale: The Story of the Higher Dimensional Poincaré Conjecture (What Actually Happened on the Beaches of Rio), *Mathematical Intelligencer* 2/1990, S. 44–51

R. P. Stanley: The number of faces of simplicial polytopes and spheres, in: J. E. Goodman u. a. (Hg.): Discrete Geometry and Convexity. New York 1985, S. 212–223

✉ Warum Mathematik? 1

Liebe Meg,

wie Du wahrscheinlich schon geahnt hast, war ich sehr glücklich über Deine Absicht, Mathematik zu studieren, denn das bedeutet, dass all die Wochen nicht vergeudet sind, die Du vor ein paar Jahren damit zugebracht hast, immer wieder *Die Zeitfalte* zu lesen, und auch nicht all die Stunden, in denen ich versuchte, Dir Hyperwürfel und höhere Dimensionen zu erklären. Statt Deine Fragen in der Reihenfolge zu beantworten, in der Du sie gestellt hast, will ich zuerst auf die praxisnächste unter ihnen eingehen: Gibt es jemanden außer mir, der mit Mathematik seinen Lebensunterhalt verdienen kann?

Die Antwort wird viele überraschen. Meine Universität machte vor ein paar Jahren eine Umfrage unter ihren Absolventen und fand heraus, dass von all den verschiedenen Abschlüssen Mathematik zum höchsten Durchschnittseinkommen führte. Allerdings fand diese Umfrage vor der Gründung der neuen medizinischen Fakultät statt; dennoch zerstört sie einen Mythos – nämlich dass man mit Mathematik keinen gut bezahlten Job bekommt.

In Wahrheit begegnen wir Mathematikern überall und tagtäglich, aber wir nehmen diese Tatsache kaum wahr. Frühere Studenten von mir leiten heute Brauereien oder eigene Elektronikfirmen, sie entwerfen Autos, schreiben Computersoftware und handeln mit Futures am Aktien-

E. Behrends, G.M. Ziegler, P. Gritzmann (Hrsg.), *Pi und Co.*, DOI 10.1007/978-3-662-48872-0_5

markt. Es kommt uns einfach nicht in den Sinn, dass der Direktor unserer Bank ein Diplommathematiker sein könnte oder dass die Firmen, die DVDs oder MP3-Player erfinden oder herstellen, eine große Anzahl Mathematiker beschäftigen. Genauso wenig denken wir daran, dass die Technologie, die uns die fantastischen Bilder der Saturnmonde übermittelt, zu großen Teilen auf Mathematik beruht. Wir wissen, dass unser Arzt einen Abschluss in Medizin hat und unser Rechtsanwalt in Jura, denn beides sind spezifische, klar definierte Berufe, die auch eine spezifische Ausbildung erfordern. Aber Du wirst nirgendwo Messingschilder an Hauswänden finden, die für einen zugelassenen Mathematiker werben, der gegen eine hohe Gebühr jedes mathematische Problem löst, bei dem Du Hilfe benötigst.

Unsere Gesellschaft bedient sich einer beeindruckenden Menge Mathematik, doch dies geschieht hinter den Kulissen. Der Grund dafür ist einfach: Da gehört sie hin. Wenn Du Auto fährst, willst Du Dir keine Sorgen wegen all der komplizierten Mechanik machen, die es zum Laufen bringt. Du willst einfach einsteigen und losfahren. Natürlich bist Du eine bessere Fahrerin, wenn Dir die Grundlagen der Automechanik klar sind, aber unbedingt erforderlich ist das nicht. Gleiches gilt für die Mathematik. Du möchtest, dass Dir das Navigationssystem in deinem Auto den Weg weist, ohne dass Du selbst die Berechnungen anstellen musst. Du möchtest, dass Dein Telefon funktioniert, ohne dich in Signalverarbeitung und Fehlerkorrekturcodes einarbeiten zu müssen.

Aber es muss einige Menschen geben, die diese Mathematik beherrschen, denn sonst würde keines jener Wunderwerke funktionieren. Es wäre großartig, wenn der Rest der Menschheit sich bewusst machte, wie sehr wir in unserem täglichen Leben auf Mathematik angewiesen sind. Doch wenn man die Mathematik hinter den Kulissen