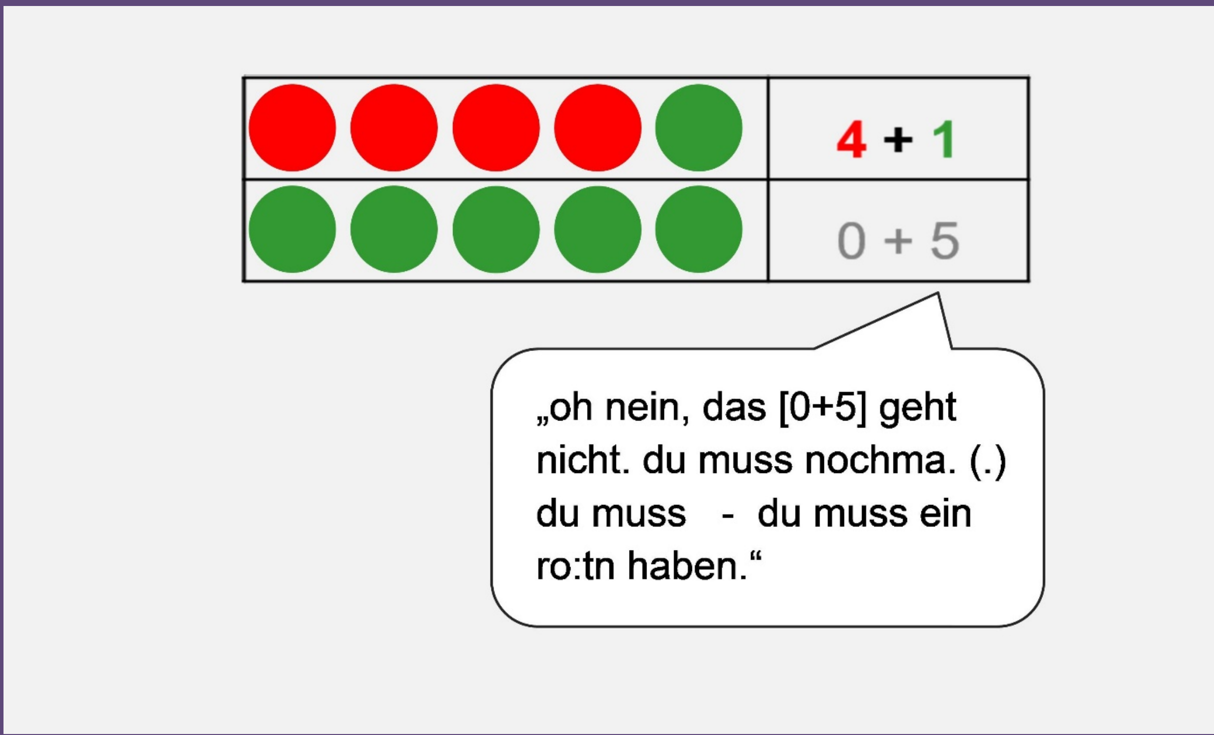
Nora Kühme



Bildungs- und Fachsprache im arithmetischen Anfangsunterricht

Eine empirische Untersuchung zu sprachlichen Ausdrucksformen in der Interaktion des arithmetischen Anfangsunterrichts

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Diversität und Inklusion im Kontext mathematischer Lehr-Lern-Prozesse 4

Diversität und Inklusion im Kontext mathematischer Lehr-Lern-Prozesse

Herausgegeben von
Ralf Benölken, Nina Berlinger und Marcel Veber

Band 4

NORA KÜHME

BILDUNGS- UND FACHSPRACHE IM ARITHMETISCHEN ANFANGSUNTERRICHT

EINE EMPIRISCHE UNTERSUCHUNG ZU SPRACHLICHEN AUSDRUCKSFORMEN IN DER INTERAKTION DES ARITHMETISCHEN ANFANGSUNTERRICHTS

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über http://dnb.de abrufbar

Druck durch:
winterwork
04451 Borsdorf
http://www.winterwork.de/

ISBN 978-3-95987-148-8
https://doi.org/10.37626/GA9783959871488.0

„Abstrakte Symbole, die nicht durch eigene Aktivität des Kindes mit Sinn gefüllt, sondern ihm von außen aufgeprägt werden, sind tote und nutzlose Symbole. Sie verwandeln den Lernstoff in Hieroglyphen, die etwas bedeuten könnten, wenn man nur den Schlüssel dazu hätte. Da aber der Schlüssel fehlt, ist der Stoff eine tote Last."

John Dewey

Inhaltsverzeichnis

Danksagung

Im Arbeitsprozess dieses Projekts haben mich zahlreiche Menschen begleitet, motiviert und bestärkt. Meinen höchsten Dank für die kontinuierliche, wertschätzende und konstruktive Begleitung während meiner Promotionszeit möchte ich Herrn Prof. Dr. Martin Stein aussprechen, der mich auf eine wunderbare Art durch diesen Weg geführt hat und mir stets Vertrauen geschenkt hat, dass ich diese Arbeit zu Ende bringen werde. Besonders hervorheben möchte ich in diesem Zusammenhang die vielfältigen Möglichkeiten und Kontakte, durch die ich mich im Rahmen meiner Arbeit weiterentwickeln konnte. Gerne denke ich an meinen Auslandsaufenthalt in England zurück, der von Prof. Dr. Hilary Povey begleitet wurde, der ich an dieser Stelle ebenfalls ganz herzlich danke.

Darüber hinaus danke ich Prof. Dr. Martin Stein für meine Zeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin in seiner Arbeitsgruppe, in der wir durch die vielfältige Arbeit zu einem weiterhin bestehenden Team zusammengewachsen sind. Die von Prof. Dr. Martin Stein initiierten DaZ-Treffen sind für uns alle inhaltlich sehr wertvoll und das gemeinsame Arbeiten bereitet viel Freude. Ein weiterer Dank geht in diesem Zusammenhang an die AG Stein für den inspirierenden, kontinuierlichen Austausch und die gemeinsamen produktiven Arbeitstage im Institut und in Bremen oder Billerbeck.

Den beiden Lehrkräften, die ich aus Gründen der Anonymität nicht namentlich erwähne, bin ich für ihre Aufgeschlossenheit bei den Videoaufnahmen sehr dankbar. Nur durch ihre Mitarbeit konnte ich diese Arbeit schreiben. Abschließend möchte ich auch den Studierenden für das Mitwirken im Rahmen ihrer Masterarbeit danken.

Münster, im Juli 2019 Nora Kühme

Abkürzungsverzeichnis

BICS	Basic Interpersonal Communicative Skills
CALP	Cognitive/Academic Language Proficiency
GAT 2	Gesprächsanalytisches Transkriptionssystem 2
GT	Gruppentische
TA	Tandemarbeit
QDA	Computer-Assisted Qualitative Data Analysis
SK	Sitzkreis

1 Einleitung und Problemstellung

Im arithmetischen Anfangsunterricht wird die Zahlbegriffsentwicklung systematisch angebahnt und mathematische Operationen im Zahlenraum bis 20 werden erarbeitet. Die Schülerinnen und Schüler sammeln zunächst vielfältige Erfahrungen mit Arbeitsmitteln und erschließen bzw. konstruieren in der Unterrichtsinteraktion deren mathematische Bedeutung. Das eigene Handeln und das Verwenden unterschiedlicher Darstellungen sind dabei entscheidend für die Sinnkonstruktion. (vgl. Hasemann und Gasteiger 2014, S. 66f.) In diesem Abstraktionsprozess wird der Sprache eine besondere Rolle zugewiesen, da durch das Beschreiben und Benennen der Handlungen mathematische Einsichten erst verfügbar werden (vgl. Hasemann und Gasteiger 2014, S. 161).

Aktuelle Studien deuten auf einen engen Zusammenhang sprachlicher und fachlicher Leistungen und belegen, dass sprachlich geringe Fähigkeiten im bildungssprachlichen Register der Unterrichtssprache zu den Faktoren gehören, welche die Mathematikleistung am meisten beeinflussen (vgl. Prediger und Özdil 2011, S. 7). Vor allem Schülerinnen und Schüler mit Migrationshintergrund können im deutschen Bildungssystem aufgrund ihrer sprachlichen Voraussetzungen benachteiligt sein (vgl. Gogolin 2013, S. 8; Fürstenau und Lange 2011, S. 37). In den genannten Studien wird vor allem der *Zusammenhang* zwischen sprachlichen Fähigkeiten und mathematischer Leistung im Allgemeinen untersucht, weniger thematisiert wird dabei die Konstitution der Bildungs- und Fachsprache, wenn mit Schulbeginn die Schülerinnen und Schüler im institutionalisierten Rahmen *Schule* mit neuen Funktionen von Sprache (Schriftspracherwerb, mathematische Fachsprache) konfrontiert werden. Von dieser Problemstellung ausgehend sind sprachliche Prozesse im arithmetischen Anfangsunterricht Gegenstand der vorliegenden Untersuchung. Es wird aus einer funktional-linguistischen Perspektive der übergeordneten Frage nachgegangen, wie sich Bildungs- und Fachsprache konstituieren und wie innerhalb dessen sprachliche Ausdrucksformen in der Unterrichtsinteraktion im arithmetischen Anfangsunterricht gestaltet sind.

Ausgehend von didaktischen und inhaltlichen Grundlagen im mathematischen Anfangsunterricht wird anhand der mathematischen Begriffsbildung eine sozial-konstruktivistische Lerntheorie in den Vordergrund gestellt (vgl. 2.1). Anschließend wird die Sprache in der Schule aus einer funktional-linguistischen Perspektive beleuchtet, indem neben den Funktionen von Sprache auf die Registertheorie eingegangen wird. Anhand der situativen Bedingungen des Sprachgebrauchs wird die Definition einer lebensweltlichen Mehrsprachigkeit als theoretische Grundlage vorgestellt (vgl. 2.2).

Im Rahmen der gegenstandsbezogenen Theorie im dritten Kapitel wird das Zusammenwirken zwischen *Mathematik und Sprache* herausgearbeitet, indem einerseits auf die mathematische Fachsprache eingegangen und andererseits die Rolle der Sprache beim Mathematiklernen herausgestellt wird. Das Kapitel schließt mit einer Synthese der theoretischen Grundlagen, anhand der die Perspektive auf den Untersuchungsgegenstand hergleitet wird und die Überleitung zum aktuellen Forschungsstand (vgl. Kapitel 4) erfolgt.

Anhand der methodologischen Konzeption werden im fünften Kapitel der allgemeine Aufbau der Untersuchung und die konkreten Analysemethoden im Hinblick auf das Erkenntnisinteresse und unter Berücksichtigung der theoretischen Perspektive auf den Anfangsunterricht erläutert und begründet. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Verknüpfung einer kodierenden und interpretativen Auswertung des videographierten Anfangsunterrichts. Durch den Einbezug unterschiedlicher Daten und Auswertungsmethoden (Triangulation) wird eine Multiperspektivität auf den Untersuchungsgegenstand erzeugt, mit der die Komplexität der sozialen Interaktionen aufgegriffen werden soll.

In der empirischen Untersuchung werden in einer Vorstudie mithilfe teilnehmender Beobachtungen Organisationsformen im mathematischen Anfangsunterricht herausgearbeitet (vgl. Kapitel 7.1). Ausgehend von den Ergebnissen (Gespräche im Sitzkreis und Arbeitsphasen in Tandem- oder Einzelarbeit am Gruppentisch) wird ein Konzept zur Erhebung der Videodaten in der Hauptstudie erarbeitet. Das Datenmaterial der Hauptstudie umfasst Videographien aus dem ersten Halbjahr des arithmetischen Anfangsunterrichts. In den aufgezeichneten Stunden werden zentrale Themenbereiche zur Zahlbegriffsentwicklung aufgegriffen. Die Unterrichtsvideographien werden mit dem Ziel ausgewertet, Thesen zur Konstitution der Bildungs- und Fachsprache im arithmetischen Anfangsunterricht zu entwickeln. Dazu werden in einem ersten Analyseschritt die Unterrichtstranskripte der Sitzkreisgespräche in Anlehnung an die qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring (2010) ausgewertet (vgl. Kapitel 8.1). Auf Grundlage des Kategoriensystems werden anschließend Unterrichtssequenzen für die interpretative Analyse ausgewählt. Ziel dieser zweiten Ebene ist das Erarbeiten prototypischer Sprachhandlungen, die aus einer funktionalen Perspektive innerhalb der Interaktion gedeutet werden (vgl. Kapitel 8.2). Im Hinblick auf die Forschungsfragen werden die Ergebnisse triangulierend unter Einbezug weiterer Daten (Interviews, Produkte der Schülerinnen und Schüler) im fortwährenden Vergleich verdichtet und thesenartig zusammengeführt (vgl. Kapitel 8.3 bis 8.5).

Im abschließenden Fazit werden die Ergebnisse mit Bezug zu den theoretischen Grundlagen diskutiert (vgl. 9.1). Es werden anschließend Gestaltungsmöglichkeiten für den Anfangsunterricht aus einer funktionalen Perspektive abgeleitet (vgl. 9.2).

In diesem Zusammenhang wird der Bezug zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen der Bildungsstandards für den Primarbereich hergestellt (vgl. KMK 2005). In der abschließenden Reflexion werden die Grenzen der Untersuchung aufgezeigt und es wird ein Ausblick auf mögliche Anschlussstudien gegeben (vgl. Kapitel 10).

2 Theoretische Grundlagen

Zur theoretischen Klärung werden aufbauend auf der didaktischen Gestaltung des Anfangsunterrichts zentrale Themen der Arithmetik abgegrenzt und der Blick auf den Erwerb arithmetischer Kompetenzen herausgestellt (vgl. Kapitel 2.1). In diesem Zusammenhang werden zunächst Inhalte und Kompetenzen in Anlehnung an die Bildungsstandards erläutert (vgl. Kapitel 2.1.2) und weiterhin auf die Entwicklung mathematischer Kompetenzen eingegangen (vgl. Kapitel 2.1.3). Abschließend wird die Bedeutung von Arbeitsmitteln im mathematischen Anfangsunterricht herausgearbeitet (vgl. Kapitel 2.1.4). In Kapitel 2.2 wird anschließend die Sprache in der Schule aus einer funktionalen Perspektive mit Bezug zu der Theorie der Sprachregister beleuchtet.

2.1 Arithmetischer Anfangsunterricht

Im *Anfangsunterricht* sammeln die Kinder das erste Mal Erfahrungen mit dem schulischen Lernen (vgl. Hanke 2007, S. 433; Hacker 2014, S. 433). Spezifisch für den Anfangsunterricht ist der erste Kontakt der Schülerinnen und Schüler mit dem Lernen im institutionalisierten Kontext, weshalb einige Autoren die Bedeutung der ersten Schulwochen betonen (vgl. Hellmich 2010, S. 11). Im Hinblick auf die zeitliche Abgrenzung werden von Hacker et al. (2008) insbesondere die ersten Schulwochen als zentrales Moment im Anfangsunterricht hervorgehoben (vgl. Hacker et al. 2008, S. 134). Hellmich (2010) definiert hingegen den Anfangsunterricht als Phase des Lehrens und Lernens in den ersten beiden Schuljahren (vgl. Hellmich 2010, S. 11).

Die Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler gehören zu den Herausforderungen und Chancen im Anfangsunterricht. Die Unterschiede der Schülerinnen und Schüler können dabei auf individuelle Entwicklungsprozesse oder auf Bedingungen des Aufwachsens zurückzuführen sein, die sich unter anderem auf sprachliche, kognitive oder kulturelle Aspekte beziehen. (vgl. Hellmich 2010, S. 136) Die Heterogenität hinsichtlich der Vorerfahrungen ist im Anfangsunterricht besonders zu berücksichtigen, indem individuelle Vorkenntnisse konstruktiv für den Lernprozess genutzt werden (vgl. Hanke 2007, S. 21–23). Die Lehr-Lernsituationen im Anfangsunterricht sind von der Lehrkraft so zu gestalten, dass individuelle Lernprozesse ermöglicht werden (vgl. Hellmich 2010, S. 44). Vor diesem Hintergrund werden vor allem offene Lehr-Lernumgebungen wie beispielsweise die Wochenplanarbeit und damit natürliche Differenzierungen genutzt (vgl. Hellmich 2010, S. 46). Im Gegensatz zur methodischen Öffnung basiert die natürliche Differenzierung auf einer Öffnung vom Fach aus, bei der Lernangebote eine niedrige Eingangsschwelle haben und grundlegende Fähigkeiten sichern, darüber hinaus aber durch den mathematischen Gehalt weitere Möglichkeiten zur Vertiefung bereithalten (vgl. Wittmann 2010, S. 63).

Durch die (nicht verpflichtende) Einführung einer flexiblen Schuleingangsstufe soll beispielsweise eine Möglichkeit geschaffen werden, derartige individuelle Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler auf der organisatorischen Ebene zu berücksichtigen. Je nach Lern- und Leistungsentwicklung können die Kinder im Modell der integrierten Schuleingangsphase in einem oder in bis zu drei Jahren die Schuleingangsphase durchlaufen. (vgl. Hellmich 2010, S. 48f.)

2.1.1 Didaktische Gestaltung und lerntheoretische Ansätze

Die didaktische Gestaltung des Anfangsunterrichts basiert auf der Annahme, dass Lernen ein aktiver, individueller Prozess der Wissenskonstruktion ist, der sich durch soziale Interaktionen konstituiert (vgl. Schipper 2011, S. 33). In diesem sozialkonstruktivistischen Ansatz, der auch bei der Gestaltung des mathematischen Anfangsunterrichts Anwendung findet, wird berücksichtigt, dass Lernen durch die Integration neuer Inhalte in bestehende Wissensstrukturen erfolgt (vgl. Hanke 2007, S. 39).

> Im Anfangsunterricht werden „[…] erste fachliche Wissensstrukturen, Fähigkeiten und Fertigkeiten angebahnt, wobei […] an das Vorwissen und die Basiskompetenzen[1] der Schülerinnen und Schüler angeknüpft wird und für die Kinder verständliche Sachsituationen als Ausgangspunkte […] für das Lehren und Lernen gewählt werden.“ (Hellmich 2010, S. 29)

Der *Sozialkonstruktivismus* ist ein pädagogisch-psychologischer Ansatz, der seit den 1980er Jahren weit verbreitet ist. Lernen wird in diesem Zusammenhang anhand von drei Charakteristika definiert. Mit dem Merkmal *Situiertheit* wird beschrieben, dass Lernen in spezifischen Kontexten stattfindet und mit diesem verbunden bleibt. Es handelt sich dabei immer um einen *sozialen Kontext*. Zuletzt ist Lernen ein *konstruktiver Prozess*, bei dem das Individuum anhand der gegebenen Informationen das eigene Wissen konstruiert. Mit diesem sozialkonstruktivistischen Ansatz wird betont, dass Wissen als Werkzeug zu verstehen ist. Es kann nicht kontextunabhängig vermittelt werden, sondern es entsteht in Handlungen und durch soziale Prozesse. (vgl. Schnotz 2009, S. 52)

---

[1] Zu den mathematischen Basiskompetenzen gehören alle Fähigkeiten, die für das Mathematiklernen grundlegend und bereits in der Vorschule im Alltag nutzbar sind. Es sind nicht nur Fähigkeiten, die auf den mathematischen Anfangsunterricht vorbereiten, sondern die zentrale Voraussetzung zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen sind (vgl. Höntges et al. 2009, S. 388). „Mathematische Basiskompetenzen stellen vielmehr integrale Bestandteile eines Mathematikcurriculums über verschiedene Stufen der Entwicklung von Kindern dar.“ (Höntges et al. 2009, S. 388).

Neben diesem konstruktivistischen Blick auf Lehr-Lernsituationen wird durch Einbezug einer interaktionistischen Lerntheorie die Wechselwirkung zwischen dem sozialen Gefüge und der individuellen Wissensvernetzung in den Vordergrund gestellt (vgl. Krummheuer 1991, S. 58; Schnotz 2009, S. 52).

Bei der für die Mathematikdidaktik zentralen, *interaktionistischen Perspektive* auf Lernprozesse wird die Wirklichkeitskonstruktion jedes Menschen hervorgehoben. Dies erfolgt über individuelle Deutungen und Interpretationen in der sozialen Interaktion mit anderen Personen. In der Theorie des Interaktionismus wird hervorgehoben, dass Menschen jeder Situation einen individuellen Sinn zuschreiben. Für das Lernen bedeutet dies, dass insbesondere die sozialen Bedingungen den Lernprozess beeinflussen. (vgl. Krummheuer 1991, S. 58) Diese sozialen Aspekte des Lehrens und Lernens wurden bereits in den 70er Jahren in die allgemeine Pädagogik und anschließend auch in die Mathematikdidaktik aufgenommen (vgl. Bauersfeld 2000, S. 121f.).

Der vorgestellte allgemeinpädagogische Ansatz und die auf die Mathematikdidaktik bezogene Lerntheorie, in denen die Wechselwirkung zwischen Individuum und sozialer Interaktion betont wird, wird als Grundlage in der vorliegenden Arbeit verwendet. Während im sozialkonstruktivistischen Ansatz die individuellen Lernprozesse im Vordergrund stehen, werden in der Theorie des Interaktionismus hingegen die Bedingungen des Lernens fokussiert. Primär geht es in beiden Fällen um ein permanentes sinnstiftendes Interpretieren der Situationen einer sozialen Interaktion.

Basierend auf den Voraussetzungen und der didaktischen Gestaltung im Allgemeinen werden Lehr- und Lernsituationen im Anfangsunterricht so gestaltet, dass Phasen der Instruktion und der Konstruktion genutzt werden. Der Unterricht wird durch unterschiedliche Unterrichtsformen mit dem Ziel strukturiert, individuelle Lernprozesse zu gestalten. Eine besondere Herausforderung für die Lehrkraft ist dabei, die Lernprozesse ausgehend von dem individuellen Kenntnisstand offen aufzubauen und dennoch wesentlich zu strukturieren. (vgl. Hellmich 2010, S. 143f.)

2.1.2 Kompetenzentwicklung und arithmetische Inhalte

Die Entwicklung mathematischer Fähigkeiten knüpft im Anfangsunterricht an die Kompetenzen der Lernenden an, die bereits in der vorschulischen Bildung und durch die häusliche Vorbildung erworben wurden, denen zunehmend eine wichtige Rolle zugeschrieben wird (vgl. Schneider et al. 2016, S. 98).

Fuson (1988) zufolge verfügen Kinder bereits ab einem Alter von drei Jahren über Zählkompetenzen, die weiter als bis zur Zahl Drei reichen. Die meisten viereinhalbjährigen Kinder können Anzahlen bis zu einer Menge von 20

Objekten bestimmen. Vier- und Fünfjährige können darüber hinaus bereits Additionen und Subtraktionen mit Kardinalzahlen durchführen. (vgl. Fuson 1988, S. 27f.)

Mit Schulbeginn können bereits fast alle Kinder die Zahlwortreihe bis Zehn aufsagen. Wiederum knapp die Hälfte kann mindestens bis 29 zählen. Das Lesen der Ziffern von 0 bis 9 beherrschen ebenfalls fast alle Kinder und im Durchschnitt können die Schülerinnen und Schüler fünf bis sechs Ziffern schreiben. Zur Anzahlbestimmung greifen die Kinder auf Strategien zum Zählen mit den Augen zurück oder erzeugen durch Berühren/Wegnehmen der Elemente eine Eins-zu-Eins-Zuordnung. (vgl. Padberg 1991, S. 33f.)

Von Krajewski (2016) wurde ein Entwicklungsmodell zur Zahl-Größen-Verknüpfung erstellt, mit dem in Form von sogenannten Meilensteilen die zunehmende Verknüpfung zwischen Zahlwörtern und Mengen beschrieben wird. Die erste Kompetenzebene umfasst *Zahlwörter und Ziffern ohne Mengen- oder Größenbezug*, auf der Kinder Mengen- oder Größenunterschiede wahrnehmen und Zahlwörter aufsagen, aber noch keine Beziehungen zueinander erkennen können. Das Verknüpfen von Zahlwörtern und Ziffern mit ihren entsprechenden Mengen oder Größen wird der zweiten Kompetenzstufe zugeordnet. Diese *Mengen- oder Größenbewusstheit von Zahlen* beginnt ungefähr ab dem zweiten Lebensjahr. Auf ein unpräzises Anzahlkonzept, bei dem eine große Zuordnung zwischen Zahlwörtern und Mengen vorgenommen wird, folgt eine präzise Anzahlbestimmung. Das Verstehen der Mengeninvarianz wird ebenfalls dieser Stufe zugeordnet. Auf der dritten Kompetenzebene werden Zahlwörter und Ziffern mit Mengen- bzw. Größenrelationen verbunden. Das Verständnis von Beziehungen zwischen Zahlen bezieht sich dabei auf das Zusammensetzen und Zerlegen von Zahlen sowie auf die Beschreibung von Differenzen zwischen Zahlen mithilfe einer dritten Zahl. Diese Kompetenzstufe erreichen Kinder in einem überschaubaren Zahlenraum ab vier Jahren, in der Regeln aber in einem Alter von sechs Jahren. (vgl. Schneider et al. 2016, S. 26–30)

Inhalte des arithmetischen Anfangsunterrichts

Zum Erwerb mathematischer Kompetenzen soll im Anfangsunterricht der Umgang mit Zahlen, Mengen und geometrischen Formen angebahnt werden (vgl. Hellmich 2010, S. 201). Nachfolgend steht der Inhaltsbereich der *Arithmetik* im Vordergrund der Erläuterungen, da auf diesen im weiteren Verlauf der Untersuchung Bezug genommen wird. Die Schülerinnen und Schüler sollen sich am Ende des ersten Schuljahres sicher im Zahlenraum bis 20 orientieren können (vgl. Hasemann und Gasteiger 2014, S. 77) und zu Beginn der Schulzeit lernen die Schülerinnen und Schüler den Zahlbereich der *natürlichen Zahlen* kennen.

Dabei werden sechs übergeordnete Zahlaspekte unterschieden. Mit dem *Kardinalzahlaspekt* wird die Mächtigkeit einer Menge, also die Anzahl der Elemente in dieser beschrieben. *Zählzahlen* als Folge der natürlichen Zahlen beim Zählen und *Ordnungszahlen* als Rangplatz eines Elements einer geordneten Reihe gehören zum *Ordinalzahlaspekt*. Größen, die immer in Relation zu einer Größe stehen, werden als *Maßzahlen* bezeichnet. Unter dem *Operatoraspekt* wird die Vielfachheit eines Vorgangs oder einer Tätigkeit zusammengefasst. Der *Rechenzahlaspekt* wird in den *algebraischen* und *algorithmischen* Aspekt der Rechenzahlen unterteilt. Der erste bezieht sich auf die natürlichen Zahlen mit der Verknüpfung der Addition als algebraische Struktur, der zweite hingegen auf das ziffernweise Rechnen, indem bestimmte Handlungsanweisungen aufeinander folgend durchgeführt werden. Der *Codierungsaspekt* dient dem Benennen und Beschreiben von Objekten, indem Ziffernfolgen beispielsweise zur Codierung einer Telefonnummer oder einer Postleitzahl benutzt werden. (vgl. Padberg 1991, S. 14f.)

Die Mengenerfassung ist ein zentraler Inhalt des arithmetischen Anfangsunterrichts zur Anbahnung der kardinalen Zahlvorstellung. Neben dem Zählen kommt der simultanen oder quasi-simultanen Anzahlbestimmung von Mengen eine besondere Bedeutung zu (vgl. Benz 2011, S. 7f.). Beim zählenden Erfassen einer Menge werden von Benz (2011) fünf Phasen unterschieden. Beim *verbalen Zählen* dient die Zahlwortreihe noch nicht dem Zählen. Das *asynchrone Zählen* kann zum Zählen führen, erfolgt aber nicht fehlerfrei. Beim *Ordnen der Objekte während des Zählens* wird das Gezählte zur Seite geschoben und richtig gezählt. Das *resultative Zählen* erfolgt auf der Wissensgrundlage, dass jedes Objekt genau einmal gezählt, mit der Eins begonnen wird und die letzte Zahl im Zählprozess für die Mächtigkeit der Menge steht. Weiterzählen, Zweierschritte und Rückwärtszählen werden der Phase des *abkürzenden Zählens* zugeordnet. Mit der *simultanen Anzahlerfassung* wird das Erkennen eines bestimmten Musters wie beispielsweise des Würfelbildes bezeichnet. Eine *quasi-simultane Erfassung* erfolgt, wenn einzelne Teilmengen simultan erfasst werden und die Anzahl durch eine mentale Repräsentation bestimmt wird. (vgl. Benz 2011, S. 7f.)

In den KMK-Bildungsstandards für die Primarstufe werden allgemeine mathematische und inhaltbezogene Kompetenzen beschrieben, die bis zum Ende der vierten Klasse von den Schülerinnen und Schülern erworben werden sollen. Beide beziehen sich auf das Können der Schülerinnen und Schüler am Ende der Primarstufe. Die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz sind bundesweit obligatorisch und werden auf Landesebene implementiert. (vgl. KMK 2005, S. 3) Allgemeine mathematische Kompetenzen zeigen sich in der Auseinandersetzung mit der Mathematik und werden von Schülerinnen und Schülern in eben diesen Situationen erworben. Zu diesen allgemeinen Kompetenzen gehören das *Argumentieren, Kommunizieren, Darstellen von Mathematik, Modellieren* und *Problemlösen* (vgl. KMK 2005, S. 7). Die inhaltsbezogen Kompetenzen können den Themenbereichen *Zahlen und Operationen*, *Größen und Messen*, *Raum und Form*, *Muster und Strukturen* sowie *Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten* zugeordnet werden (vgl. KMK 2005, S. 8).

In dem Inhaltsbereich *Zahlen und Operationen* werden drei Aspekte zusammengefasst. Das *Verstehen von Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen* bezieht sich beispielsweise auf den Umgang mit dem dezimalen Stellenwertsystem. Zu den *Rechenoperationen* gehören zum Beispiel Grundrechenarten, Kopfrechnen, halbschriftliche Verfahren und Rechengesetze. Mithilfe von *Sachaufgaben* wird hingegen thematisiert, in Kontexten zu rechnen. (vgl. KMK 2005, S. 9) Das Themenfeld *Muster und Strukturen* umfasst die Kompetenzen Erkennen, Beschreiben und Darstellen von Gesetzmäßigkeiten beispielsweise in geometrischen oder arithmetischen Mustern. Ebenfalls dazu gehört das Verstehen funktionaler Beziehungen, die in Sachsituationen erkannt und versprachlicht oder in Tabellen untersucht werden. (vgl. KMK 2005, S. 10f.) Die genannten Kompetenzen werden im mathematischen Anfangsunterricht angebahnt und im Rahmen der zugehörigen Themenbereiche im Laufe der Grundschulzeit vertieft.

2.1.3 Mathematische Begriffsbildung nach *Steinbring*

Spezifisch für das Mathematiklernen ist insbesondere, dass durch eine Reihe an Beispielen und Anwendungen eine abstrakte Bedeutung für Schülerinnen und Schüler erkennbar wird. Eine Handlung oder eine mathematische Operation wird zunächst in einer spezifischen Situation durchgeführt und erst durch die Anwendung in unterschiedlichen Handlungszusammenhängen kann ein Begriffsverständnis entstehen, welcher der mathematischen Bedeutung nahe ist. Der Prozess der Begriffsbildung ist dabei individuell und endet nicht. Durch jede neue Erfahrung wird der aufgebaute Begriff von den Schülerinnen und Schülern überprüft, revidiert und die Bedeutung ggf. erweitert. (vgl. Gallin und Ruf 1998, S. 157)

Auch Skemp (2003) zufolge entstehen mathematische Konzepte, also die Vorstellung über mathematische Zusammenhänge, durch Abstraktionsprozesse, deren Ausgangspunkt Vergleiche und Assoziationen sind, weil die zugrundeliegenden Strukturen nicht direkt kommuniziert werden können, sondern in den Gedanken der Schülerinnen und Schüler konstruiert werden müssen (vgl. Skemp 2003, S. 52f.). Durch das Anwenden mathematischer Handlungen in unterschiedlichen Kontexten können zugrundeliegende Beziehungen und Strukturen abstrahiert werden. Die Vorstellung mathematischer Begriffe entwickelt sich dabei stets weiter und ist an die Konstruktionsleistung des Subjekts gebunden. (vgl. Skemp 2003, S. 55f.)

Steinbring (2009b) beschreibt diesen Prozess der *mathematischen Begriffsbildung* anhand des epistemologischen Dreiecks, zu dem mathematische *Zeichen bzw. Symbole*, *Referenzkontexte* und das *begriffliche Wissen (Begriff)* gehören (vgl. Abbildung 1).

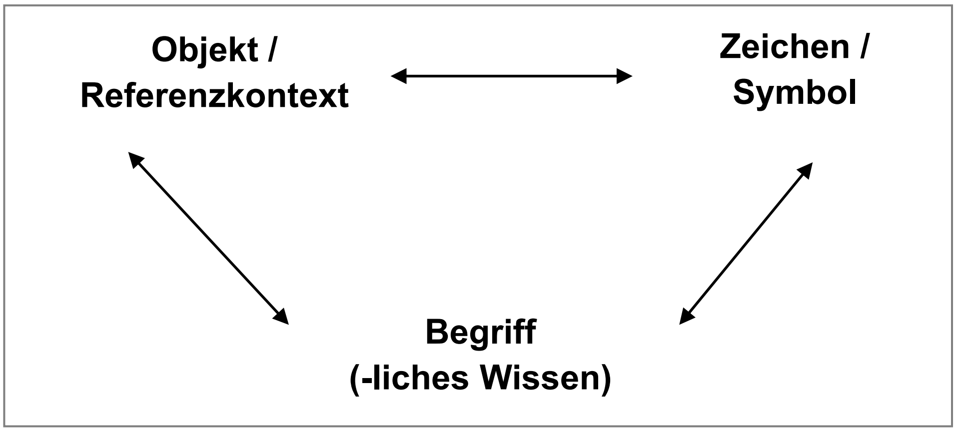


Abbildung 1: Epistemologisches Dreieck
Quelle: Steinbring 2009, S. 109

Mit mathematischen *Zeichen* und *Symbolen* wird das Wissen kodiert und repräsentiert. Zeichen sind dabei Objekte wie beispielsweise Buchstaben oder Zahlen, die auf eine bestimmte Funktion deuten. Charakteristisch für Symbole ist darüber hinaus, dass sie auf relationale Strukturen verweisen. Die Zahl 17,50 bei dem Betrag 17,50 Euro deutet beispielsweise auf die innermathematische Struktur des dezimalen Stellenwertsystems. Ein STOP-Zeichen hingegen ist ein Zeichen, dem im Straßenverkehr eine Bedeutung zugewiesen wurde, aber nicht im Sinne eines Symbols auf eine relationale Struktur verweist. (vgl. Steinbring 2009b, S. 21f.) Die Bedeutung der Zeichen und Symbole kann nur in Verbindung mit einem *Referenzkontext* konstruiert werden. Das interaktive Lernen von Mathematik kann in diesem Sinn als Wechsel-wirkung zwischen „Vergegenständlichung und Strukturbildung" (Steinbring 2013, S. 68) beschrieben werden. Durch diese wechselseitigen Beziehungen entwickelt sich das *begriffliche Wissen (Begriff)* über mathematische Strukturen (vgl. Steinbring 2009a, S. 109).

> „Die Beziehungen zwischen den Eckpunkten dieses Dreiecks bilden ein sich wechselweise stützendes und ausbalancierendes System. In der weiteren Entwicklung des Wissens werden durch den Lernenden dann die Deutungen der Zeichensysteme und der gewählten zugehörigen Referenzkontexte modifiziert bzw. verallgemeinert." (Steinbring 2009a, S. 109)

Ausgehend von dem Zusammenspiel zwischen Zeichen bzw. Symbolen und Referenzkontexten werden von dem Subjekt mathematische Einsichten konstruiert, die als Wissen bzw. begriffliches Wissen bezeichnet werden (vgl. Steinbring 2000, S. 34).

Maier und Schweiger (1999) betonen das Zusammenwirken zwischen konkreten Handlungen und abstraktem Verstehen.

> „Theoretische Begriffe bilden sich in einem Wechselspiel von Abstraktion, d. h. Ablösung von konkreten Einzelhandlungen und Erfassen des Begriffsinhalts, und Verallgemeinerung, d. h. Realisierung der Handlungen in anderen Situationen und Überblick über den Begriffsumfang. Dabei können Abstraktion und Verallgemeinerung wiederholt und auf verschiedenen Stufen mathematischer Theoriebildung ablaufen.“ (Maier und Schweiger 1999, S. 68)

Gefestigte Begriffe und Beziehungsstrukturen werden dann Ausgangspunkt der fortlaufenden Begriffsbildung, indem sie selbst zu Handlungsgegenständen werden (Maier und Schweiger 1999, S. 68).

In diesem Zusammenhang ist auch auf die Beschreibung der *Subjektiven Erfahrungsbereiche* (SEB) von Bauersfeld (1983) zu verweisen. Diese basieren auf einer „nicht-hierarchischen, kumulativen Speicherung der Erfahrungen beim Individuum“ (Bauersfeld 1983, S. 2) und umfassen die Gesamtheit der Erfahrungen. Das Aktivieren eines Subjektiven Erfahrungsbereichs deutet auf die subjektive Wahrnehmung einer Situation. Lernen kann in diesem Zusammenhang als Vernetzung und Erweiterung unterschiedlicher Subjektiver Erfahrungsbereiche gedeutet werden. (vgl. Bauersfeld 1983, S. 2)

> „Damit rücken auch Transfer-Probleme in ein anderes Licht, und gängige Begriffe wie Veranschaulichung im Mathematikunterricht oder Abstrahieren und Konkretisieren lassen sich anders interpretieren, nämlich als Beziehungs- und Verknüpfungsprobleme zwischen verschiedenen SEB’en.“ (Bauersfeld 1983, S. 2)

Vorstellungsbilder und Veranschaulichungsmittel

Im Anfangsunterricht ist das Anbahnen abstrakter Denkprozesse und damit einhergehend die mathematische Begriffsbildung eng an konkrete Handlungen und *Anschauungsmittel*[2] gebunden. Voigt (1994) betont, dass insbesondere im Anfangsunterricht die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit ihrer Umwelt den Ausgangspunkt von Lernprozessen bilden (vgl. Voigt 1994, S. 276).

[2] Lorenz (1993) spricht in diesem Zusammenhang auch von Veranschaulichungsmitteln bzw. -materialien. Eine detaillierte Abgrenzung erfolgt in Kapitel 2.1.4.

Lorenz (1993) beschreibt, dass Schülerinnen und Schüler im Anfangsunterricht durch Handlungen mit Veranschaulichungsmitteln eigene *Vorstellungsbilder* aufbauen und zunehmend mit diesen operieren können (vgl. Lorenz 1993, S. 132f.). Vorstellungsbilder sind subjektiv und deuten auf das Wissen einer Person. Eine derartige Repräsentation der Wirklichkeit kann durch zusätzliches Wissen verändert und der Aufbau wird durch Handlungen vollzogen werden.

Da der Wahrnehmungsprozess einer Veranschaulichung oder eines Anschauungsmittels selektiv verläuft, sind zum Aufbau eines mathematisch korrekten Vorstellungsbildes Fokussierungen notwendig. Zentral ist dabei, dass *Veranschaulichungsmittel* nicht selbsterklärend sind. (vgl. Lorenz 1992, S. 5f.) Im Gegensatz zu den Veranschaulichungsmitteln sind Vorstellungsbilder bereits einer gewissen Abstraktionsstufe zuzuordnen. Wenn Vorstellungsbilder strukturelle Merkmale enthalten, können sie für die Schülerinnen und Schüler von Nutzen sein. (vgl. Lorenz 1992, S. 80)

> Veranschaulichungsmittel können daher nicht mehr danach beurteilt werden, „inwieweit sie ein strukturelles Analogon mathematischer Beziehungen möglichst optimal darstellen, also einen Repräsentanten dieser Struktur abgeben, sondern sie gewinnen ihre Kraft erst durch den Bezug zu dem Konstruktionsvorgang des Schülers, der sie verwendet." (vgl. Lorenz 1992, S. 8)

In diesem Zusammenhang können Anschauungsmittel hinsichtlich ihrer mathematischen Funktion in zwei Klassen eingeteilt werden. Sie werden einerseits zur Unterstützung eingesetzt oder deuten andererseits auf Beziehungen und Strukturen. Durch die Darstellung bzw. Repräsentation kann eine mathematische Gesetzmäßigkeit erkannt werden, die aktiv in diese hineingedeutet werden muss. Die mathematische Begriffsbildung erfolgt dabei nicht direkt durch ein Anschauungsmittel, sondern ist an individuelle Deutungs- und Konstruktionsprozesse gebunden. Vor diesem Hintergrund sind Veranschaulichungs- bzw. Arbeitsmittel nicht als reine Hilfsmittel zu betrachten, sondern haben eine substanzielle Funktion beim Entdecken von Mustern und Strukturen innerhalb der Mathematik. (vgl. Söbbeke 2008, S. 39f.)

Auf die Struktur und Funktionen von Arbeitsmitteln wird daher im folgenden Abschnitt eingegangen. Muggelsteine, Wendeplättchen, Zahlenhäuser und das Dienes Material werden vertiefend erläutert, da dieser theoretische Kontext in der Analyse der Videographien aufgegriffen wird.

2.1.4 Arbeitsmittel im Anfangsunterricht

Der Umgang mit Anschauungsmitteln zielt in der Grundschule darauf, die Funktion des konkreten Materials als Repräsentation mathematischer Strukturen wahrzunehmen. Die Rolle des Materials konstituiert sich entweder in einem vertrauten Kontext oder in der Deutung unbekannter Zeichen und Symbole. (vgl. Söbbeke 2008, S. 41f.) Bauersfeld (2000) hebt hervor, dass nicht die *Veranschaulichung* einen mathematischen Gegenstand unterstützen soll, sondern dass „die Mathematik [...] der Veranschaulichung einen (bestimmten) Sinn [gibt].“ (Bauersfeld 2000, S. 119)

Krauthausen und Scherer (2003) grenzen in diesem Zusammenhang Anschauungsmittel explizit von Veranschaulichungen ab. Während letztere primär als Illustration arithmetischer Zusammenhänge im traditionellen Sinn dienen, wird durch den Begriff Anschauungsmittel die Eigenaktivität der Lernenden hervorgehoben. Die Deutung des Materials wird dabei als Werkzeug des mathematischen Verständnisses bezeichnet. Unter dem Begriff *Arbeitsmittel* werden von den Autoren beide Funktionen zusammengefasst (vgl. Krauthausen und Scherer 2003, S. 212f.).

Radatz et al. (2007) grenzen die Bezeichnung Arbeitsmittel auf alle Materialien ein, die im arithmetischen Anfangsunterricht als Hilfsmittel zur Entwicklung und Festigung des Zahlverständnisses eingesetzt werden. Dazu gehören Wendeplättchen, Steckwürfel, Rechenstäbe und ähnliche Materialien. (vgl. Radatz und Schipper 2007, S. 35)

Auch Hasemann und Gasteiger (2014) betonen, dass zum Erwerb der Zählfähigkeit und zur Entwicklung des kardinalen Zahlbegriffs Arbeitsmittel unabdingbar sind. Im Vordergrund steht dabei das eigene Handeln der Kinder mit realen Gegenständen. Nur durch die innere Repräsentation der Handlungen kann das zugehörige mathematische Konzept in der Vorstellung abgerufen werden ohne dabei das Material zu benötigen. Arbeitsmittel sind daher zum Anbahnen mathematischer Begriffsbildung notwendig. (vgl. Hasemann und Gasteiger 2014, S. 109) *Arbeitsmittel*[3] sind reale Materialien, die über das eigene Handeln abstrakte mathematische Beziehungen erfahrbar machen. Sie beziehen sich auf einen konkreten Gegenstand (vgl. Hasemann und Gasteiger 2014, S. 109).

Krauthausen und Scherer (2003) beschreiben Arbeitsmaterialien als „konkretes, >handgreifliches< [sic] Material“ (Krauthausen und Scherer 2003, S. 213) wie zum Beispiel Wendeplättchen, Cuisenairestäbe oder Mehrsystemblöcke. Der Einsatz von Arbeitsmitteln hat die Funktion, das Denken der Schülerinnen und Schüler zu unterstützen oder das Erkennen mathematischer Strukturen und

[3] Die Begriffe *Arbeitsmittel, Veranschaulichungsmittel* und *(Arbeits-)material* werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit synonym verwendet und bezeichnen vorrangig reale Materialen zum Entdecken und Konstruieren mathematischer Beziehungen.

Beziehungen anzuregen. Entscheidend für den Erfolg ist dabei, dass jedes Material bestimmte mathematische Einsichten nahelegt, die Abstraktion aber stets ein individueller Prozess ist, der nur in Teilen von der Lehrkraft beeinflusst werden kann. Da der Einsatz von Material nicht selbsterklärend ist, muss der Umgang mit Arbeitsmitteln von den Kindern gelernt werden. Arbeitsmittel sollten grundsätzlich so beschaffen sein, dass sie in unterschiedlichen Situationen verwendet werden können. (vgl. Hasemann und Gasteiger 2014, S. 110; Bauersfeld 2000, S. 119)

Die Unterscheidung zwischen *natürlichem* oder *künstlichem* Material wird von Hasemann und Gasteiger (2014) vorgenommen. Natürliche Materialien sind meist aus der Lebenswelt der Kinder wie beispielsweise die eigenen Finger oder Gegenstände wie Stifte und daher zu jeder Zeit verfügbar. Künstliches Material wurde hingegen für einen spezifischen Zweck aufbereitet. Zu diesen Arbeitsmitteln gehören zum Beispiel Plättchen, Klötze, Steckwürfel oder das Zwanzigerfeld. (vgl. Hasemann und Gasteiger 2014, S. 110; Radatz und Schipper 2007, S. 159)

Radatz et al. (2007) unterscheiden weiterhin den Grad der Strukturierung. Mit *unstrukturiertem Material* wie beispielsweise Wendeplättchen, Steckwürfel und Naturmaterialien wie Kastanien, Äpfel, Nüsse usw. werden Zahlen anhand der Anzahl einzelner Objekte repräsentiert. Die Anzahl kann entweder simultan erfasst oder abgezählt werden. Durch Bündelungen oder Farbgebung ist auch eine quasi-simultane Erfassung möglich. Unstrukturierte Materialien zeichnen sich durch Merkmalsarmut aus und können im Mathematikunterricht daher als Repräsentation vieler Gegenstände, Personen oder Tiere eingesetzt werden. Vorteile bieten diese Typen von Arbeitsmitteln bei der Darstellung von Zahlen im Zahlenraum bis Fünf, da schnelle Zahldarstellungen und flexible Operationen mit ihnen möglich sind. Im Zahlenraum bis 20 besteht hingegen beim Einsatz unstrukturierter Materialien der Nachteil, dass das Ablösen vom zählenden Rechnen möglicherweise verhindert wird. (vgl. Radatz und Schipper 2007, S. 35f.)

Strukturierte Materialien sind durch Zusammenfassungen der einzelnen Objekte zu Ganzheiten gekennzeichnet. Vorherrschend ist dabei die Fünferstruktur, anhand der Zahlen zwischen Fünf und 10 quasi-simultan erfasst werden können (vgl. Radatz und Schipper 2007, S. 35). *Strukturiertes Arbeitsmaterial* kann eine feste Struktur haben oder aus einer Mischform bestehen. Bei einer festen Struktur wird nicht die Kardinalzahl repräsentiert. Cuisenairestäbe, bei denen jede Zahl als Stab einer bestimmten Länge und mit einer anderen Farbe dargestellt wird, oder Spielgeld, bei dem jede Münze bzw. jeder Schein einen bestimmten Wert repräsentiert, sind Beispiele, bei denen das

Anschauungsmittel nicht die Anzahl der Elemente thematisiert. Vorteile dieser Materialien sind, dass sie einen zählenden Umgang nicht unterstützen. Allerdings erfordern sie auch, die einzelnen Repräsentanten zu lernen. (vgl. Hasemann und Gasteiger 2014, S. 111f.) Strukturierte Materialien sind im Zahlenraum bis Fünf weniger geeignet und es können bei der Zahlenraumerweiterung Probleme in der Übertragbarkeit entstehen (vgl. Radatz und Schipper 2007, S. 36f.).

Strukturiertes Material, bei dem Einzelobjekte veränderbar sind, wird als *Mischform* bezeichnet. Mehrere Objekte können zu größeren Einheiten zusammengefasst werden. Beispiele hierfür sind das *Zwanzigerfeld* oder der *Zwanziger-Rechenrahmen*. In beiden Darstellungen ist die Fünfer- und Zehnerstruktur erkennbar und es besteht gleichzeitig die Möglichkeit, das Arbeitsmittel als Ganzes zu verwenden. Der Einsatz zweifarbiger Plättchen ermöglicht es weiterhin, mit Einzelobjekten zu handeln. Beide Arbeitsmittel eignen sich zur quasisimultanen Mengenerfassung und zum Entdecken von Zahlbeziehungen. Durch diese Mischform der Arbeitsmittel kann das Ablösen vom zählenden Rechnen unterstützt werden. (vgl. Hasemann und Gasteiger 2014, S. 112f.; Radatz und Schipper 2007, S. 35f.)

Nachfolgend werden ausgewählte Arbeitsmittel im Hinblick auf ihre didaktische Funktion erläutert. *Muggelsteine* sind beispielsweise ein unstrukturiertes Arbeitsmittel in der Grundschule, um Mengen zu veranschaulichen. Zahlen werden im Hinblick auf ihre Kardinalität durch die entsprechende Anzahl an Steinen dargestellt (vgl. Schipper et al. 2015, S. 41). Sie sind besonders für Zähl- und Bündelungsübungen geeignet (vgl. Hasemann und Gasteiger 2014, S. 111).

Auch Zahlzerlegungen sind zum Aufbau eines kardinalen Zahlverständnisses zentral und bereiten darüber hinaus auf die operativen Strukturen der Addition und Subtraktion vor. Im Zahlenraum bis Zehn wird mit unstrukturiertem Material wie beispielsweise den *Wendeplättchen* gearbeitet. Mit diesen können sowohl die möglichen Zerlegungen also auch die entsprechende symbolische Schreibweise thematisiert werden. Die Beziehungen zwischen den Zerlegungen und die Darstellungsebenen werden dabei aufgegriffen. (vgl. Padberg und Benz 2011, S. 41) Durch Zahlzerlegungen sollen Zahlen als Ganzes, aber auch in ihrer Zerlegung gesehen werden (vgl. Hasemann und Gasteiger 2014, S. 98).