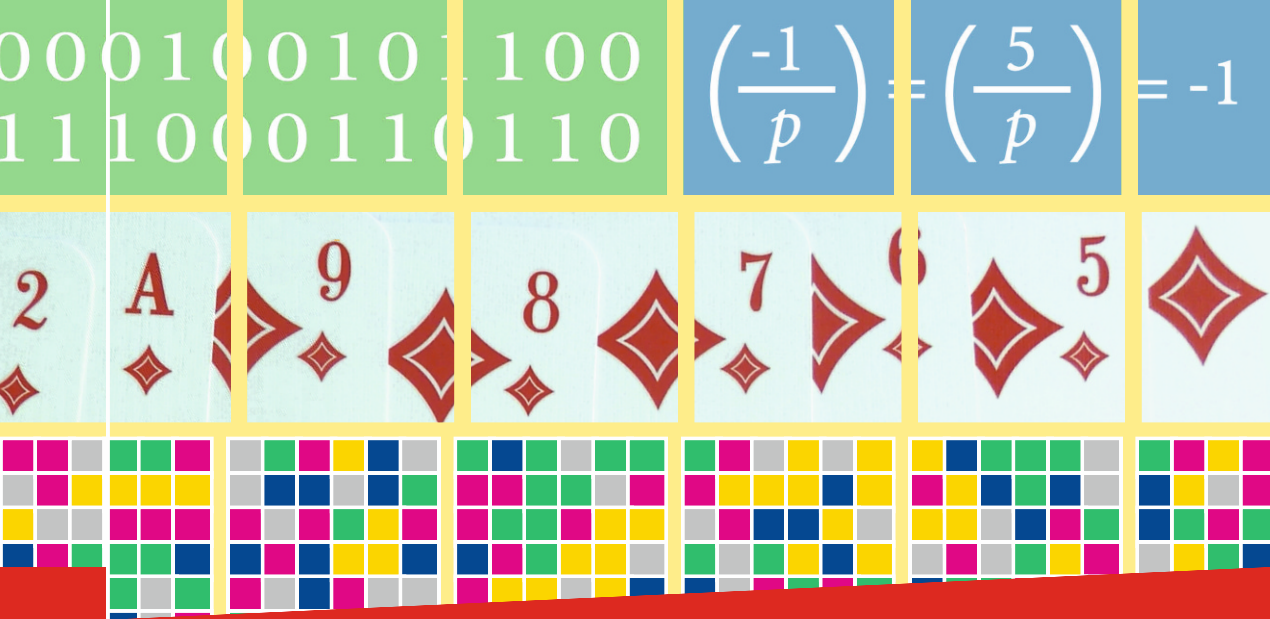


Ehrhard Behrends

Mathematik und Zaubern: Ein Einstieg für Mathematiker

Springer Spektrum

Mathematik und Zaubern: Ein Einstieg für Mathematiker

Ehrhard Behrends

Mathematik und Zaubern: Ein Einstieg für Mathematiker

Springer Spektrum

Ehrhard Behrends
Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Berlin, Deutschland

ISBN 978-3-658-17504-7 ISBN 978-3-658-17505-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-17505-4

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung: Ulrike Schmickler-Hirzebruch

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Vorwort

Dass es Zusammenhänge zwischen Zaubern und Mathematik gibt, dürfte sich weitgehend herumgesprochen haben. Die meisten werden dabei aber nur an Zaubertricks denken, bei denen einfache algebraische Operationen eine Rolle spielen.(„Denke Dir eine Zahl. Nimm sie mit Fünf mal. . . . “) Das ist allerdings der bei weitem langweiligste Aspekt. Tatsächlich ist es so, dass man Ergebnisse aus vielen mathematischen Gebieten für die Zauberei nutzen kann: Kombinatorik, Invariantentheorie, Gruppentheorie, Eigenschaften von Primzahlen, Codierungstheorie, Stochastik, . . .

Eine Auswahl findet man in meinem Buch „Der mathematische Zauberstab“, das Ende 2015 bei Rowohlt erschienen ist. Es richtet sich an interessierte Leser ohne einen mathematischen Hintergrund.

Die ganze Wahrheit ist noch viel spektakulärer. Es gibt nämlich eine Fülle von Beispielen, bei denen ein Zaubertrick beim besten Willen nicht ohne die Diskussion eines recht anspruchsvollen mathematischen Hintergrunds vollständig erklärt werden kann. Ich habe dazu eine Reihe von Arbeiten geschrieben, die in Fachzeitschriften erschienen sind.

Das Ziel des vorliegenden Buches ist es, diese Zusammenhänge darzustellen. Es richtet sich an alle interessierten Leserinnen und Leser[1)] mit einer mathematischen Vorbildung (neben Mathematikern denke ich an Informatiker, Physiker, Ingenieure, . . .), die den vergleichsweise anspruchsvollen Hintergrund der Beziehungen zwischen Zauberei und Mathematik kennen lernen wollen. Eine weitere Zielgruppe sind Studierende der Mathematik, die sich den Inhalt in einem Seminar oder Proseminar erarbeiten können.

Und auch wer sich nicht für alle Einzelheiten interessiert, findet bestimmt eine Fülle von Anregungen, um bei der nächsten Familienfeier oder dem nächsten Fest mit Freunden als Zauberer aufzutreten.

Ehrhard Behrends
Berlin, 2017

[1)] Im Interesse der besseren Lesbarkeit wird der Genderaspekt im vorliegenden Buch auf diese Fußnote reduziert: „Leserinnen“ bedeutet ab hier „Leserinnen und Leser“, „der Zauberer“ steht für „der Zauberer oder die Zauberin“, usw.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Der 13. Januar 2015 war für mich ein besonderer Tag. Ich war nach Jahrzehnten wieder einmal ein Prüfungskandidat. Als Mathematikprofessor hatte ich eine gewaltige Anzahl von Prüfungen abgenommen, es war nun eine aufregende Erfahrung, dass die Rollen Prüfer-Prüfling vertauscht waren. Es war meine Zauberprüfung, mit der ich in den Magischen Zirkel von Deutschland (MZvD) aufgenommen werden wollte. Die Prüfungskommission bestand aus drei Ortszirkelleitern, und alles wurde von etwa 10 Mitgliedern der „Zauberfreunde Berlin" aufmerksam verfolgt. Das Ganze dauerte etwa 90 Minuten.

Es begann mit einem Pflichtteil, der in Theorie („Nennen Sie fünf berühmte Zauberer des 19. Jahrunderts!"; „Wie hieß das erste gedruckte Zauberbuch?" ...) und Praxis („Führen Sie eine Münz-Palmage vor!"; „Zeigen Sie drei verschiedene Forciermöglichkeiten für Karten!", ...) unterteilt war. Dann folgte die Kür, bei der ich drei Tricks eigener Wahl präsentieren sollte. Ich hatte mir die Tricks ausgesucht, die in diesem Buch in den Kapiteln 2, 4 und 5 beschrieben werden. Die Prüfungskommission war am Ende mit meinen Leistungen zufrieden, und so wurde ich zum „geprüften" Zauberer.

Die Zauberei hat mich schon lange fasziniert, insbesondere ihre mathematischen Aspekte. Schon vor Jahren hielt ich – inspiriert durch die Bücher von Martin Gardner – einen Vortrag über „Zauberhafte Mathematik " an der Berliner Urania. Ein neuer, sehr intensiver Impuls ergab sich dann im Jahr 2012 durch die Zusammenarbeit mit dem britischen Kollegen Steve Humble. Steve hatte anlässlich einer Mathematik-und-Kunst-Aktion ein Phänomen entdeckt, das offensichtlich einen mathematischen Hintergrund hatte, der allerdings nicht offensichtlich war[2)]. Wir entschlüsselten das Rätsel, es war der Beginn einer sehr intensiven Auseinandersetzung mit den Beziehungen zwischen Mathematik und Zauberei.

Die erfolgte auf zwei Ebenen. Erstens wollte ich einem interessierten, fachlich nicht vorgebildeten Publikum die Faszination des Themas klarmachen. Das führte zu meinem bei Rowohlt im Jahr 2015 erschienenen Buch „Der mathematische Zauberstab". Und zweitens stellte sich mehrfach heraus, dass zum vollständigen Verständnis der Funktionsweise gewisser Zaubertricks eine weit anspruchsvollere Mathematik erforderlich ist, als man sie einem Laienpublikum zumuten kann. Ich schrieb einige Arbeiten, die in Fachzeitschriften erschienen sind, und diese Artikel sind der Ausgangspunkt des vorliegenden Buches.

Es enthält 15 Kapitel, die den folgenden beiden Bedingungen genügen:

- Grundlage ist ein interessanter Zaubertrick (den man übrigens auch dann vorführen kann, wenn man den mathematischen Hintergrund nicht bis in alle Einzelheiten verstanden hat).

- Die zugrunde liegende Mathematik benötigt zum Verständnis eine fachliche Vorbildung: Für mathematische Laien wird es (leider) zu schwierig.

[2)] Es handelt sich um den in Kapitel 5 beschriebenen Trick.

Hier ist eine Übersicht:

Kapitel 1: Invarianten. Invarianten sind Eigenschaften, die bei gewissen Transformationen erhalten bleiben. Für die Zauberei sind Eigenschaften eines Kartenspiels interessant, die es auch nach chaotisch aussehenden Mischoperationen garantiert noch hat. Das studieren wir am Beispiel der Hummer-Zaubertricks.

Schwierigkeitsgrad: mittel[3)].

Kapitel 2: Magische Quadrate und magische Würfel. Hier geht es um gut versteckte Folgerungen aus Kommutativ- und Assoziativgesetz. Ein Zuschauer wählt völlig frei mit Zahlen beschriftete Felder eines quadratischen Rasters. Die Summe dieser Zahlen steht schon vorher fest, und das ist auch für Mathematiker kaum zu durchschauen.

Schwierigkeitsgrad: leicht bis mittel; etwas anspruchsvoller ist nur die Übertragung der Ideen von Quadraten auf Würfel und Hyperwürfel.

Kapitel 3: Quadrate mit vorgegebener erster Zeile. Hier spielen Methoden der linearen Algebra die Hauptrolle. Insbesondere wird die Tatsache „allgemeine Lösung gleich partikuläre Lösung plus allgemeine Lösung des homogenen Systems“ mehrfach ausgenutzt.

Schwierigkeitsgrad: leicht bis mittel.

Kapitel 4: Zauberhafte Normalteiler. Wahrscheinlich erstmals in der Zauberei spielen Eigenschaften von Normalteilern in Gruppen eine Rolle. Ein Kartenspiel wird durch Mischen in eine scheinbar chaotische Reihenfolge gebracht, doch plötzlich ist die ursprüngliche Ordnung wiederhergestellt.

Schwierigkeitsgrad: mittel.

Kapitel 5: Magische Dreiecke und Primfaktoren von Binomialkoeffizienten. Ein Zuschauer legt 10 bunte Karten in eine Reihe. Die wird nach einer einfachen Regel zu einem Dreieck ergänzt: Das dauert eine Weile. Die Farbe der Karte, die als letztes gelegt wird, ist dem Zauberer schon bekannt, wenn er die erste Reihe gesehen hat. Schlüssel zur Erklärung sind Eigenschaften von Primfaktoren in Binomialkoeffizienten.

Schwierigkeitsgrad: mittel.

Kapitel 6: Magische Pyramiden: Zaubern in drei Dimensionen.

Schwierigkeitsgrad: Die Ideen aus Kapitel 5 werden verallgemeinert: Statt Dreiecken werden nun Pyramiden konstruiert. Wieder spielen – gut versteckt – Primzahlen und Binomialkoeffizienten eine Rolle.

Schwierigkeitsgrad: mittel.

Kapitel 7: Hyperpyramiden. In diesem Kapitel verlassen wir die uns anschaulich zugängliche dreidimensionale Welt. Das, was in Kapitel 5 und 6 vorgestellt wurde, erweist sich

[3)] Diese und die folgenden Einschätzungen sind natürlich subjektiv. Sie haben sich auch durch Erfahrungen in mehreren Seminaren und Proseminaren an der FU Berlin zum Thema ergeben.

als Spezialfall von Ergebnissen für beliebig hochdimensionale Räume. (Der praktische Nutzen dieser Ergebnisse für Zauberer in unserer Welt sollte allerdings nicht zu hoch eingeschätzt werden.)

Schwierigkeitsgrad: mittel (der schreibtechnische Aufwand ist aber ziemlich erheblich).

Kapitel 8: Vom Melkmischen zur Zahlentheorie. Melkmischen (Englisch „milk shuffle") ist eine spezielle Mischform, die hin und wieder für Zaubertricks eingesetzt wird. Wie oft muss man diese Mischform auf einen Kartenstapel aus n Karten anwenden, um die Ausgangsreihenfolge wiederherzustellen? (Es geht also um die Periode einer gewissen Permutation.) Überraschender Weise ist der Übergang von n zur Länge dieser Periode sehr verwickelt, und man muss zahlentheoretische Methoden anwenden, um den genauen Zusammenhang zu entschlüsseln.

Schwierigkeitsgrad: mittel bis hoch.

Kapitel 9: Fibonacci zaubert mit quadratischen Resten. Man kann in der Restklassengruppe $\mathbb{Z}_m$ zwei Zahlen x_0, x_1 vorgeben und dann rekursiv eine Folge (x_n) durch $x_{n+1} := x_n + x_{n-1} \bmod n$ (für $n \geq 1$) definieren. Es ist nicht überraschend, dass diese Folge periodisch ist. Bemerkenswerter Weise gibt es aber Situationen, bei denen die Summe der x_n über eine Periode unabhängig von x_0, x_1 ist. (Dabei ist die Wahl $x_0 = x_1 = 0$ nicht zugelassen.) Die Analyse kann in dem Fall erfolgreich durchgeführt werden, dass $m = p$ eine Primzahl ist. Und dann wird es wichtig zu wissen, ob -1 und 5 quadratische Reste modulo p sind oder nicht.

Schwierigkeitsgrad: mittel bis hoch.

Kapitel 10: Australisches Ausgeben. Beim „australischen Ausgeben" wird auf ganz spezielle Weise eine einzelne Karte aus einem Kartenspiel ausgewählt. Man braucht eine wenig offensichtliche Formel um zu berechnen, welche Karte übrig bleiben wird. Dieses Wissen lässt sich in viele interessante Zaubertricks umsetzen.

Durch eine Variante des Ausgebens ergeben sich weitere Möglichkeiten. Der mathematische Hintergrund ist allerdings weit verwickelter, und viele naheliegende Fragen sind noch offen.

Schwierigkeitsgrad: mittel bis hoch.

Kapitel 11: Ein Esel lese nie: Palindrome. Ein Palindrom ist ein Wort oder Satz, bei dem man das gleiche Ergebnis erhält, wenn man rückwärts liest. Wir konzentrieren uns auf palindromische Kartenstapel: Die äußersten Karten sind identisch (oder Partnerkarten), die zweite und vorletzte ebenfalls und so weiter. Wir zeigen, wie man solche Kartenstapel unauffälig erzeugen kann, entwickeln eine Theorie der erlaubten Mischoperationen (bleibt die Palindromeigenschaft erhalten?) und machen Vorschläge, wie man die Ergebnisse in wirkungsvolle Zaubertricks umsetzen kann.

Schwierigkeitsgrad: mittel.

Kapitel 12: Die mysteriöse Zahl 1089 und die Fibonaccizahlen. Der 1089-Trick ist ein bekannter Klassiker: Der Zuschauer wählt eine beliebige dreistellige Zahl und führt damit einige einfache Rechenschritte durch. Das Endergebnis ist garantiert 1089. Hier wird das Ergebnis auf Zahlen mit beliebig vielen Stellen verallgemeinert. Dabei gibt es zwei Überraschungen. Erstens war mir bis zu diesen Untersuchungen nicht klar, wie verwickelt Arithmetik (das Zahlenrechnen, das man schon in der Grundschule lernt) sein kann. Und zweitens ist bemerkenswert, dass hier, wo es wirklich niemand erwartet hätte, die Fibonaccizahlen auftauchen.

Schwierigkeitsgrad: hoch.

Kapitel 13: Unmöglich! Das ist ein Codierungstrick. Zauberer und Helfer vereinbaren einen schwer zu durchschauenden Code, um die Nachricht zu übertragen, welche Karte von einem Zuschauer ausgewählt worden ist.

Schwierigkeitsgrad: leicht bis mittel.

Kapitel 14: Codierung mit deBruijn-Folgen. Eine k-deBruijn-Folge ist eine 0-1-Folge der Länge 2^k, in der jede 0-1-Folge der Länge k genau einmal vorkommt. Für die Zauberei sind solche Folgen deswegen interessant, weil man sehr weitreichende Informationen erhält, wenn Zuschauer aus einem geschickt gelegten Kartenspiel Karten ziehen und dann scheinbar harmlose Fragen beantworten.

Schwierigkeitsgrad: mittel.

Kapitel 15: Ich gewinne (fast) immer. Das ist ein wahrscheinlichkeitstheoretischer Trick. Die Mathematik im Hintergrund ist interessant, man kann jedoch nicht mit Sicherheit sagen, ob er auch klappen wird. (Die Wahrscheinlichkeit, dass alles gut geht, ist allerdings beruhigend hoch.) Der Zuschauer wählt eine Farbreihenfolge, etwa rot-rot-schwarz, der Zauberer sucht sich auch eine aus, und derjenige gewinnt, dessen Farbfolge beim Aufdecken eines gut gemischten Kartenspiels zuerst erscheint. Die Chancen für den Zauberer sind bei geschickter Wahl immer besser als die des Zuschauers!

Schwierigkeitsgrad: mittel.

Am Ende des Buches findet man noch ein kurzes Literaturverzeichnis: Bücher zum Thema „Mathematik und Zaubern“, Einführungen in die Zauberkunst sowie ergänzende Literatur zu den einzelnen Kapiteln.

Wie schon im Vorwort erwähnt, kann das Buch unter verschiedenen Aspekten gelesen werden. Als Mathematiker oder sonstiger Wissenschaftler mit einem mathematischen Hintergrund (Informatik, Physik, Ingenieur, ...) kann man sich überraschen lassen, welche unterschiedlichen Aspekte der Mathematik für die Zauberei genutzt werden können.

Und für Organisatoren eines Proseminars/Seminars bieten sich die einzelnen Kapitel als Vorschläge für Vorträge an. An der FU Berlin stand das Thema „Mathematik und Zaubern“ mehrfach im Vorlesungsverzeichnis[4)]. Da die Schwierigkeitsgrade der

[4)] Am Ende gab es immer einen Praxistest: einen Workshop für ein allgemeines Publikum zur „Langen Nacht der Wissenschaften“, der von den Teilnehmern der Lehrversanstaltung mit viel Engagement durchgeführt wurde.

verschiedenen Kapitel etwas schwanken, kann man die unterschiedliche Belastbarkeit der Studierenden berücksichtigen.

Abschließend sei noch ein allgemeiner Hinweis zum Thema „Zaubern“ gestattet. In diesem Buch wird eigentlich nur der mathematische Hintergrund beschrieben. Für Zaubertricks gilt aber das gleiche wie beim Verschenken eines guten Parfums: Die Verpackung ist (mindestens) genau so wichtig wie der Inhalt.

Wer etwas mehr zur konkreten Umsetzung der Theorie in Zaubertricks erfahren möchte, findet dazu einige Tipps in meinem Buch „Der mathematische Zauberstab“. Insbesondere gibt es drei Ratschläge: üben, üben, üben! Man sollte erst dann mit einem Trick vor ein Publikum treten, wenn er „im stillen Kämmerlein“ mindestens zehn Mal geklappt hat. Zu einem richtigen kleinen Kunstwerk kann er allerdings erst dann werden, wenn er von einer engagierten und kreativen Präsentation begleitet wird. Glücklicherweise kann man dazu viele Tipps in Zauberbüchern finden (siehe das Literaturverzeichnis).

Und sollten Sie Lust darauf bekommen haben, die Beschäftigung mit der Zauberei zu intensivieren, so bietet es sich an, einen Ortszirkel des magischen Zirkels von Deutschland MZvD in Ihrer Nähe aufzusuchen. Die entsprechenden Informationen findet man im Internet unter `www.mzvd.de/der-verein/ortszirkel`.

Kapitel 1

Invarianten
... wie ein Fels in der Brandung

Mathematiker verstehen unter einer Invariante eine Eigenschaft, die unter vorgegebenen Transformationen erhalten bleibt:

- Wenn man Dreiecke in der Ebene betrachtet, so sind Winkelsumme und Flächeninhalt Invarianten unter allen Drehungen, Spiegelungen und Translationen.
- In der Topologie ist „Zusammenhang“ eine Invariante unter Homöomorphismen.
- „Endlich“ ist eine Eigenschaft von Mengen, die unter bijektiven Abbildungen invariant ist.
- ...

Wenn man sich in einer Theorie erst einmal darauf verständigt hat, was die „richtigen“ Transformationen sind, wird man versuchen, die Invarianten zu identifizieren, um das Wesentliche herauszuarbeiten.

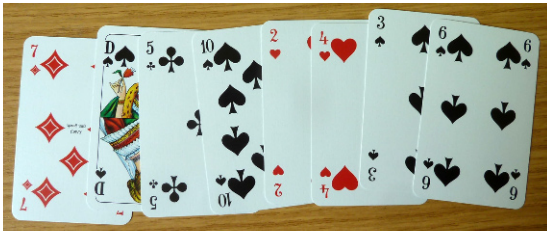
Hier soll es um Invarianten gehen, die für die Zauberei interessant sind. Wir werden Eigenschaften von Kartenspielen betrachten, die unter gewissen Mischoperationen invariant sind. Hat man so etwas gefunden, so kann man die Transformation nicht nur einmal, sondern beliebig oft anwenden: Das Spiel wird danach immer noch die entsprechende Eigenschaft haben.

Es sind allerdings zwei Aspekte zu beachten. Erstens darf die Invariante nicht so offensichtlich sein, dass sie von allen leicht durchschaut werden kann. So ist zum Beispiel die Kartenanzahl (oder die Anzahl der roten Karten im Stapel) eine Invariante unter beliebigen Mischoperationen, aber auf dieser Tatsache lässt sich bestimmt kein Zaubertrick aufbauen. Und zweitens muss es die Möglichkeit geben, mit Hilfe dieser Invariante interessante Zaubertricks zu entwickeln.

Als erstes betrachten wir die Invariante „zyklischer Abstand“. Wir stellen uns vor, dass K und K' Karten eines Kartenstapels sind und dass man k Karten weiterzählen

E. Behrends, *Mathematik und Zaubern: Ein Einstieg für Mathematiker*, DOI 10.1007/978-3-658-17505-4_1

muss, um von K nach K' zu kommen. Dabei wird vereinbart, dass vorn weitergezählt wird, wenn von K aus gesehen die Karte K' bis zum Ende des Stapels nicht vorkommt. Als Beispiel betrachten wir die folgenden Karten:



Hier liegt die ♥4 zwei weiter als die ♠10, die ♥2 vier weiter als die ♦7, die ♠ Dame zwei weiter als die ♠6 (im letzten Beispiel muss vorn weitergezählt werden).

Bemerkenswert ist nun, dass diese Zahl (wie weit muss von K nach K' weitergezählt werden?) eine Invariante bezüglich des Abhebens ist. Dabei bedeutet „abheben“: einen Teil des Stapels von oben wegnehmen und ihn dann unter den Reststapel legen. Der Beweis ist leicht, man muss nur drei Fälle unterscheiden: Wurde vor K, nach K' oder zwischen K und K' abgehoben? Den meisten Laien ist diese Tatsache unbekannt, und das ist der Grund, dass viele Zaubertricks erfolgreich darauf aufbauen.

Beispiel 1: Sortiere die Damen und Könige eines Spiels so, dass die jeweilige Partnerkarte vier Karten weiter liegt:

Der Herz König liegt vier Karten hinter der Herz Dame usw. Man kann nun das Spiel zusammenschieben und umdrehen und dann beliebig oft abheben lassen. Dann liegt vier Karten nach der obersten Karte der Partner (oder die Partnerin). Man kann die Karten unter einem Tuch verbergen, sich scheinbar gewaltig anstrengen und dann das Pärchen präsentieren. (Es geht sogar weiter: Im Reststapel bilden oberste und vierte Karte ein Pärchen usw.)

Beispiel 2: Unter Zauberern sehr beliebt ist das Prinzip der *Leitkarte*. Der Zauberer merkt sich unauffällig die unterste Karte eines gut gemischten Stapels (die Leitkarte) und lässt eine Karte ziehen. Die schaut sich der Zuschauer an, merkt sie sich und legt sie oben auf den Stapel. Nun wird einmal oder mehrfach abgehoben, die Zuschauerkarte wird direkt nach (im zyklischen Sinn) der Leitkarte liegen.

In dem vorliegenden Kapitel werden wir eine weit kompliziertere Invariante besprechen. Sie wurde von dem amerikanischen Zauberer *Bob Hummer* gefunden, der von 1906 bis 1981 lebte. Auf ihm baut eine ganze Trickfamilie auf.

Der Effekt

Zuschauer bringen ein Kartenspiel ziemlich durcheinander. Dann passiert etwas Unerklärliches:

- die Karten sind wieder „sortiert“ (rote und schwarze Karten zeigen in verschiedenen Richtungen), oder
- der Zauberer kannte schon vorher die Summe der Kartenwerte der sichtbaren Karten, oder
- der Zauberer findet zwei Karten, die sich zwei Zuschauer aus einem Kartenspiel genommen und wieder zurückgesteckt haben.

Die Mathematik im Hintergrund

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir benötigen n rote und n schwarze Karten. Diese $2n$ Karten kann man beliebig zusammenlegen, diesmal wollen wir auch erlauben, dass einige Karten umgedreht sein können, man also ihre Rückseite sieht. Das wollen wir so formalisieren:

- „r“ steht für eine rote und „s“ für eine schwarze Karte. Sieht man von so einer Karte die Rückseite, so werden wir „$-r$“ bzw. „$-s$“ schreiben.
- Ein für unsere Zwecke typischer Zustand des Kartenstapels ist also eine Folge $(x_1, \ldots, x_{2n})$, wobei $x_i \in \{r, -r, s, -s\}$. Die Menge dieser Folgen wollen wir mit Δ_{2n} bezeichnen. Sie hat offensichtlich 4^{2n} Elemente.

Im nachstehenden Bild sehen wir ein Beispiel: Der aufgefächerte Stapel ist von vorn und von hinten abgebildet. Es handelt sich um die Folge $(-s, s, r, -r, -s, s, r, -r, -s, -r)$, wenn man ihn von der einen Seite betrachtet, und daraus wird $(r, s, r, -r, -s, s, r, -r, -s, s)$, wenn man ihn umdreht.

Uns interessieren eine Eigenschaft $\mathcal{E}$ und Operationen, die diese Eigenschaft invariant lassen. (Wie man das für Zaubertricks ausnutzen kann, wird später beschrieben.) Zunächst die Eigenschaft $\mathcal{E}$.

Definition 1.1 *Wir sagen, dass ein* $(x_1, \ldots, x_{2n}) \in \Delta_{2n}$ *die Eigenschaft* $\mathcal{E}$ *hat, wenn gilt: Dreht man jede zweite Karte um, so zeigen rote und schwarze Karten in verschiedene Richtungen. Die Gesamtheit der Folgen mit* $\mathcal{E}$ *soll mit* $\Delta_{2n,\mathcal{E}}$ *bezeichnet werden.*

Etwas formaler bedeutet $\mathcal{E}$: Alle $x_2, x_4, x_6, \ldots$ gehören zu $\{r, -s\}$ und alle $x_1, x_3, \ldots$ zu $\{-r, s\}$; oder umgekehrt. Beispiele sind schnell gefunden. Die einfachsten Elemente aus $\Delta_{2n,\mathcal{E}}$ sind sicher die Folgen $(r, s, r, s, \ldots, r, s)$ und $(s, r, s, r, \ldots, s, r)$, aber man kann sich leicht davon überzeugen, dass auch der im vorstehenden Bild abgebildete Stapel diese Eigenschaft hat. Es ist auch nicht schwer, Gegenbeispiele zu finden, etwa dadurch, dass man eine einzige Karte in einem $(x_1, \ldots, x_{2n}) \in \Delta_{2n,\mathcal{E}}$ umdreht.

Nun wollen wir Abbildungen Φ auf Δ_{2n} betrachten. Dabei sollen nur solche Abbildungen zugelassen sein, für die man eine einfache „Handlungsanweisung“ angeben kann. Genauer soll das heißen, dass ein $(x_1, \ldots, x_{2n}) \in \Delta_{2n}$ unter Φ so abgebildet wird, dass Folgendes gilt:

- Die Reihenfolge darf verändert werden;
- einige Karten darf man umdrehen;
- die Vorschrift soll für alle $(x_1, \ldots, x_{2n})$ die gleiche sein.

Erlaubt ist also etwa: Vertausche die Reihenfolge der Karten an den Stellen 3 und 4 und drehe sie um. Nicht aber: Wenn x_1 eine rote Karte ist, hebe nach der ersten Karte ab, sonst nach der dritten. Formal besteht so ein Φ damit *erstens* aus einer Vorschrift, welche Karten umgedreht werden sollen und *zweitens* aus einer Permutation der Menge $\{1, \ldots, 2n\}$. Den ersten Schritt kann man durch eine Abbildung ω von $\{1, \ldots, 2n\}$ nach $\{-1, 1\}$ festlegen. Es gibt 2^{2n} derartige Abbildungen und $(2n)!$ Permutationen, und deswegen kann man Φ auf $2^{2n}(2n)!$ verschiedene Weisen definieren.

Im Folgenden werden wir solche Φ dadurch beschreiben, dass wir angeben, was mit einem allgemeinen $(x_1, \ldots, x_{2n})$ passiert. Hier einige Beispiele:

1. $\Phi(x_1, \ldots, x_{2n}) := (-x_1, -x_2, x_3, \ldots, x_{2n})$ dreht einfach die ersten beiden Karten um, die Reihenfolge bleibt erhalten. Dann ist etwa $\Phi(r, -s, r, r, s, -s, s, -r) = (-r, s, r, r, s, -s, s, -r)$. (Wollte man es ganz formal machen machen, müsste man noch definieren, dass $-(-r) := r$ und $-(-s) := s$ gelten soll.)

2. $\Phi(x_1, \ldots, x_{2n}) := (x_{2n}, \ldots, x_1)$ vertauscht die Reihenfolge, $(r, -s, r, r, s, -s, s, -r)$ zum Beispiel wird auf $(-r, s, -s, s, r, r, -s, r)$ abgebildet.

Es ist nicht schwer zu sehen, dass die $2^{2n}(2n)!$-elementige Menge der vorstehend eingeführten Φ (sie wird ab jetzt $\mathcal{G}$ genannt werden) eine Gruppe bezüglich der Abbildungsverknüpfung ist. Uns wird die folgende Frage interessieren:

Welche $\Phi \in \mathcal{G}$ lassen $\Delta_{2n,\mathcal{E}}$ invariant?

Ausführlich: Für welche Φ gilt, dass mit $(x_1, \ldots, x_{2n})$ stets auch $\Phi(x_1, \ldots, x_{2n})$ zu $\Delta_{2n,\mathcal{E}}$ gehört? Mit $\mathcal{G}_\mathcal{E}$ werden wir die Menge derjenigen $\Phi \in \mathcal{G}$ bezeichnen, die diese Eigenschaft haben. Ohne Mühe kann man nachweisen, dass $\mathcal{G}_\mathcal{E}$ eine Untergruppe von $\mathcal{G}$ ist. Doch welche Elemente gehören dazu?

Lemma 1.2 *(i) Sei $1 \le k \le 2n$. Mit A_k bezeichnen wir die durch*

$$A_k(x_1, \ldots, x_{2n}) := (x_{k+1}, \ldots, x_{2n}, x_1, \ldots, x_k)$$

definierte Abbildung[1]*. A_k gehört zu $\mathcal{G}_\mathcal{E}$.*
(ii) Es sei $2l$ eine gerade Zahl zwischen 1 und $2n$. Unter U_{2l} verstehen wir die Abbildung[2]

$$U_{2l}(x_1, \ldots, x_{2n}) := (-x_{2l}, -x_{2l-1}, \ldots, -x_1, x_{2l+1}, \ldots, x_{2n}).$$

U_{2l} liegt in $\mathcal{G}_\mathcal{E}$.

Beweis: (i) Wenn man k Karten abhebt und unter den Stapel legt, weiß man doch Folgendes:

- Ist k gerade, so liegen Karten, die vorher an einer geraden (bzw. ungeraden) Position lagen, wieder an einer geraden (bzw. ungeraden) Position.
- Ist k ungerade, so werden Karten, die vorher an einer geraden (bzw. ungeraden) Position lagen, nun an einer ungeraden (bzw. geraden) Position liegen.

Sei nun $(x_1, \ldots, x_{2n}) \in \Delta_{2n,\mathcal{E}}$ und $(y_1, \ldots, y_{2n}) := A_k(x_1, \ldots, x_{2n})$.
Fall 1a: k gerade, die $x_2, x_4, x_6, \ldots$ gehören zu $\{r, -s\}$ und die $x_1, x_3, \ldots$ zu $\{-r, s\}$. Nach Vorbemerkung gehören dann die $y_2, y_4, y_6, \ldots$ zu $\{r, -s\}$ und die $y_1, y_3, \ldots$ zu $\{-r, s\}$. Es gilt also $(y_1, \ldots, y_{2n}) \in \Delta_{2n,\mathcal{E}}$.
Fall 1b: k gerade, die $x_2, x_4, x_6, \ldots$ gehören zu $\{-r, s\}$ und die $x_1, x_3, \ldots$ zu $\{r, -s\}$. Nach Vorbemerkung gilt die entsprechende Eigenschaft auch für die $(y_1, \ldots, y_{2n})$, d.h., $(y_1, \ldots, y_{2n}) \in \Delta_{2n,\mathcal{E}}$
Die entsprechenden Fälle 2a und 2b (k ungerade) werden entsprechend behandelt. Zusammen: Mit $(x_1, \ldots, x_{2n})$ liegt auch $A_k(x_1, \ldots, x_{2n})$ stets in $\Delta_{2n,\mathcal{E}}$.
(ii) Sei $(x_1, \ldots, x_{2n}) \in \Delta_{2n,\mathcal{E}}$. Es ist $U_{2l}(x_1, \ldots, x_{2n}) \in \Delta_{2n,\mathcal{E}}$ zu beweisen.
Fall 1: Die $x_2, x_4, x_6, \ldots$ gehören zu $\{r, -s\}$ und die $x_1, x_3, \ldots$ zu $\{-r, s\}$. Wir betrachten in $U_{2l}(x_1, \ldots, x_{2n})$ irgendein Element an einer geraden Position $2s$. Ist $2s > 2l$, so hat U_{2l} nichts an ihm verändert, es ist also in $\{r, -s\}$. Im Fall $2s \le 2l$ allerdings war es vorher an einer ungeraden Position, denn durch das Umdrehen wurden gerade und ungerade Positionen vertauscht. Es lag also in $\{-r, s\}$. Da es unter U_{2l} umgedreht wurde, liegt es nun in $\{r, -s\}$. Ganz ähnlich behandelt man die Elemente an ungeraden Positionen.
Fall 2: Die $x_2, x_4, x_6, \ldots$ gehören zu $\{-r, s\}$ und die $x_1, x_3, \ldots$ zu $\{r, -s\}$. Das geht genauso wie in Fall 1 durch Fallunterscheidung nach der Position. □

Da $\mathcal{G}_\mathcal{E}$ eine Untergruppe ist, liefert das Lemma eine Fülle von Beispielen für Abbildungen aus $\mathcal{G}_\mathcal{E}$: Wenn ein Kartenstapel zu $\Delta_{2n,\mathcal{E}}$ gehört (wenn sich zum Beispiel rote und schwarze Karten abwechseln), darf man beliebig oft abheben und eine gerade Anzahl von Karten als Ganzes umdrehen; das Ergebnis wird wieder in $\Delta_{2n,\mathcal{E}}$ liegen.

[1] Es werden also k Karten abgehoben und unter den Stapel gelegt. Das „A“ soll an „abheben“ erinnern.

[2] Unter U_{2l} werden also die obersten $2l$ Karten als Ganzes umgedreht und wieder auf den Stapel gelegt. Die Abbildung heißt „U“, weil etwas „umgedreht“ wird.

Weitere Beispiele liefert

Lemma 1.3: *(i) r und $2l$ seien Zahlen, so dass $1 \leq r < r + 2l \leq 2n$. Unter $U_{r,2l}$ verstehen wir die Abbildung*[3)]

$$U_{r,2l}(x_1, \ldots, x_{2n}) := (x_1, \ldots, x_r, -x_{r+2l}, -x_{r+2l-1}, \ldots, -x_{r+1}, , x_{2l+1}, \ldots, x_{2n}).$$

$U_{r,2l}$ gehört zu $\mathcal{G}_\mathcal{E}$.

(ii) Sei I (wie „invertieren“) durch

$$I(x_1, \ldots, x_{2n}) := (x_{2l}, \ldots, x_1)$$

erklärt. I ist ein Element von $\mathcal{G}_\mathcal{E}$.

Beweis: (i) Man beachte nur, dass $U_{r,2l} = A_{2l-r} \circ U_{2l} \circ A_r$ gilt und dass wir schon wissen, dass A_{2l-r}, U_{2l}, A_r in $\mathcal{G}_\mathcal{E}$ liegen. (Wenn man das in Worten aufschreibt, bedeutet es einfach: „In der Mitte $2l$ Karten ab Position $r + 1$ umdrehen“ kann auch alternativ wie folgt erreicht werden: r Karten abheben; dann $2l$ Karten umdrehen; abschließend $2n - 2l$ Karten abheben.)

(ii) Das kann man leicht direkt einsehen, da durch Invertieren die Karten an geraden und ungeraden Positionen vertauscht werden. Es ist in Hinblick auf den folgenden Satz aber wichtig darauf hinzuweisen, dass man I auch durch Verknüpfung schon bekannter Abbildungen aus $\mathcal{G}_\mathcal{E}$ erhält. So ist etwa I im Fall $2n = 4$ als $U_2 \circ U_{1,2} \circ U_2 \circ A_1$ darstellbar, und für beliebige $2n$ lässt sich die gleiche Idee anwenden. □

Für die späteren Zauberanwendungen wären diese Ergebnisse ausreichend, aber als Mathematiker möchte man es ganz genau wissen: Sind denn durch Verknüpfung von Abbildungen der Typen A_k und U_{2l} schon alle $\Phi \in \mathcal{G}_\mathcal{E}$ erfasst, oder gibt es noch andere bisher unentdeckte Kandidaten? Die Antwort steht im folgenden

Satz 1.4: *Die Untergruppe $\mathcal{G}_\mathcal{E}$ von $\mathcal{G}$ wird von den A_k und den U_{2l} erzeugt. Dazu zeigen wir: Für jedes $\Phi \in \mathcal{G}_\mathcal{E}$ kann man geeignete*

$$\Psi_1, \ldots, \Psi_s \in \mathcal{G}_0 := \{A_k \mid k = 1, \ldots, 2n\} \cup \{U_{2l} \mid 1 \leq l \leq n\}$$

so finden, dass $\Phi = \Psi_s \circ \cdots \circ \Psi_1$ gilt.

Beweis: Wir führen eine Bezeichnung ein: Sind $\Phi', \Phi'' \in \mathcal{G}$, so schreiben wir $\Phi' \to \Phi''$, wenn man geeignete $\Psi_1, \ldots, \Psi_s$ in $\mathcal{G}_0$ so finden kann, dass Φ'' gleich $\Psi_s \circ \cdots \circ \Psi_1 \circ \Phi'$ ist. Es ist dann leicht zu sehen, dass gilt:

- Aus $\Phi' \to \Phi''$ folgt $\Phi'' \to \Phi'$. (Denn die Voraussetzung impliziert $\Phi' = \Psi_1^{-1} \circ \cdots \circ \Psi_s^{-1} \circ \Phi''$, und die Ψ_i^{-1} gehören – da $A_k^{-1} = A_{2n-k}$ und $U_{2l}^{-1} = U_{2l}$ gilt – zu $\mathcal{G}_0$.)
- $\Phi' \to \Phi''$ und $\Phi'' \to \Phi'''$ implizieren $\Phi' \to \Phi'''$ (klar).
- Gilt $\Phi' \to \Phi''$ und gehört Φ' zu $\mathcal{G}_\mathcal{E}$, so liegt auch Φ'' in $\mathcal{G}_\mathcal{E}$. (Denn $\mathcal{G}_\mathcal{E}$ ist eine Untergruppe, die $\mathcal{G}_0$ enthält.)

[3)] Diesmal werden $2l$ Karten – möglicherweise in der Mitte des Spiels, ab Position $r+1$ – umgedreht.

Sei $\Phi \in \mathcal{G}_\mathcal{E}$ vorgegeben. Unsere Beweisstrategie wird darin bestehen, dass wir durch Induktion beweisen, dass $\Phi \to \mathrm{Id}$ gilt; dabei bezeichnet Id die identische Transformation $\mathrm{Id}(x_1,\ldots,x_{2n}) := (x_1,\ldots,x_{2n})$. Daraus würde dann sofort die Behauptung folgen.

Im Beweis wird es um Transformationen Ψ gehen, die die ersten s Komponenten eines $(x_1,\ldots,x_{2n})$ fixieren. Genauer: Ψ soll ein $(x_1,\ldots,x_{2n})$ in die Folge $(x_1,\ldots,x_s, y_{s+1},\ldots,y_{2n})$ transformieren. (Die y_i sind irgendwelche x_j oder $-x_j$, wobei $j > s$.) Ein Beispiel für $s = 2$ (und $s = 1$) wäre die Abbildung

$$\Psi(x_1,\ldots,x_6) := (x_1, x_2, -x_4, x_3, -x_5, x_6).$$

Sei $\mathcal{H}_s$ die Menge dieser Ψ. Es ist klar, dass

$$\{\mathrm{Id}\} = \mathcal{H}_{2n} \subset \mathcal{H}_{2n-1} \subset \cdots \subset \mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_1$$

gilt. Wir werden zeigen:

Behauptung 1: Es gibt ein $\Phi_1 \in \mathcal{H}_1$ mit $\Phi \to \Phi_1$. Wir wissen dann schon, dass $\Phi_1 \in \mathcal{G}_\mathcal{E}$ gilt.

Behauptung 2: Liegt ein Φ_s in $\mathcal{G}_\mathcal{E}$ und in $\mathcal{H}_s$, so kann man $\Phi_{s+1} \in \mathcal{H}_{s+1}$ mit $\Phi_s \to \Phi_{s+1}$ konstruieren. Φ_{s+1} liegt auch in $\mathcal{G}_\mathcal{E}$.

Wenn das gezeigt ist, ist – aufgrund von Behauptung 1 und $(2n-1)$-maliger Anwendung von Behauptung 2 – wirklich $\Phi \to \mathrm{Id}$ bewiesen[4)] und wir sind fertig.

Beweis zu Behauptung 1: Was passiert unter Φ mit x_1? Es wird umgedreht oder auch nicht und wandert möglicherweise an eine andere Stelle, etwa an die Stelle k. Wenn x_1 *nicht* umgedreht wird, kann man es durch einfaches Abheben an die erste Position bringen, $A_{k-1} \circ \Phi$ liegt dann schon in $\mathcal{H}_1$.

Wurde x_1 aber umgedreht, so kann man es durch Anwendung von U_2 (falls $k = 1$) oder $U_{k-1,2}$ (falls $k > 1$) wieder zurückdrehen und danach durch Abheben nach vorn befördern. Da auch $U_{k-1,2}$ Produkt von Elementen aus $\mathcal{G}_0$ ist, heißt das: In jedem Fall gibt es $\Phi_1 \in \mathcal{H}_1$ mit $\Phi \to \Phi_1$.

Beweis zu Behauptung 2: Vorgelegt ist ein $\Phi_s \in \mathcal{G}_\mathcal{E}$, das die Form $\Phi_s(x_1,\ldots,x_{2n}) = (x_1,\ldots,x_s,y_{s+1},\ldots,y_{2n})$ hat, wobei die y_j gewisse x_k oder $-x_k$ mit $k > s$ sind.

Zunächst wollen wir uns um den Fall $s = 2n-1$ kümmern. Es ist dann $y_{2n} = x_{2n}$ (dann sind wir schon fertig) oder $y_{2n} = -x_{2n}$. Wir behaupten, dass der zweite Fall nicht eintreten kann. Er würde nämlich einen Widerspruch implizieren: Da $(r,s,r,s,\ldots,r,s) \in \Delta_{2n,\mathcal{E}}$ gilt, sollte auch $\Phi_{2n-1}(r,s,r,s,\ldots,r,s) = (r,s,\ldots,r,-s) \in \Delta_{2n,\mathcal{E}}$ richtig sein, doch das stimmt offensichtlich nicht.

Ganz ähnlich gehen wir im Fall $s < 2n-1$ vor. Wo ist x_{s+1} geblieben? Es ist umgedreht worden oder auch nicht und an eine Stelle k mit $s+1 \leq k \leq 2n$ gewandert. Je nachdem, ob s bzw. k gerade oder ungerade sind und ob x_{s+1} umgedreht wurde oder nicht, müssen wir unterschiedlich argumentieren. Es sind also acht Fälle zu diskutieren.

Dabei stellt sich heraus, dass wir in vier dieser Fälle die Behauptung beweisen können und dass die anderen vier nicht zu erwarten sind. Exemplarisch kümmern wir uns um den Fall, dass s und k gerade sind und illustrieren den Beweis am Fall $s = 2, k =$

[4)]Denn Id ist das einzige Element in $\mathcal{H}_{2n}$.

$4, n = 4$. Wir wissen, dass Φ_2 die Form $\Phi_2(x_1, \ldots, x_{2n}) = (x_1, x_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8)$ hat, wobei $y_4 = x_3$ oder $y_4 = -x_3$ gilt.
Fall 1: $y_4 = x_3$. Dann würde $U_{2,2} \circ \Phi_2$ ein $(x_1, \ldots, x_{2n})$ in die Folge $(x_1, x_2, -x_3, -y_3, y_5, y_6, y_7, y_8)$ transformieren. Das kann aber nicht sein, denn $U_{2,2} \circ \Phi_2$ gehört zu $\mathcal{G}_\mathcal{E}$, bildet aber $(r, s, r, s, \ldots, r, s)$ auf das Element $(r, s, -r, \ldots)$ ab[5)], das nicht zu $\Delta_{2n,\mathcal{E}}$ gehört.
Fall 2: $y_4 = -x_3$. Diesmal ist $U_{2,2} \circ \Phi_2 \in \mathcal{H}_3$, und die Behauptung ist für diesen Fall bewiesen.

Ganz ähnlich geht man für beliebige gerade s, k und in den verbleibenden drei Fällen (s ungerade, k gerade; s gerade, k ungerade; s und k ungerade) vor. □

Man könnte fragen, ob vielleicht sogar die U_{2l} ausreichen, um alle Elemente aus $\mathcal{G}_\mathcal{E}$ zu erzeugen. Die Antwort ist „nein“, man kann es wie folgt einsehen. Zunächst definieren wir:

- $\Delta_{2n,\mathcal{E},1}$ soll die Menge derjenigen $(x_1, \ldots, x_{2n}) \in \Delta_{2n}$ sein, bei denen die $x_2, x_4, x_6, \ldots$ zu $\{r, -s\}$ und die $x_1, x_3, \ldots$ zu $\{-r, s\}$ gehören.
- Mit $\Delta_{2n,\mathcal{E},2}$ bezeichnen wir die Menge der $(x_1, \ldots, x_{2n}) \in \Delta_{2n}$, bei denen die $x_2, x_4, x_6, \ldots$ zu $\{-r, s\}$ und die $x_1, x_3, \ldots$ zu $\{r, -s\}$ gehören.

Es ist dann $\Delta_{2n,\mathcal{E}} = \Delta_{2n,\mathcal{E},1} \cup \Delta_{2n,\mathcal{E},2}$. Der Beweis von Lemma 1.2 zeigt nun, dass jedes U_{2l} (und damit auch jede beliebig häufige Verknüpfung derartiger Operatoren) die Menge $\Delta_{2n,\mathcal{E},1}$ in sich und die Menge $\Delta_{2n,\mathcal{E},2}$ ebenfalls in sich abbildet. Deswegen werden in der von den U_{2l} erzeugten Untergruppe keine Operatoren aus $\mathcal{G}_\mathcal{E}$ liegen, die $\Delta_{2n,\mathcal{E},1}$ in $\Delta_{2n,\mathcal{E},2}$ abbilden (wie zum Beispiel A_1).

Viel leichter kann man begründen, dass die A_k nicht ausreichen, um alle $\Phi \in \mathcal{G}_\mathcal{E}$ zu erzeugen: Es fehlt die Möglichkeit, Karten zu drehen, man wird zum Beispiel nie U_2 allein durch Abheben erhalten.

Der Zaubertrick

Es ist wirklich eine ganze Trickfamilie. Hier folgen in Kurzfassung einige der interessantesten Möglichkeiten, die Grundidee in Zaubertricks umzusetzen.

1. Man bereitet ein Spiel vor, im dem sich rote und schwarze Karten abwechseln; dabei zeigen alle in die gleiche Richtung. Das kann offen gezeigt werden.

[5)] Es ist nicht bekannt, was nach der dritten Stelle kommt.