

Stephanie Schiemann
Robert Wöstenfeld

Die Mathe-Wichtel Band 2

Humorvolle
Aufgaben
mit Lösungen
für mathematisches
Entdecken
ab der
Sekundarstufe

2. Auflage



 Springer

Die Mathe-Wichtel

Band 2

Stephanie Schiemann · Robert Wöstenfeld

Die Mathe-Wichtel Band 2

Humorvolle Aufgaben mit Lösungen
für mathematisches Entdecken
ab der Sekundarstufe

2., erweiterte und überarbeitete Auflage

 Springer

Stephanie Schiemann
DMV-Netzwerkbüro Schule-Hochschule
Freie Universität Berlin
Berlin, Deutschland

Robert Wöstenfeld
Mathe im Leben gemeinnützige GmbH
Freie Universität Berlin
Berlin, Deutschland

ISBN 978-3-658-17969-4

ISBN 978-3-658-17970-0 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-658-17970-0>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2014, 2018

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Illustrationen: Alle Illustrationen sind von Michael Gralmann, außer der Illustration im Wichtelbook von „Wichtel Walli“ und den Illustrationen der Aufgaben und Lösungen „Quatomino“ und „Wichtel in der Sahara“. Diese sind von Magdalene Fischer.

Planung und Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer ist Teil von Springer Nature

Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Vorwort

Knobeln macht Spaß, Mathe macht Spaß, Herausforderung und Wettbewerb können begeistern: Wenn all das noch eines Beweises bedarf, dann liefert den jedes Jahr wieder der Online-Mathekalender **Mathe im Advent**. Zehntausende von Schülerinnen und Schülern, aber auch ganze Schulklassen, stürzen sich im Dezember täglich auf die Aufgaben hinter den Türchen im Internet, knobeln, genießen die Freude an Ideen, am Finden von Lösungen, erleben aber auch immer wieder, dass Probleme knifflig und hartnäckig sein können. Das Mitmachen soll Spaß machen, die harten Herausforderungen des Kalenders werden daher absichtlich in humorvoll-verspielter Verpackung präsentiert – mit sehr viel Einsatz und Aufwand und Liebe zum Detail gestaltet nicht nur von Stephanie Schiemann und Robert Wöstenfeld, die das gesamte Projekt verantworten, sondern auch vom „Chef-Illustrator“ Michael Gralman, einem Technomathematikstudenten der TU Berlin. Aber trotz der spielerischen Verkleidung tauchen alle, die mitmachen, auch ganz automatisch in die Gefühlswelt mathematischer Forschung ein: Sie erleben die Freude am Entdecken und am Knacken harter Nüsse, aber auch den gelegentlichen Frust über sehr harte Nüsse, die sich (zunächst) nicht öffnen lassen. Und zum Erlebnis gehört auch dazu, ganz spielerisch Problemlösestrategien auszuprobieren und zu entwickeln und die eigenen Tugenden und Stärken zu erfahren und auszubauen: Sorgfalt und gründliches Lesen zahlen sich genauso aus wie die Kombination von „wildem Spekulieren“ und „genauem Nachdenken“. Begeisterung und Phantasie zählen natürlich, Konstanz und Ausdauer ebenso.

Wer sich mit den Aufgaben beschäftigt und rätselt, allein oder in kleiner Gruppe mit Papier und Stift vor diesem Buch sitzt, kann erkennen, dass die Aufgaben auch außerhalb der Adventszeit Spaß machen. Sie oder er wird damit aber auch Mitglied einer großen virtuellen Gemeinschaft der Mathematik – einer Gemeinschaft derer, die gern und immer wieder vor solchen (oder auch noch viel schwierigeren ...) Aufgaben sitzen und dieselbe Freude an Geistesblitzen und Ideen suchen und finden. Das „Netzwerkbüro Schule-Hochschule“ der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV), das aus dem bundesweiten „Jahr der Mathematik 2008“ entstanden ist und 2011 seine Heimat am Fachbereich Mathematik der Freien Universität Berlin gefunden hat, hat die wunderbare und wichtige – aber oft auch überwältigende – Aufgabe, diese große Gemeinschaft zu vernetzen. Stephanie Schiemann und Robert Wöstenfeld sind dort die Haupt-Akteure, mit riesiger Energie und Engagement dabei. Aber schon das Entwerfen, Sammeln und Ausgestalten der Aufgaben sind großes Teamwork – das sich

auch in diesem Buch widerspiegelt. Zudem helfen jedes Jahr im Dezember, wenn das Online-Spiel läuft, sehr viele engagierte Studentinnen und Studenten mit, viele Tausend E-Mails und Anrufe, Rückfragen und Kommentare zu beantworten und die Technik im Hintergrund am Laufen zu halten. Ganz herzlichen Dank an alle, die in den letzten Jahren mitgemacht haben und jedes Jahr wieder dabei sind!

Gleichzeitig danke ich auch im Namen des Präsidiums der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV) allen Unterstützern und Sponsoren, die dieses „Großprojekt“ möglich gemacht haben und weiter möglich machen – allen voran der Deutsche Telekom Stiftung, die über Jahre das Netzwerkbüro der DMV finanziert und den Aufbau des Lehrerforums finanziert hat, sowie dem Forschungszentrum MATHEON, das den parallelen Adventskalender für die Oberstufe und für Erwachsene gestaltet. Der Dank gilt aber auch den Mitgliedern der DMV, darunter auch immer mehr Lehrerinnen und Lehrer (herzlich willkommen!), die mit ihrem Mitgliedsbeitrag dieses Projekt fördern – wie auch den Vielen in und außerhalb der DMV, die das Netzwerkbüro und das Kalenderprojekt durch viele zusätzliche Spenden unterstützen. Dieses Mathe-Wichtel-Buch ist auch ein sichtbares und „greifbares“ Dankeschön an alle Mitstreiter und Unterstützer für ein Großereignis, das ja sonst nur virtuell als Online-Spiel im Advent stattfindet.

Ich hoffe, dass in den Aufgaben des Mathe-Wichtel-Buchs Begeisterung spürbar ist – nicht nur die Begeisterung von Stephanie Schiemann, Robert Wöstenfeld, Michael Gramann und den vielen anderen, sondern auch die Begeisterung der kleinen und großen Knoblerinnen und Knobler. Diese Begeisterung bekommen wir ja „live“ nur einmal im Jahr zu sehen und zu spüren – wenn nämlich Ende Januar in Berlin eine große Preisverleihung stattfindet, bei der wir Schülerinnen und Schüler aller Klassenstufen und sogar ganze Schulklassen mit ihren Lehrerinnen und Lehrern auf die Bühne holen, bei einem „Mathequiz“ gegeneinander und gegen den ganzen Saal antreten lassen – und schon an der Lautstärke im Saal klar wird: Mathe macht Spaß!

Ich hoffe, dass diese Erkenntnis auch lautstark aus diesem Buch schallt.



Prof. Günter M. Ziegler

Mitglied des DMV-Präsidiums

Freie Universität Berlin

Vorwort zur 2. Auflage

Wir freuen uns, dass das auch Wichtel-Buch, Band 2 so gut angenommen wird, dass nun eine korrigierte und erweiterte 2. Auflage erscheinen kann. Seit der Veröffentlichung des ersten Mathe-Wichtel-Bandes sind ca. 200 weitere Aufgaben rund um die Wichtel, die Schönheit und die Nützlichkeit des „Mathemachens“ hinzugekommen. Zwei Aufgaben davon haben wir in dieser Auflage neu hinzugefügt, so dass Sie in diesem Buch insgesamt 26 Aufgaben zu verschiedensten mathematischen Themengebieten finden. Die bereits enthaltenen Texte haben wir von Fehlern bereinigt, zudem einigen Aufgaben neue Ideen „Zum Weiterdenken“ hinzugefügt.

Nach jeder **Mathe im Advent**-Saison werten wir die Statistiken und das zahlreiche Feedback der Teilnehmer_innen aus. Diese Analysen liefern interessante Einblicke in die weitreichende Wirkung sowohl des Wettbewerbs im Dezember als auch der Mathe-Wichtel-Bücher. Demnach sind die Aufgaben tatsächlich in der Lage, über die Weihnachtszeit hinaus die Kreativität anzuregen und positive Erlebnisse mit Mathematik zu schaffen. Insbesondere durch die Teilnahme am Klassenspiel und den Einsatz der Mathe-Wichtel-Aufgaben in einer Lerngruppe (von Lehrerinnen und Lehrern initiiert), entsteht ein gruppendynamischer Effekt, der die Mathematik ins Zentrum des Klassenlebens rückt. Die gegenseitige Hilfe im Klassenverband, aber auch innerhalb der Familie ist dabei durchaus erwünscht. Wenn Kinder und Jugendliche andere von ihrer Lösung überzeugen müssen, lernen sie über Mathematik zu kommunizieren, folgerichtig zu argumentieren und die Notwendigkeit, exakte Sprache zu benutzen. Oft gelingt es dadurch, das Selbstbewusstsein der Schüler_innen gegenüber der Mathematik zu steigern. Dies gilt speziell auch in Sekundar-, Gemeinschafts- und Förderschulen.

Für einen leichteren Einsatz im Unterricht haben wir diese Auflage um eine Tabelle erweitert, welche den Lehrerinnen und Lehrern unter Ihnen auf einen Blick die Stoffhalte und Themengebiete anzeigt, die den Aufgaben jeweils zugrunde liegen.

Zunehmend werden die Mathe-Wichtel-Aufgaben auch in der Lehramtsausbildung eingesetzt. Wir hoffen mit unserem didaktischen Konzept (siehe „Didaktisches Vorwort“) zeigen zu können, dass sorgfältig geschriebene Textaufgaben in der Lage sind, zukünftig spezielle Unterrichtssituationen (z.B. Motivation, Übung, Weiterdenken, Differenzierung, Förderung) auf eine positive Art zu bereichern. Die Mathe-Wichtel-Aufgaben können auch den Unterricht im Referendariat und im Praxissemester ergänzen.

Entweder kann der Wettbewerb in der Klasse/Schule begleitet oder bestimmte Aufgaben in den normalen Unterricht eingebaut werden, sofern es thematisch passt. Wenn Sie die Mathe-Wichtel-Aufgaben in einem Seminar vorstellen möchten, können Sie an info@mathe-im-leben.de schreiben und von uns dafür entwickeltes didaktisches Material anfordern. Unser speziell entwickeltes Aufgabenseminar finden Sie auch auf der Webseite www.mathe-im-advent.de/aufgabenseminar.

Für die wertvollen Korrektur- und Ergänzungsvorschläge danken wir Milena Damrau, die seit 2015 in unsere Aufgabenerstellung eingebunden ist.



Stephanie Schiemann



Robert Wöstenfeld

Ihre Stephanie Schiemann und Robert Wöstenfeld

Berlin, im September 2017

Didaktisches Vorwort der Autoren

Die Schönheit der Mathematik ist nicht für alle Menschen leicht zu erkennen. Auch die kreative Vielfalt, die in ihr steckt, erschließt sich denen, die sie nur aus der Schule kennen, oft nicht. Eine Ursache dafür sehen wir in der Art, wie die Mathematik in der Schule und der Hochschule – von positiven Ausnahmen abgesehen – vermittelt wird.

Über viele Schülergenerationen und damit in der Breite der Gesellschaft verfestigte sich ein sehr einseitiges Bild: „Mathematik“ wird vielfach gleichgesetzt mit „Rechnen“ und „Geometrie“. Die Grundrechenarten, der Dreisatz, die Prozentrechnung oder auch der Satz des Pythagoras und vielleicht noch die Parabel, die Sinusfunktion oder π sind den Erwachsenen im Gedächtnis geblieben. Methodisch läuft der Mathematikunterricht oft noch sehr klassisch ab und ist vom „Vormachen und Nachmachen“ geprägt. Dabei lernen die Schülerinnen und Schüler Routinen, die sie – im besten Falle – in der Klassenarbeit oder bei Prüfungen abspulen. Entdeckendes Lernen, problemlösendes Denken oder auch das Modellieren wird inzwischen in den Lehrplänen aller Schulformen gefordert, jedoch ist es noch viel zu wenig in den Schulalltag einbezogen. Doch das programmierte Lernen von Routinen bleibt meist nicht hängen. Stattdessen prägt sich eine Eindeutigkeit von Lösungen und Lösungswegen ein, die nicht nur falsch ist, sondern auch den vielschichtigen Problemen von heute in der Regel nicht gerecht wird. Auch der Spaß und der Entdeckungsdrang bleiben dabei weitestgehend auf der Strecke. Dass „Mathemachen“ eine kreative, sinnstiftende und Freude bringende Tätigkeit ist, erfahren die Schülerinnen und Schüler so nur in Extra-Angeboten.

Wir wissen aber auch, dass sich viel tut: Während unserer Arbeit im Netzwerkbüro Schule-Hochschule der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV) haben wir über die Jahre viele engagierte Lehrerinnen und Lehrer sowie Dozierende aus Universitäten, Privatpersonen oder auch Unternehmen aus der Wirtschaft kennengelernt, die spannende Mathematikprojekte anbieten. Gleichwohl sehen wir, dass erst der Anfang gemacht und noch viel zu tun ist. Eine flächendeckende Umsetzung dieser Ideen konnte aus verschiedenen Gründen bisher nicht realisiert werden. Deshalb wird ein Gefühl dafür, was Mathematik wirklich ist und was es bedeutet, mathematisch zu denken und zu arbeiten, noch zu selten vermittelt.

Mit unseren Aufgaben, die wir jährlich in **Mathe im Advent**, den mathematischen Adventskalendern veröffentlichen, möchten wir dazu beitragen, dass die Mathematik

sowohl als ein vielfältiges Wissensgebiet mit eigener Sprache und Kultur wahrgenommen wird als auch als Werkzeug zum systematischen Lösen und zum Modellieren von Problemen, das sinnvoll und gewinnbringend in der alltäglichen Welt genutzt werden kann.

Zudem soll mit unseren Mathekalenderaufgaben im Wichteldorf das „Mathemachen“ als ein kreativer und anregender Prozess erfahren werden, welcher den in jedem Menschen innewohnenden Entdeckerdrang nutzt und fördert. Mathematikerinnen und Mathematiker empfinden sich oft als sehr freie Menschen und suchen unentwegt nach Ideen und Lösungen, die selten jemand zuvor hatte. Die Offenheit für neue Gedankengänge, das Entdecken von und das Spielen mit konkreten oder abstrakten Mustern sind dafür so elementar wie das „Weiterdenken“.

Viele Schülerinnen und Schüler wünschten sich von uns, dass es solche Aufgaben auch zu anderen Jahreszeiten gäbe, z. B. zu Ostern oder Pfingsten. Da dies mit unseren Ressourcen nicht möglich ist, haben wir uns entschieden, die Aufgaben in einer Buchreihe zu veröffentlichen. Dieses ist nun der zweite Band. In der 2. Auflage umfasst er 26 ausgewählte, sorgfältig überarbeitete Aufgaben und Lösungen aus den ersten Jahren *Mathe im Advent* mit vielfältigen Ergänzungen für die Klassenstufen 7 bis 9. Der erste, kürzlich erschienene Band 1 bietet 28 schöne Aufgaben mit Lösungen sowie umfassenden Ergänzungen aus *Mathe im Advent* für die Klassenstufen 4 bis 6.

Zu den Aufgaben

Die Mathe-Wichtel-Aufgaben, die wir für dieses Buch noch einmal grundlegend überarbeitet und im Lösungsteil erweitert haben, tragen die oben genannten Kerngedanken und noch viel mehr in sich. Sie sind dafür konzipiert, so viele Schülerinnen und Schüler wie möglich – aber auch die Lehrkräfte, Eltern, Freunde und Verwandte, also alle daran interessierten Erwachsenen – für die Mathematik (zurück)zugewinnen. Der Spaß an den 26 Wichtel-Geschichten aber auch der sinnvolle Einbau der mathematischen Fragestellungen, der bei einfachen eingekleideten Aufgaben oft zu kurz kommt, sind deshalb die unverzichtbaren Stützpfeiler der Wichtel-Aufgaben. Die Leserinnen und Leser sollen im besten Falle gar nicht merken, dass sie gerade mathematisch arbeiten. Dies sind natürlich hoch gesteckte Ziele, die wir mit einigen Aufgaben der letzten Jahre sicher auch verfehlt haben. Aus diesen wie auch aus den gelungenen Beispielen haben wir viel gelernt und mit der Zeit ein standardisiertes Verfahren zum

Verfassen der Aufgaben entwickelt. Im ersten Schritt suchen wir nach interessanten Problemstellungen aus mathematischen Themenbereichen, die nicht oder nur peripher in der Schule behandelt werden. In diesem Buch gibt es neben mehr oder weniger vertrauten Rechen- und Geometrieaufgaben auch Aufgaben aus den Gebieten Analysis, Graphentheorie, Gruppentheorie, Kombinatorik, Optimierung, Stochastik, Topologie, Zahlentheorie sowie Themenbereichen zur Geschichte der Mathematik und zur Kulturgeschichte.

Wichtig dabei ist, dass die Schülerinnen und Schüler der 7. bis 9. Klassen aller Schulformen, für die diese Aufgaben in erster Linie konzipiert sind, ohne große Vorkenntnisse, aber mit Intuition, Neugier, ein wenig Durchhaltevermögen und „outside-the-box“-Denken die Lösungen finden können. Das Multiple-Choice-Format ist bei Millionen von eingesendeten Lösungen eine notwendige, keineswegs gewünschte Einschränkung. Offene Aufgabenstellungen wären leichter zu verfassen, zudem aus unserer Sicht besser geeignet, die oben genannten Ziele zu erreichen. Wenn Sie die Aufgaben im Unterricht einsetzen oder sich anderweitig mit ihnen befassen, können Sie die Antwortmöglichkeiten natürlich weglassen. Dadurch verlieren Sie allerdings die Möglichkeit, das Ausschlussverfahren als Lösungsweg zu nutzen, was manche Aufgaben sehr viel komplexer macht. Die Fragestellungen sind so offen wie möglich gehalten, sodass die Lösungen fast immer über verschiedene Wege gefunden werden können. Diese stellen wir in unseren ausführlichen und altersgerechten Lösungen vor, erheben dabei jedoch keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Nichts in der Mathematik ist schlimmer als das Denken in Einbahnstraßen.

Die Aufgaben haben unterschiedliche Schwierigkeitsgrade, beinhalten aber keine „mathematischen Tricks“, denn diese sind nur zum Verunsichern geeignet und bewirken bei denjenigen, denen wir ein positives Erlebnis mit der Mathematik vermitteln wollen, eher das Gegenteil. In diesem Buch haben wir die Aufgaben ungefähr von leicht nach schwer geordnet. Die Einschätzung der Schwierigkeitsgrade bleibt jedoch eine individuelle Angelegenheit. Tiefergehende Gedanken zu den jeweiligen Themen werden in der Lösung oder danach im „Blick über den Tellerrand“ oder in der Kategorie „Zum Weiterdenken“ angesprochen. Mit diesem Ansatz können wir die unterschiedlichen Vorkenntnisse in den verschiedenen Klassenstufen ausgleichen, ohne die Fortgeschrittenen zu langweilen. Deshalb sind die Mathe-Wichtel-Aufgaben sowohl für jüngere (Begabte ab der 4. Klasse) als auch für ältere Schülerinnen und Schüler aller Schulformen (nicht nur Gymnasien) und sogar für Erwachsene geeignet.

Im zweiten Schritt wird das mathematische Problem möglichst sinnvoll und verborgen in eine fantasie- oder humorvolle Geschichte eingebettet. Das fiktive Wichteldorf mit den Rentieren und dem Weihnachtsmann bietet dabei den weihnachtlichen Rahmen, der ganz bewusst menschliche Züge trägt. Auf Weihnachten freut sich jeder und somit ist der Rahmen zunächst positiv besetzt. Die Geschichten sollen die Jugendlichen und Erwachsenen motivieren, sich an den 24 Tagen vor Weihnachten täglich mit „Mathematik“ zu beschäftigen und geben ihnen genügend Raum für ihre Fantasie und Kreativität. Sie erfahren so spielerisch, dass die Mathematik wirklich gebraucht wird, um alltägliche Probleme zu lösen und interessante Fragestellungen zu beantworten. Ganz unbewusst lernen sie dabei auch andere Facetten der Mathematik kennen und entdecken neue Gedankenspiele und interessante Muster. In dieser Phase der Aufgabenerstellung ergeben sich bereits die Ideen für die Illustrationen, die humorvoll und zum besseren Verständnis die Texte visuell ergänzen. Gerade bei geometrischen und graphentheoretischen Aufgaben sind diese Bilder hilfreiche Informationsträger.

Die Gleichberechtigung der Geschlechter im Wichteldorf ist uns besonders wichtig. Die Förderung der Frauen in der mathematischen Welt ist in unserer gesamten Arbeit im DMV-Netzwerkbüro und bei Mathe im Leben ein spezielles Anliegen. Auch in der Mathematikkarriere sind die Männer nach wie vor erfolgreicher, obwohl inzwischen fast ebenso viele junge Frauen ein Mathematikstudium aufnehmen und es auch in Hochschulen, Wirtschaft und Politik immer wieder positive Ausnahmen gibt. Klassische Geschlechterrollen und Stereotypen bedienen wir bewusst nicht, ohne dabei jedoch utopische Rollenbilder zu zeichnen. Die Tatsache, dass im Advent in den letzten Jahren von den jeweils über 100.000 teilnehmenden Schüler_innen mehr als die Hälfte weiblich waren und die natürliche Verteilung innerhalb der Schülerschaft widergespiegelt wurde, zeigt uns, dass wir mit diesem Ansatz erfolgreich sind und dass Mathematik nicht per se für Mädchen uninteressant ist.

Im dritten Schritt werden die Lösungswege ausführlich beschrieben und, wenn passend, mit einem „Blick über den Tellerrand“, einer „Mathematischen Exkursion“ oder Aufgaben „Zum Weiterdenken“ erweitert. Hier werden die sich aus dem Zusammenhang ergebenden mathematischen Inhalte erklärt, in einen größeren Sachzusammenhang eingebettet und durch offene Fragestellungen ergänzt.

Komplettiert wird das Buch durch das „Wichtelbook“, in dem alle 26 Wichtel dieses Buches mit einem Portraitbild und einer Beschreibung ihrer Persönlichkeit auf privater wie mathematischer Ebene aufgeführt sind. Die Wichtel haben über die Jahre ihre

eigenen Charaktere entwickelt und ausgeprägt. Mit dem Wichtelbook möchten wir die Freude, die wir beim Schreiben der Aufgaben haben, an alle weitergeben, denen unsere Aufgaben ebenso großen Spaß machen.

Im Stichwortverzeichnis sind viele mathematische Begriffe aufgelistet, die wir für den Umgang mit Mathematik und das Lösen der Aufgaben für interessant und wichtig halten. Im Nachwort möchten wir Ihnen noch das Online-Spiel **Mathe im Advent** vorstellen, falls Sie es noch nicht kennen.

Der Prozess des Aufgabenverfassens wird in jedem Jahr angereichert mit Aufgabenideen, die uns im Rahmen eines Aufgabenwettbewerbes zugesandt werden. Motivierte Lehrer_innen, Schüler_innen sowie mathematische Akteure aus Universität und Wirtschaft schicken uns im Sommer ihre Aufgabenideen zu, die wir sichten und – nach Aufnahme in die Auswahl der 24 **Mathe im Advent**-Aufgaben – an unser Geschichtenformat mit seinen oben beschriebenen Kriterien anpassen. Einige von ihnen finden Sie auch in diesem Buch, sie sind dementsprechend gekennzeichnet. Wir bedanken uns bei allen, die uns Aufgabenvorschläge eingereicht haben. Wir wünschen uns, dass Sie **Mathe im Advent** auch in Zukunft mit Ihren Ideen bereichern!

Zur Verwendung der Aufgaben

Die Mathe-Wichtel-Aufgaben haben eine kommunikative Funktion. Auch wenn sie im Rahmen eines Wettbewerbs veröffentlicht werden, sollen sie dem Austausch über Ideen und Lösungsansätze zwischen den Schüler_innen dienen und genauso zum Austausch und der Auseinandersetzung mit „Mathematik“ in der Familie anregen. Das Feedback, welches unser Büro jedes Jahr von Teilnehmer_innen, Eltern und Lehrer_innen bekommt, suggeriert, dass sie dieser Funktion auch gerecht werden. Oft wurde uns darüber berichtet, wie sich Schüler_innen unaufgefordert in der Pause oder daheim zusammen mit ihren Eltern über Mathematik austauschten. Zudem nehmen jährlich mehrere tausend Erwachsene im „Spaßaccount“ an **Mathe im Advent** teil. Auch sie sollen durch die Geschichtenideen und die eingebaute, für Kinder wohl weniger erkennbare Ironie Spaß mit der Mathematik haben und gern auch neue Facetten an ihr entdecken oder wieder auffrischen.

Wir empfehlen die Aufgaben dieses Buches für alle Schulformen als Intermezzo im Unterricht, für Projektwochen und Mathe-AGs, aber auch als vertiefende Beschäftigung zu Hause. Mit den stark steigenden Teilnehmerzahlen der letzten Jahre nahmen

auch immer mehr Schüler_innen und Klassen aus Haupt-/Realschulen und Förder-schulen teil. Auch hier gab es zum Teil sehr geringe Fehlerquoten. Wir möchten aller-dings darauf hinweisen, dass das Anspruchsniveau einiger Lösungswege, „Mathe-matischer Exkursionen“ und Aufgaben „Zum Weiterdenken“ eher jenem der fortge-schrittenen Schüler_innen entspricht. Wir tragen damit der Heterogenität der Schü-lerschaft Rechnung und bieten Inhalte für verschiedene Schwierigkeitsstufen an. Es sollte deshalb nicht der Anspruch für alle sein, sämtliche Passagen in Gänze nachvoll-ziehen zu können.

Beobachtungen

In den Jahren intensiver Auseinandersetzung mit den Mathe-Wichtel-Aufgaben konn-ten wir über eine Fülle an Rückmeldungen, persönlichen Gesprächen und Umfragen interessante Beobachtungen machen und verifizieren. Nicht wirklich neu, aber un-übersehbar ist, dass die Kinder und Jugendlichen extrem einfallsreiche Wege gehen, um eine (meist richtige) Lösung zu finden. Diese Wege wurden teilweise durch das korrigierende Eingreifen von Erwachsenen, vor allem im Elternhaus, eingeschränkt und führten dann oft zu falschen Annahmen und Ergebnissen. Auffällig ist, dass in diesen Fällen häufig nach einem „Trick“ gesucht wurde, der den entsprechenden Auf-gaben innewohnen sollte. Dies lässt auf ein einseitig ausgeprägtes, möglicherweise traumatisches Bild von der Mathematik bei den Eltern schließen, das in dieser Form auch an die Kinder weitergegeben wird.

Eine andere, für den Mathematikunterricht sehr interessante Erkenntnis ist, dass Schüler_innen bereits ab der 4. Klasse einen Sinn für die Notwendigkeit des exakten Formulierens in der Mathematik zeigen, wenn sie durch uneindeutige Wortwahl per-sönliche Nachteile erleiden. Das unpersönliche Online-Format von **Mathe im Advent** lässt keine Nachfragen zu den Aufgaben zu. Folglich wirken unklare Formulierungen verunsichernd auf die Kinder, die befürchten, bei einer falschen Auslegung die Chance zu verlieren, einen der Hauptpreise zu gewinnen. Dementsprechend vehement fiel die unmittelbare Rückmeldung in diesen – nicht immer vorhersehbaren – Fällen aus. Die Schüler_innen forderten aus eigenem Antrieb eine unmissverständliche Ausdrucks-weise, die sie im Mathematikunterricht bekanntlich eher als eine lästige Formalität empfinden. Das führte unter anderem dazu, dass in den Geschichten schönere For-mulierungen zugunsten der Eindeutigkeit geopfert werden mussten.

Dank

Viele Menschen haben dazu beigetragen, dass dieses Buch entstehen konnte. Unser besonderer Dank gilt Prof. Günter M. Ziegler, der das Projekt mit Vertrauen und großzügiger Unterstützung in unsere Hände gelegt hat, sowie unseren engsten Familienangehörigen und Freunden, die uns geduldig und beratend zur Seite standen und in den letzten Adventszeiten fast vollständig auf uns verzichten mussten.

Zudem möchten wir allen studentischen Hilfskräften und Kolleg_innen der Technischen Universität Berlin, des Forschungszentrums MATHEON und der Freien Universität Berlin danken sowie den Praktikant_innen des Netzworbüros und Mathe im Leben gGmbH und auch unseren Programmierern, die uns in diesem Projekt in den vergangenen Jahren unterstützt haben. Ohne die Mitarbeit der jungen, kreativen und selbst von der Mathematik so begeisterten Menschen wäre **Mathe im Advent** nicht das, was es jetzt ist! Ein spezieller Dank geht an diejenigen, die uns beim Entwickeln und Überarbeiten der Aufgaben und Lösungen und bei der Ausarbeitung dieses Buches geholfen haben. Dazu gehören neben den Geschichten vor allem die brillanten Illustrationen, aber auch die vielen tausend E-Mails, die unsere Studierenden jeden Tag im Dezember liebevoll und individuell verfasst haben.

Im Bild sind die Personen aus dem **Mathe im Advent**-Team, die in den ersten Jahren an der Erstellung der Aufgaben mitgewirkt haben, als Wichtel dargestellt:



oben: Robert Wöstenfeld (Geschäftsführer und Co-Founder von Mathe im Leben gGmbH), Stephanie Schiemann (Leitung Netzworbüro Schule-Hochschule der DMV und Co-Founder von Mathe im Leben gGmbH), Thomas Vogt (Medienbüro der DMV)

unten: Michael Gralmann (Haupt-Illustrator), Marten Mrotzek, Nadja Lohauß, Alexander Sittner (Studentische Hilfskräfte), Magdalene Fischer (Illustratorin), Christina Bracht (ehemalige Praktikantin)

Persönliche Anmerkung von Stephanie Schiemann

Mein Geburtsname ist Stephanie Wichtmann und viele meiner ehemaligen Schüler_innen, Kolleg_innen sowie Teilnehmer_innen der Talentförderung Mathematik in Hamburg und Niedersachsen kennen mich noch unter diesem Namen, den ich erst im Jahr der Mathematik 2008 durch Heirat abgelegt habe. Damals, als Frau Wichtmann, wurde ich von meinen Schüler_innen öfters liebevoll als „Wichtelmännchen“ bezeichnet. Da dies so wunderbar zum Namen dieses Buches passt, konnte ich mir diese Bemerkung nicht verkneifen. Ich hoffe, viele meiner Ehemaligen lesen dieses Buch und haben Spaß daran, sich an die Mathematikstunden und die Talentförderaktivitäten von damals zu erinnern.

Wir wünschen allen viel Spaß beim Lesen und Lösen der Mathe-Wichtel-Aufgaben!

Ihre Stephanie Schiemann und Robert Wöstenfeld
Berlin, im Oktober 2013

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	5
Vorwort zur 2. Auflage	7
Didaktisches Vorwort der Autoren	9
Das Wichtelbook	19
1 Ausgewählte Aufgaben aus <i>Mathe im Advent</i>	33
Travelling Weihnachtsmann	34
Der Wunschzetteltresor	36
Quatromino	38
W-Factor	40
Sortierrutschen	42
Der Tunnel	44
Eierkuchen	46
Norwegische Nachbarschaftshilfe	48
Wehe, wenn sie losgelassen	50
Ebbe und Flut	52
Fällt Weihnachten aus?	54
Erste Vorbereitungen	56
Glück auf Knopfdruck	58
Das Lichterfest	60
Der Weihnachtsmann holt die Raute raus	62
Rentiersalat	64
Wichtelnde Wichtel	66
W-Games	68
Rennschlitten	70
Einzelkinder	72
Das Gruppenbild	74
Weihnachtsbaum 2.0	76
Die Wichtel in der Sahara	78
Das gestreifte Schaf	80

Verknotete Weihnachten	82
Möbiusbänder	84
2 Lösungen und Ergänzungen zu den Aufgaben	87
Travelling Weihnachtsmann	88
Der Wunschzetteltresor	92
Quatromino	99
W-Factor	101
Sortierrutschen	109
Der Tunnel	114
Eierkuchen	117
Norwegische Nachbarschaftshilfe	119
Wehe, wenn sie losgelassen	122
Ebbe und Flut	126
Fällt Weihnachten aus?	130
Erste Vorbereitungen	134
Glück auf Knopfdruck	137
Das Lichterfest	139
Der Weihnachtsmann holt die Raute raus	142
Rentiersalat	147
Wichtelnde Wichtel	151
W-Games	157
Rennschlitten	160
Einzelkinder	162
Das Gruppenbild	166
Weihnachtsbaum 2.0	169
Die Wichtel in der Sahara	175
Das gestreifte Schaf	178
Verknotete Weihnachten	181
Möbiusbänder	183
Anhang	185
Nachwort	186
Stichwortverzeichnis	188
Übersicht zum Einsatz der Aufgaben im Unterricht.....	196

Das Wichtelbook



Die Mathe-Wichtel leben und arbeiten am Nordpol. Sie helfen dem Weihnachtsmann und organisieren das Leben im Wichteldorf. Da gibt es viel zu tun und oft müssen sie dabei ihr Wissen über die vielen verschiedenen Bereiche der Mathematik anwenden. Das ist bei den Wichteln nicht anders als bei den Menschen. Natürlich denken die Wichtel nicht die ganze Zeit über Mathematik nach. Die Geschichten in diesem Buch sammeln aber genau diese Momente, in denen sie die Mathematik verwenden, um Probleme zu lösen oder einfach damit herumzuspielen und interessante Muster und Zusammenhänge zu erkennen.

In diesen Geschichten machst du Bekanntschaft mit vielen Wichteln. Damit du sie noch besser kennenlernen kannst, gibt es das „Wichtelbook“. Hier sind sie mit Profilbildern und Details ihrer verschiedenen Persönlichkeiten dargestellt. Du kannst natürlich jederzeit zu den Aufgaben springen und dir das „Wichtelbook“ später anschauen. Wir wünschen dir viel Spaß beim Lesen und beim Entdecken zahlreicher interessanter Seiten der Mathematik!



Ada

Wichtel Ada ist Auszubildende bei den Geschenkwichteln. Mit dem Knoten von Geschenkbindern ist sie allerdings hoffnungslos unterfordert. Wenn sie nicht gerade darüber nachdenkt, wie sie ihre Arbeitsschritte standardisieren und verkürzen kann, entwickelt sie ausgeklügelte Streiche, die sie abends ihrer Freundin Ragna präsentiert. Bei der Durchführung hält sich die ruhige Ada aber meist im Hintergrund, um nicht negativ aufzufallen.

Ihren intellektuellen Ausgleich sucht sie sich nach der Arbeit, sonst würde sie geistig verarmen. Sie experimentiert mit Programmiersprachen und baut kleine Computerprogramme. Mit denen will sie eines Tages ein System finden, mit dem sie die Gewinner der Rentierwettläufe sicher vorhersagen kann.



Balduin

Statistikwichtel Balduin liebt Zahlen. Er ist einer der wichtigsten Wichtel im Weihnachtsdorf, da er dabei hilft, die Arbeit optimal zu verteilen. Er trägt dafür wahnsinnig viele Daten zusammen, wertet diese aus und stellt seine statistischen Ergebnisse für seine Wichtelkollegen grafisch dar. Das nimmt sogar seine Freizeit in Anspruch.