Simone Reinhold & Katrin Liebers (Hrsg.)

Mensch – Raum – Mathematik
Historische, reformpädagogische und empirische Zugänge zur Mathematik und ihrer Didaktik

Festschrift für Michael Toepell

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Festschriften der Mathematikdidaktik 4

Simone Reinhold & Katrin Liebers (Hrsg.)

Mensch – Raum – Mathematik
Historische, reformpädagogische und empirische Zugänge zur Mathematik und ihrer Didaktik

Festschrift für Michael Toepell

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über http://dnb.ddb.de abrufbar.

Druck durch:
winterwork
04451 Borsdorf
http://www.winterwork.de

Abbildung auf dem Umschlag:
Das Denklehrzimmer – ein idealtypisches philanthropisches Modell für die Einübung von Kindern in der Welt der Erwachsenen, entworfen vom Unterrichtspraktiker Christian Heinrich Wolke (1741-1825) im Jahr 1805 für das Dessauer Philanthropin.

WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, Münster 2017 – E-Book
ISBN 978-3-95987-038-2

INHALTSVERZEICHNIS

Simone Reinhold & Katrin Liebers

Mensch – Raum – Mathematik: Vorwort mit einem Besuch des Philanthropischen Denklehrzimmers

Zusammenfassung. *Mensch – Raum – Mathematik: In diesen Feldern bewegen sich die wissenschaftlichen Aktivitäten des Kollegen Toepell schon seit vielen Jahren. In unserer Wahrnehmung steht für ihn der Mensch, das Mathematik treibende Individuum, in besonderer Weise im Fokus. So sind es vor allem grundsätzliche Fragen des Erwerbs von (mathematischem) Wissen und Aspekte der Gestaltung von Lehr-Lern-Prozessen für Schülerinnen und Schüler aller Schulformen und Jahrgangsstufen, die er immer wieder in Diskussionen im Kollegenkreis einbringt. Der Raum, in dem diese Prozesse stattfinden oder den diese Prozesse berühren, ist dabei oft in besonderer Weise mit der Geometrie verbunden. Hier bewegen ihn historische Ansätze ebenso wie reformpädagogische oder empirische Zugänge. Vor diesem Hintergrund wurde das inhaltliche Grundgerüst für die vorliegende Festschrift bewusst eher vage gehalten, so dass schließlich ein besonders vielseitiger Band entstanden ist, der die vielfältigen Interessen und Arbeitsschwerpunkte des Gewürdigten repräsentiert.*

1. Das Philanthropische Denklehrzimmer

Die auf dem Einband der vorliegenden Festschrift abgedruckte Radierung ist einer Veröffentlichung von Christian Heinrich Wolke entnommen. Sein in Leipzig im Jahre 1805 unter dem Titel „Anweisung für Mütter und Kinderlehrer, die es sind oder werden können, zur Mittheilung (sic!) der allerersten Sprachkenntnisse und Begriffe, von der Geburt des Kindes an bis zur Zeit des Lesenlernens“ erschienene Buch entfaltet, wie man sich seinerzeit am Philanthropinum in Dessau guten Unterricht vorstellte. Die Radierung des „Philanthropischen Denklehrzimmers“, das in dieser Form leider nie realisiert wurde, bietet uns einen wunderbaren Ort der inhaltlichen Begegnung. Wir nehmen an, dass dies auch für andere Erziehungswissenschaftler/inne/n und Mathematikdidaktiker/inne/n gilt und sehen darin einen guten Rahmen zur Einführung in die vorliegende Festschrift zur Würdigung des Wirkens von Michael Toepell. Verschiedene Ausschnitte aus dem Bild betrachten wir daher in Bezug zum Gewürdigten, bevor wir anschließend einen Ausblick auf den Gesamtband geben.

2017. In Simone Reinhold & Katrin Liebers (Hrsg.), *Mensch – Raum – Mathematik: Historische, reformpädagogische und empirische Zugänge zur Mathematik und ihrer Didaktik* (S. 1-6). Münster: WTM.

Zunächst ist da der Raum, das Zimmer an sich und die jungen oder erwachsenen Menschen, die in ihm aktiv sind und sich augenscheinlich zahlreichen mathematischen Themen widmen. Der Blick auf andere Erscheinungen oder Disziplinen geht dabei aber nicht verloren, sondern berücksichtigt in Gestalt physikalischer Experimente, von Einblicken in die Flora und Fauna oder über Begegnungen mit der Geographie oder Astronomie auch die Natur und die Naturwissenschaften. Für einen in ähnlicher Weise umfassenden Blick auf die uns umgebenden Phänomene und für das tiefe Interesse für deren Verbindungen wird Michael Toepell weit über die Grenzen des Leipziger Instituts für Pädagogik und Didaktik im Elementar- und Primarbereich hinaus geschätzt. Nach seinem Studium, der Ausbildung zum Waldorflehrer und seiner Tätigkeit als Studienrat für die Fächer Mathematik, Physik und Astronomie siedelte er sowohl seine Promotion als auch seine Habilitation im Bereich der Geschichte der Naturwissenschaften an. Hervorzuheben ist hier sicher seine Dissertation „Über die Entstehung von David Hilberts ‚Grundlagen der Geometrie'" (1986), die auch international Anerkennung fand. So darf man zweifelsohne annehmen, dass die Auszüge aus der Geometrie, die im Philanthropischen Denkzimmer und auch im Geometrieunterricht der Gegenwart angeboten werden, Michael Toepell größte Freude bereiten dürften und ihn bei der Lektüre dieser Festschrift vielleicht schon wieder auf neue Gedanken zur Geometrie (ent)führen.

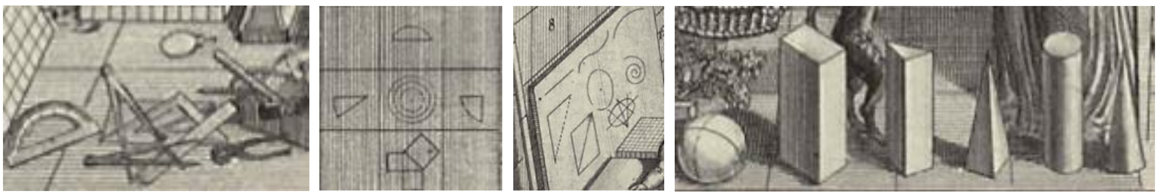
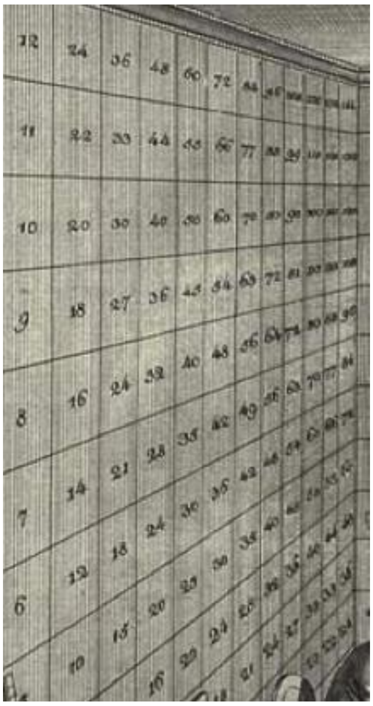


Abb. 1: Zeichengeräte wie Winkelmesser und Zirkel, Kreisabschnitte und eine Darstellung zum Satz des Pythagoras oder verschiedene Modelle geometrischer Körper

Der aufmerksame Betrachter erkennt in der Wandgestaltung zudem, dass die Wände des Raumes mit einem Quadratgitter überzogen wurden, in das spaltenweise die Zahlen von 1 bis 12 (bzw. in den Nachbarspalten



ihre Vielfache) eingetragen wurden. Dabei entsteht eine Übersicht zu allen Aufgaben des Einmaleins bis zur Aufgabe 12 · 12. So liegt es beim Erscheinen dieser Festschrift etwa 2 · 12 · 12 Monate zurück, dass Michael Toepell den Ruf auf eine Professur für Grundschuldidaktik Mathematik an der Erziehungswissenschaftlichen Fakultät der Universität Leipzig erhielt und diesen annahm. Er ist der Universität und der Fakultät seit dieser Zeit treu geblieben und hat sich währenddessen u. a. viele Jahre als Geschäftsführender Direktor des Instituts für Grundschulpädagogik in die Ausgestaltung der Fakultät eingebracht.

Abb. 2: Auszug zu den Aufgaben des Einmaleins

Die Darstellung des Dessauer Denklehrzimmers deutet insgesamt zudem darauf hin, dass Lernen offenbar weniger im Sinne direkter Wissensvermittlung verstanden wird. Vielmehr wirkt es, als hielten sich die Erwachsenen im Hintergrund, während sie gezielt Angebote zur Entfaltung eigenständigen Denkens unterbreiten, dazu Materialien bereitstellen oder selbst mit Schere und Papier (geometrische?) Erkundungen vornehmen. Diese Haltung dem Lernen gegenüber fand in den Anfängen der Erziehungswissenschaftlichen Fakultät in den 1990er Jahren u. a. Ausdruck in der Einrichtung eines sog. „Studienlabors“, aus dem sich später die Lernwerkstatt der Grundschuldidaktiken entwickelte. Michael Toepell war einer der Gründungsväter dieser wegweisenden Einrichtung, die heute einer substanziellen und dem Forschenden Lernen verbundenen Professionalisierung (angehender) Grundschullehrkräfte zu Gute kommt.

Abb. 3: Annäherungen (an die Geometrie?) mit Papier und Schere

2. Übersicht zu den Beiträgen des vorliegenden Bandes

Walter Hutter widmet sich in seinem Beitrag *Mathematik im Spiegel der Unendlichkeit* der Differenzialrechnung und dem Problem des Unendlichkleinen sowie der (projektiven) Geometrie und der unendlichen Ferne. Neben einer exemplarischen Charakterisierung der hier auftretenden fachlichen Zusammenhänge, erörtert der Verfasser auch die didaktische Frage, wie die Schulmathematik sich mit diesen Zugängen zur Unendlichkeit auseinandersetzen kann.

Antonia Lemensiek gibt mit ihrem Beitrag *Historische Anschauungsmaterialien für den Mathematikunterricht - Vom Kerbholz bis zum Abakus* eine Zusammenschau der historischen Bezüge von Medien und Materialien, die in vergleichbarer Weise auch heute noch im Mathematikunterricht der Grundschule genutzt werden – oder aus fachdidaktischen Überlegungen heraus heute nicht mehr tragfähig erscheinen.

Stefan Deschauer bietet in seinem Beitrag zum Thema *Originelle und kuriose Aufgaben der Unterhaltungsmathematik aus dem 16. und 17. Jahrhundert – mit einem kurzen Rückfall ins tiefste Mittelalter* eine Zusammenstellung kleiner Kuriositäten mit reizvollem mathematischen Hintergrund an. Viele der für diesen Beitrag ausgewählten und kommentierten Texte und Bilder sind bislang kaum oder gar nicht bekannt, haben mitunter aber auch aus didaktischer Perspektive reichhaltiges Potenzial.

Thomas Krohn und **Silvia Schöneburg** gehen in ihrem Beitrag *Festungsbau in der Theorie des 17. und der Schulpraxis des 21. Jahrhunderts* ausführlich auf das „Organum mathematicum", ein im 17. Jahrhundert durch Athanasius Kirchner entwickeltes mathematisches Hilfsmittel ein. Neben der Darstellung historischer Bezüge wird auch ein darauf bezogenes aktuelles Projekt zur Umsetzung dieser mathematikhistorischen Inhalte im Mathematikunterricht der Gegenwart vorgestellt.

Katrin Liebers zeigt anhand ihres Beitrags *Rechnen als „vorzüglichste Verstandesübung" und „beste Kinderlogik" für märkische Bauern- und Tagelöhnerkinder – F. E. von Rochows Musterschule in Reckahn* wie in einer kurmärkischen Landschule ein Konzept für einen überaus anspruchsvollen Rechenunterricht in der Elementarschule entwickelt und über Jahre umgesetzt worden ist. Dieses Konzept war seiner Zeit weit voraus und ermöglichte im Kontext der Aufklärung einen quantitativen Modus des Weltzugangs für alle Kinder dieses Dorfes.

Sebastian Friedl, ***Susanne Wöller*** und ***Simone Reinhold*** widmen sich mit ihrem Beitrag *Zugänge zur Mathematik über die Spielgaben Friedrich Fröbels* dem Werk des Erfinders des Kindergartens. Erörtert und durch praktische Beispiele bzw. Befunde aus empirischen Studien untermauert wird dabei, wie die von Fröbel erfundenen „Beschäftigungsgaben" auch den aktuellen Anforderungen an den Mathematikunterricht der Grundschule standhalten können. Exemplarisch wird zudem aufgezeigt, wie sich Studierende für das Lehramt an Grundschulen mithilfe den Fröbel´schen Spielgaben der empirischen mathematikdidaktischen Forschung nähern.

Anne Marquardt stellt in ihrem Beitrag *Mathematik ist überall – zur mathematischen Perspektive im fächerverbindenden Unterricht* Überlegungen zum Aufbau mathematischer und überfachlicher Kompetenzen im fächerverbindenden Unterricht der Grundschule an, die durch erste Befunde aus der LifUG-Studie belegt werden. Hervorgehoben werden die Bedeutsamkeit des Lebensweltbezugs sowie das Verständnis dafür, dass die Mathematik als wichtiges Werkzeug zur Lebensbewältigung fungieren kann.

Erfahrungen (junger) Kinder mit dem sie umgebenden Raum greifen auch ***Claudia Hruska*** und ***Simone Reinhold*** in ihrem Beitrag zum Thema *Ästhetische Erfahrungen in der frühen mathematischen Bildung* auf. Die Autorinnen zeigen auf, wie genussvolle ästhetischen Erfahrungen mit Formen, Anzahlen und Strukturen im Kindergartenalter angeregt und in bewusste, anschlussfähige Lernprozesse übergeleitet werden können.

Ysette Weiss gibt in ihrem Beitrag *Die Entwicklung von Gemeinschaften mit mathematikhistorischen Interessen und gemeinsamer Praxis* einen Rückblick auf die Entwicklung der Fachsektion für Mathematikgeschichte der DMV und des Arbeitskreises Mathematikgeschichte der GDM. Besonders nachgegangen wird dabei dem gemeinsam entwickelten Wertesystem dieser Interessen- und Lerngemeinschaft bzw. ihrer gemeinsamen

Praxis, ihren gemeinsamen Projekten sowie ihrem geteilte Werte offenbarendem Erfahrungsaustausch, der auch mathematikdidaktische Perspektiven einschließt.

Abschließend führt **Agnes Klein** in die *Geschichte der Waldorfpädagogik in Ungarn* ein. Vergangenheit und Gegenwart der ungarischen Waldorfschulen werden dabei im Zusammenhang mit gesellschaftlichen und historischen Entwicklungen sowie vor dem Hintergrund von Anforderungen in ärmeren Regionen Ungarns oder im Spiegel der Inklusion betrachtet.

Im Anschluss an diese Hauptbeiträge wird mit einem **Schriftenverzeichnis** von Michael Toepell ein Überblick zu seinem umfänglichen und inhaltlich breit aufgestellten wissenschaftlichen Wirken gegeben – ohne dabei einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben. Eine Aufstellung aller Beitragenden zur vorliegenden Festschrift schließt mit persönlichen Grußworten, die uns von den Autorinnen und Autoren zur Verfügung gestellt wurden.

Eine anregende Lektüre beim Beschreiten der hier ausgewählten Denklehrräumen aus unterschiedlichen mathematischen, historischen, reformpädagogischen und didaktischen Perspektiven wünschen

Simone Reinhold & Katrin Liebers

Leipzig, im Frühjahr 2017

Kerstin Bergner, Eric Kanold, Stefanie Kieselstein und Agnes Zimmermann-Nitschke danken wir für die sorgfältige Durchsicht des Manuskripts und wertvolle redaktionelle Hinweise.

WALTER HUTTER

MATHEMATIK IM SPIEGEL DER UNENDLICHKEIT

Zusammenfassung. *In der Differenzialrechnung ist das Problem des unendlich Kleinen und in der (projektiven) Geometrie jenes der unendlichen Ferne (der uneigentliche Punkte) relevant. Es soll der jeweilige Zusammenhang exemplarisch charakterisiert und fachlich verortet werden. Die mathematische Urteilsorientierung setzt dabei am eigenen Übungsprozess an, wobei die Qualitäten innerhalb des analytischen und geometrischen Denkens differenziert werden können. Es soll die Frage angeregt werden, ob und inwiefern die Schulmathematik im Spiegel der Unendlichkeitsfrage gesehen und verstanden werden kann.*

1. Schüler im Umfeld von Abstraktion und Mathematik

1.1 Abstrakte Begriffe

Die Mathematik scheint als Unterrichtsthematik weit davon entfernt zu sein „irgendwie unter die Haut zu gehen" (sie sei abstrakt und bliebe unverstanden, da keine Anbindung an das Theoriegebäude wirklich möglich ist). Sind schulische Ansatzweisen überhaupt in der Weise denkbar, dass dem lebendigen (mathematischen) Denken der Jugendlichen Gelegenheit zum Ausdruck gegeben werden kann? Diese Problemstellung, die zugleich eine Hoffnung sein kann, hat insofern ihre Berechtigung, als wir womöglich dazugehörige kulturelle und gesellschaftlich bestimmende Wirksamkeitsebenen gar nicht ausreichend reflektieren.

Eine innere Haltung, die bis heute prägend wirkt, wurde nämlich im Zeitalter der Reformation geboren und besonders durch Calvin repräsentiert. Es ist, mit Max Bense (Bense, 1946, S. 110 ff.) gesprochen, eine Abstraktion großen Stils, die fortan vor allem auch die Genese der Naturwissenschaften prägen sollte. Calvin kam im Jahr 1536 nach Genf und engagierte sich dort für eine strenge Kirchenzucht, die sich auf die Vorsehung Gottes zu beziehen hatte. Die Genfer wehrten sich zunächst dagegen, Calvin wurde der Stadt verwiesen. Doch man rief ihn schon 1541 wieder zurück,

2017. In Simone Reinhold & Katrin Liebers (Hrsg.), *Mensch – Raum – Mathematik: Historische, reformpädagogische und empirische Zugänge zur Mathematik und ihrer Didaktik* (S. 7-27). Münster: WTM.

um seine *Ordonnances ecclesiastiques* zu übernehmen. Die Menschen waren bereit eine neuartige Askese auf sich zu nehmen und den Glauben in ein abstrakt geformtes Programm gießen zu lassen. Vorsehung und Vorherbestimmtheit wurden als grundsätzlich Neues entdeckt. Für Bense ist die Geburtsstunde der Abstraktion in dieser Weise symptomatologisch verortet. Zugleich sind dem Menschen eigene Wirklichkeitserlebnisse des Denkens, die damit verbundenen Ahnungen und intuitiven Vorgriffe eine Grundlage jeder Bezugnahme auf das Sein geblieben. Rudolf Steiner (der Begründer der Anthroposophie und Waldorfpädagogik) regte Ende des 19. Jahrhunderts (als Überwindung von damals bevorzugten materialistisch-abstrakten Verobjektivierungen) eine versöhnliche und zugleich notwendige Annäherung von objektivem und subjektivem Weltinhalt in folgendem Sinn an.

> *Ein abstrakter Begriff hat für sich keine Wirklichkeit, ebensowenig wie eine Wahrnehmung für sich. Die Wahrnehmung ist der Teil der Wirklichkeit, der objektiv, der Begriff derjenige, der subjektiv (durch Intuition) gegeben wird. Unsere geistige Organisation reißt die Wirklichkeit in diese beiden Faktoren auseinander. Der eine Faktor erscheint dem Wahrnehmen, der andere der Intuition. Erst der Zusammenhang der beiden, die gesetzmäßig sich in das Universum eingliedernde Wahrnehmung, ist die volle Wirklichkeit. Betrachten wir die bloße Wahrnehmung für sich, so haben wir keine Wirklichkeit, sondern ein zusammenhangloses Chaos; betrachten wir Gesetzmäßigkeit der Wahrnehmung für sich, dann haben wir es bloß mit abstrakten Begriffen zu tun. Nicht der abstrakte Begriff enthält die Wirklichkeit; wohl aber die denkende Beobachtung, die weder einseitig den Begriff, noch die Wahrnehmung für sich betrachtet, sondern den Zusammenhang. […] Die Wissenschaft soll selbst organisch-lebendig werden. […] Das abstrakte Denken gewinnt dadurch konkretes, individuelles Leben. Die Ideen werden Lebensmächte. Wir haben dann nicht bloß ein Wissen von den Dingen, sondern wir haben das Wissen zum realen, sich selbst beherrschenden Organismus gemacht; unser wirkliches, tätiges Bewusstsein hat sich über ein bloß passives Aufnehmen von Wahrheiten gestellt.*
>
> (Steiner, 1894, S. 247 ff., S. 270)

Steiner charakterisiert also eine organisch-lebendig werdende Wissenschaft durch die Kategorie des *denkenden Beobachtens*. Er begreift unsere historische Entwicklung dadurch auch als Frage, die eng mit dem Menschen verknüpft ist. Insbesondere Schülerinnen und Schüler „humanisieren" ganz individuell durch ihre eigenen (unkonventionellen) Erkenntnishaltungen im Lerngeschehen. Sie formen in einem auf geistiger Ebene zu verstehenden Atmungsvorgang zwischen Wahrnehmung und begrifflicher Urteilsorientierung ihre Wirklichkeitskonzepte. Berücksichtigen wir Lehrer ausreichend diese Tatsachen (etwa um die altersgemäße individuelle Lerndisposition der Schüler mit den Gestaltungsoptionen, die ein Fach bietet, konsequent zu harmonisieren)? Walter Sauer sieht in diesem Kontext die „Humanisierung der Schule" als notwendig an:

> *Wenn in der Medizin heute eine patientzentrierte Therapie gefordert wird, muss in der Erziehungswissenschaft eine pädozentrierte Pädagogik gefordert werden. Der Einführung des Subjekts in der Medizin korrespondiert eine Einführung bzw. Wiedereinführung des Kindes in die Pädagogik. Mag die Wissenschaftsgläubigkeit in vielen Disziplinen noch eine Zeitlang fortbestehen, eine Humanwissenschaft wie die Pädagogik sollte das Humanum wieder ernster nehmen. Das wäre ein erster wichtiger Beitrag der Erziehungswissenschaften zur Humanisierung der Schule.* (Sauer, 1981, S. 86)

1.2 Die Mathematik und die Mathematiker

In den bislang aufgezeigten Kontext beziehen wir im Folgenden die Mathematik ein. Wenn es um das Mathematisieren geht, stellen sich u. U. ganz bestimmte Assoziationen ein, die im Sinne der folgenden drei Äußerungen nicht ungewöhnlich sind:

> *Die Mathematik ist eine gar herrliche Wissenschaft, aber die Mathematiker taugen oft den Henker nicht. Es […] verlangt sehr oft der so genannte Mathematiker für einen tiefen Denker gehalten zu werden, ob es gleich darunter die größten Plunderköpfe gibt, die man nur finden kann, untauglich zu irgend einem Geschäft, das Nachdenken erfordert, wenn es nicht unmittelbar durch jene leichte Verbindung von Zeichen geschehen kann, die mehr das Werk der Routine, als des Denkens sind.* (Lichtenberg, 1801, S. 287)

> *Wir stehen vor einem Rätsel. Woher kommt es, dass die Mathematik in unserer Zivilisation so etwas wie ein blinder Fleck geblieben ist, ein exterritoriales Gebiet, in dem sich nur wenige Eingeweihte verschanzt haben?* (Enzensberger, 1999, S. 12)

> *Nur bei wenigen Menschengruppen ist eine böse Wahrheit, ein erschreckendes Geheimnis besser aufgehoben als bei Theologen und Mathematikern. […] Denn wenn Mathematiker eine Wahrheit in Erfahrung bringen, die andere mindestens den Verstand, wo nicht den Glauben kosten würde, bezwingen sie die Versuchung, diese Wahrheit auszuplaudern, mühelos mit der Forderung, zunächst einmal müsste die neue böse Wahrheit streng bewiesen werden. Da das meistens nicht allzu schnell gelingt, lässt die Umwelt die Sache irgendwann auf sich beruhen. Wenn das Ergebnis dann vorliegt, ist es meistens in so trockenen und verwickelten Formen aufgehoben, dass sich für eine geraume Zeit auch weiterhin nur unter den Mathematikern selber herumspricht, dass unsere Welt nicht mehr die alte ist.*
> (Dath, 2003, S. 114)

Worüber sprechen aber Mathematiker, wenn sie vom eigenen Spezialwissen der in feinster Verästelung mäandernden Ergebnissuche aufblicken und zu philosophieren beginnen? Das Wunder der Übereinstimmung mathematischer Modelle mit physikalischen Wirklichkeiten, die Schönheit dieser Passform bzw. die „ideale Schuhgröße der Mathematik" am Fuß der Natur ist eine Seite. Noch erkenntniskritischer stellt sich die Frage nach der Mathematik selbst. Werden mathematische Phänomene entdeckt, d. h. schärft sich unser Blick für bereits vorhandene Gesetzmäßigkeiten (Platonismus)? Oder sind mathematische Prinzipien in der Art einer Gedankenarchitektur konstruiert und gesetzt (Formalismus)? Noch einfacher ausgedrückt: Fliegen uns die mathematischen Ideen zu, d. h. ist das Reich der Mathematik ein großes Puzzle, für das wir lediglich die Fähigkeiten ausbilden müssen, um die einzelnen Stückchen des Ganzen zu erkennen? Oder werden die mathematischen Gebäude individuell (im Konsens vielleicht mit anderen Forschern) errichtet und durch mencheneigene Ideen weiterentwickelt?

Bernhard Riemann (1826-1866) stellte die mathematische Existenz in einen noch übergreifenderen Zusammenhang mit dem menschlichen

Dasein. In seinem Nachlass finden wir eine Gegenüberstellung unter dem Titel „Antinomien": Zur Thesis gehört die Überschrift: „Endliches, Vorstellbares"; zur Antithesis gehört: „Unendliches, Begriffssysteme, die an der Grenze des Vorstellbaren liegen" (Riemann, 1876, S. 486). Riemann suchte aus der inneren Wahrnehmung der Gesetze geistiger Vorgänge heraus auf die Erklärung des Denkens zu stoßen. Er suchte in seinem Inneren den Spiegel des Universums. Im Unterschied zu seinem Zeitgenossen Kronecker, der allein die Mathematik des Endlichen als wirklich gelten ließ, schwang sich Riemann in die Reihe jener Philosophen empor, die seit Aristoteles das menschliche Denken in seiner Möglichkeit (potentia) befragen und prüfen. Die Grenzen des Vorstellbaren, die damit verbundenen (logischen) Verknüpfungen und die innermathematisch gestalterischen Elemente (Kombinationen, Variationen, geometrische Metamorphosen) könnten einen Beitrag zur Humanisierung dieser Wissenschaft leisten. In der Biographie Riemanns wird davon etwas spürbar, nämlich dass die Mathematik als der Niederschlag mathematisierenden Lebens erscheint, so wie die Kunst Niederschlag des künstlerisch Schaffenden ist.

2. Das Unendliche in der Mathematik

2.1 Erste Beispiele

In den folgenden Abschnitten sollen zur Veranschaulichung bzw. als Suchbewegung konkrete Beispiele zum denkenden Wahrnehmen (wahrnehmenden Denken) gegeben werden. Das erste ist angeregt durch folgende Äußerung Riemanns:

> *Nun scheinen aber die empirischen Begriffe, in welchen die räumlichen Maßbestimmungen gegründet sind, der Begriff des festen Körpers und des Lichtstrahls, im Unendlichkleinen ihre Gültigkeit zu verlieren.* (Riemann, 1923, S. 19 ff.)

Über der Hypotenuse $\overline{AC}$ eines rechtwinkligen Dreiecks ABC ist eine Treppe $ADEFC$ angebracht (Abb. 1, unten). Die Längen der Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{EF}$ zusammengenommen sind gleich der Länge $\overline{BC}$, die Längen $\overline{DE}$ und $\overline{FC}$ ergeben zusammen die Länge $\overline{AB}$. Dasselbe gilt auch für eine Treppe mit vier Stufen: Zusammen gesehen sind die Längen der vertikalen Stücke identisch mit der gesamten Treppenhöhe und die Längen der horizontalen Stücke identisch mit der gesamten Treppenbreite. Die Summe der Längen der vertikalen und horizontalen Treppenstücke ist identisch mit der Summe der Längen der beiden Katheten des großen Dreiecks. Bei beliebiger Anzahl der Treppenstufen bleibt die letzte Aussage unverändert richtig. Bei sehr vielen Treppenstufen unterscheidet sich aber die Treppe kaum mehr von der Hypotenuse des großen Dreiecks. Setzt man den Verfeinerungsprozess unbegrenzt fort, verschmelzen Treppe und Hypotenuse. Müssen wir also folgern, dass die Hypotenusenlänge die Summe der beiden Kathetenlängen ist?

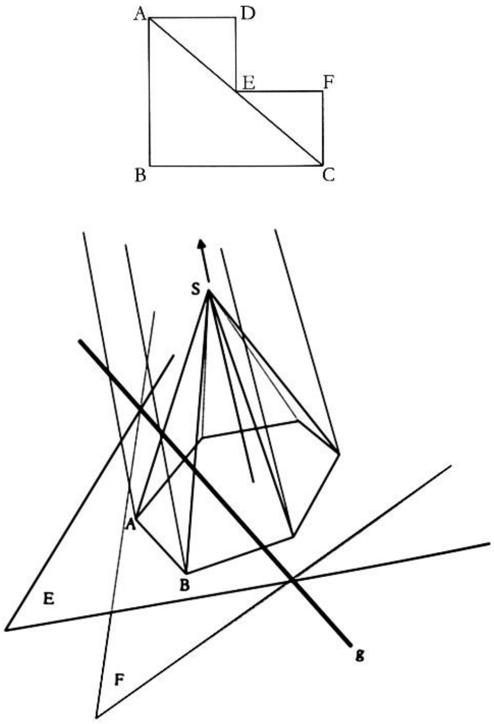


Abb. 1: Unendlichklein, unendlichfern

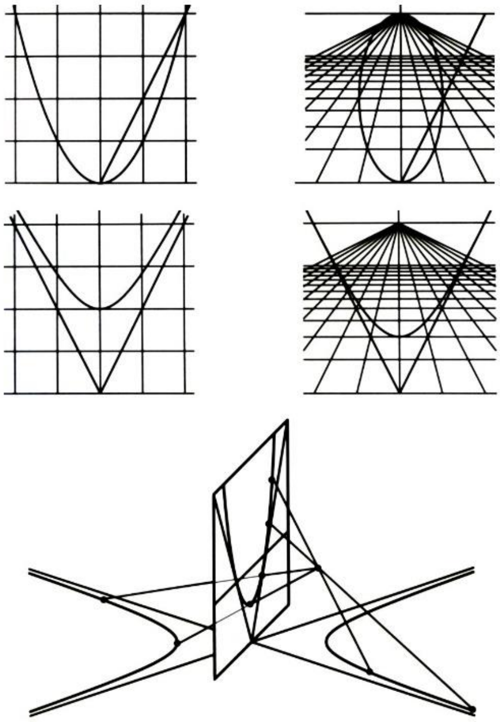


Abb. 2: Perspektive und Projektion

Die Vorstellung der Treppenverfeinerung lässt diesen (verwegenen) Schluss zu. Sie verbietet ihn aber zugleich, denn offenbar ist es ein Unterschied, ob man von einem Ort zum anderen direkt oder auf einem Umweg gelangt. Die Grenzkurve der Treppenkurve ist vor allem in ihrer inneren Natur wesentlich anders beschaffen:

> *[...] so scheint man durch diesen Grenzübergang zu einer Linie zu gelangen, die zwar in ihrem ganzen äusseren Verlaufe mit einer geraden Linie zusammenfällt, in ihrer inneren Natur aber wesentlich*

> *anders beschaffen ist, indem ihre Richtung in jedem Punkte gänzlich unbestimmt und ihre Länge von der der Geraden verschieden ist.*
> (Hankel, 1870, S. 75*)*

Es ist, als würde die Treppenlinie beim Übergang zum Unendlichen zu Staub zerfallen und gar nichts mehr mit einer Linie gemeinsam haben. Wir müssen also gedanklich neu ansetzen: Die Verhältnismäßigkeiten der Treppendreiecke bleiben bei jeder noch so stufenreichen Treppe erhalten. Die Tatsache, dass der Satz des Pythagoras in jedem noch so kleinen Treppendreieck gilt, bleibt bis in das unendlich Kleine hinein erhalten und spiegelt sich im großen Dreieck wieder.

Blicken wir auf das zurück, was sich abgespielt hat: Die Beweglichkeit unserer denkenden Aktivität (Wille) ist entscheidend, um die Denkwege einordnen und bewerten zu können. *Wir* denken. Die Tätigkeit des gesetzmäßigen Vorstellens wird vom Ich geleistet. Es findet eine spürbare Differenzierung zwischen Sinneserfahrung und ideeller Erfahrung statt. Das innere Wahrheitsgefühl war bei beiden Denkwegen gefragt. Dennoch führte einer der beiden Wege zur Paradoxie. Die Anschauung im Denkprozess hilft dem ungeübten Betrachter zunächst nicht, die Paradoxie zu vermeiden. Die unbegrenzte Treppenverfeinerung ist die Ursache. Beim Vordringen in die Unendlichkeit ist insofern Vorsicht geboten, als aus dem Sinnlichen in das Geistige hinausgestaltet wird.

Die nächste Übung geht auf Unger (1999) zurück. Wir stellen uns ein Sechseck in einer Ebene E vor, das von einem Punkt S aus durch einen Pyramidenmantel projiziert wird (Abb. 1, unten). Wandert S von der Ebene E weg und bleibt das Sechseck erhalten, nähert sich der Pyramidenmantel immer mehr dem Mantel eines Prismas an. Wird E um die Gerade g zur Ebene F gedreht, verzerren sich der Projektionsmantel und das Vieleck. Die Kanten werden verkürzt oder verlängert, je nachdem auf welcher Seite von g die dazugehörigen Ecken des Polygons liegen.

Wir lassen jetzt die Gerade g in der Ebene E verschiedene Positionen einnehmen und beobachten, wie die Projektion des Vielecks in der sich drehenden Ebene F Metamorphosen unterworfen wird. Die gesamte Anordnung wird in eine dreifache Bewegung versetzt. Ist etwa die Gerade g parallel zur Kante $\overline{AB}$, so kann man erreichen, dass die Kante $\overline{AB}$ mehr und mehr in der unendlichen Ferne verschwindet. Man kann aber g auch so positionieren, dass nur ein Eckpunkt des Sechsecks im Unendlichen verschwindet. Dann werden die zum Punkt hinführenden Seiten parallel. Ist S im Unendlichen und dreht sich die Ebene F weiter um g, kann ferner das Wiederkehren der auf der einen Seite von F im Unendlichen verschwundenen Punkte auf der anderen Seite von F beobachtet werden. (Unger, 1999)

Dieses Beispiel öffnet den Blick für dasjenige, was mit unendlicher Ferne gemeint ist. Es führt durch kontinuierliche Formveränderungen „aus den gegebenen Gestalten zu neuen.“ Weitere, zu dieser „Begriffsschöpfung“ notwendig hinführende Beispiele werden „auf die Anschauung erziehend wirken“ (Unger, 1998, S. 51-59). Im Durchgehen der Vorstellungs- und Denkschritte bildet sich eine neue innere Anschauung. Die nächste Überlegung erhält dadurch einen anderen Evidenzgehalt, als wenn sie nur logisch gelehrt wird:

Von einem Punkt aus, der außerhalb eines gegebenen Kreises liegt, kann man zwei den Kreis berührende Linien (Tangenten) ziehen. Wir sehen den Zusammenhang zwischen der Verbindung der Berührstellen (Polare) und dem dazugehörigen äußeren Punkt (Pol). Wandert der Pol (etwa nach rechts) in Richtung des waagerechten Durchmessers ins Unendliche, nähert sich die Polare (von rechts) dem Kreisdurchmesser. Kommt der Pol (von links) aus dem Unendlichen, entfernt sich die Polare (nach links) vom Kreisdurchmesser. Jeder Polare entspricht ein Pol. Dem senkrechten Kreisdurchmesser korrespondiert in nunmehr innerer Notwendigkeit der unendlich ferne Punkt der waagerechten Geraden durch den Kreismittelpunkt. Dreht sich diese Gerade um den Kreismittelpunkt, erhalten wir weitere unendlich ferne Punkte, die alle auf der unendlich fernen Gerade liegen. Die Kreisdurchmesser sind, so gesehen, Bilder der unendlich fernen Punkte. Drehen sich die Durchmesser um den Mittelpunkt, wandern gleichzeitig die unendlich fernen Punkte auf der unendlich fernen Gerade.

Konzentrische Kreise, die über alle Grenzen fließend wachsen, versanden jetzt nicht mehr in unerreichbarer Weite. Ihre Kreispunkte wandern ins Unendliche. Der Kreis öffnet sich im Unendlichen zur unendlich fernen

Gerade. Die endliche Geometrie weist in dieser perspektivischen Weise auf das Unendliche. Umgekehrt kann die endliche Geometrie aus der Potenz des Unendlichen heraus angeschaut und verstanden werden.

An dieser Stelle sei Nicolai de Cusa (1401-1464, lat. Cusanus) erwähnt. Er, einer der Väter der Mathematik des Unendlichen, eine prägende Gestalt im Wandel des Denkens der Scholastik, untersuchte das, was „der Möglichkeit nach in der endlichen Linie liegt.“ (Cusa, 1994, S. 41 ff.) Das Unendliche sei, so Cusanus (im Jahr 1440), in Wirklichkeit das, was in der Potenz des Endlichen liegt. Er kam zu dem Schluss, dass eine unendliche Linie gleichzeitig Gerade, Kreis und Dreieck ist. Cusanus begann aus dem gewöhnlichen Wissen heraus ein höheres Erkennen zu entwickeln, wovon die Scholastiker erklärt hatten, dass es nicht möglich sei. Die Unendlichkeitsüberlegung führte bei ihm zum Bild, dass die unendliche Linie dreifach ist. In diesem Moment stieg Cusanus durch seine Imagination zum Glauben auf: „Das Größte ist also dreiheitliche Wesenheit, die eine wirkliche Einheit bildet.“

Um die gleiche Zeit (im Jahr 1435) hatte Leon Battista Alberti (1404-1472) mit seinem Buch *Della pittura* (Über die Malkunst) das erste überlieferte Werk vorgelegt, in dem korrekte perspektivische Darstellungen behandelt wurden. Es gilt als Startpunkt für die Entwicklung der projektiven Geometrie als einer Geometrie der Lage unter Einbezug der unendlich fernen Elemente (stellvertretend die Werke von Locher-Ernst 1980 und Reye 1909). Die Möglichkeit perspektiver Gestaltung in der Malerei prägte, beginnend mit Filippo Brunelleschi (1377-1446), einen neuen Bewusstseinsprozess und kennzeichnete ein einzigartiges Zusammengehen von Mathematik und Kunst in der Renaissance (Andersen, 1992; Field, 1997).

Perspektives Zeichnen machte sogar, im Gegensatz zur griechischen Mathematik, den Zugang zum Verhalten von Kurven im Unendlichen möglich. Girard Desargues (1591-1661) unterschied die Kegelschnitte nach der Anzahl ihrer unendlich fernen Punkte: Ellipse 0, Parabel 1, Hyperbel 2. (Taton, 1951, S. 137). In Abb. 2 (links) sind Parabel und Hyperbel zunächst auf ein rechtwinkliges Raster bezogen. Die Parabel schneidet jede Gerade durch den Scheitelpunkt ein weiteres Mal, mit Ausnahme der (Waagerechten und) Senkrechten. Die Hyperbel schmiegt sich an ihre Asymptoten an. Beide Zeichnungen erläutern bereits die Anzahl der jeweils uneigentlichen Punkte. Durch Verlassen der gewöhnlichen Darstellung im Übergang zur Perspektive erscheinen diese unendlich fernen Punkte als Punkte im Endlichen auf einer Horizontlinie, die vorher als unendlich ferne Gerade der Zeichenebene gedacht war (Abb. 2, rechts). Durch Projektion ist schließlich die perspektiv betrachtete Hyperbel (Abb. 2, Mitte rechts) vollständig (über die Horizontlinie hinaus) aus dem vertrauten ebenen Bild herauf konstruierbar (Abb. 2, unten).

Die angedeutete Liniengeometrie ermöglicht durch ein freieres Raumverstehen die Kontrastierung der kartesisch-messenden Geometrie (des Tastraums) zu einer Urgeometrie, in der die projektive Invariantenlehre als typusartige Formbestimmung des Raumbegriffs gefunden wird (Geometrie des Sehraums).

Das Praktizieren von perspektivischen Zeichentechniken (Abb. 3) sowie der bestimmende Einfluss auf Konstruktionen von Landschaftsarchitektur mittels Horizont und Fluchtpunkt (Abb. 4) begeistern auch heute unmittelbar durch die vom Sehfeld in die Ebene transponierte Kohärenz der Bildwahrnehmung. Man kann im Fall der projektiven Geometrie qualitativ von einem potenzierenden Schritt ins reine Denken sprechen (Adams, 1965, S. 12-23).

Es konnte in den bisherigen Überlegungen von einer räumlichen Vorstellung ausgegangen werden, in der zunächst kein unendlich ferner Punkt vorhanden ist. Ideelle Gesetzmäßigkeiten unter Einbeziehung des Unendlichen traten dann in Erscheinung. Das Verstehen entsprang dem gedanklich vollzogenen Prozess der gestalteten Eingliederung des Unendlichen in den geometrischen Kontext. Durch Hinzubilden des unendlich fernen Punktes wurde dabei eine neue Einsicht gewonnen: Der uneigentliche Punkt ist von den gewöhnlichen Punkten ideell nicht mehr unterscheidbar. Platonismus und Formalismus scheinen hierbei nicht bestimmt voneinander trennbar zu sein.

Abb. 3: Zeichentechniken (Dürer, 1525) **Abb. 4**: Horizont, Flucht (Vries, 1604)

Denken wir noch einmal an die unendlich ferne Gerade, die perspektivisch zur Horizontlinie im Endlichen wurde (Abb. 2, rechts). Um den unendlich fernen Punkt der senkrechten Gitterlinien zu erreichen, werden die linearen Dimensionen des Tastraumes einer bestimmten Dynamik unterworfen: Die Längen verkürzen sich sichtbar. Die Parabel schließt sich im Berührpunkt an der Horizontlinie. Der Horizont kann sogar, wie bei der Hyperbel, durchstoßen werden.

Können praktische Übungsfelder aufgetan werden, die grundsätzlich und elementar zugleich einen handfesten Boden für die geometrische Behandlung dieser Unendlichkeitsfragen schaffen? Die Zentralperspektive stellt eine solche anschauliche Brücke dar, die auch im Unterricht anregend umgesetzt werden kann.

In der nächsten Abbildung sei dazu beispielhaft die Verwandlung eines regelmäßigen Sechsecks nach den Gesetzmäßigkeiten der zentriert linierten Kollineation gezeigt: Die Figurenecken verändern ihre Lage (etwa A_1, A_2, A_3 …), bleiben aber auf ihnen zugehörige Fixstrahlen durch