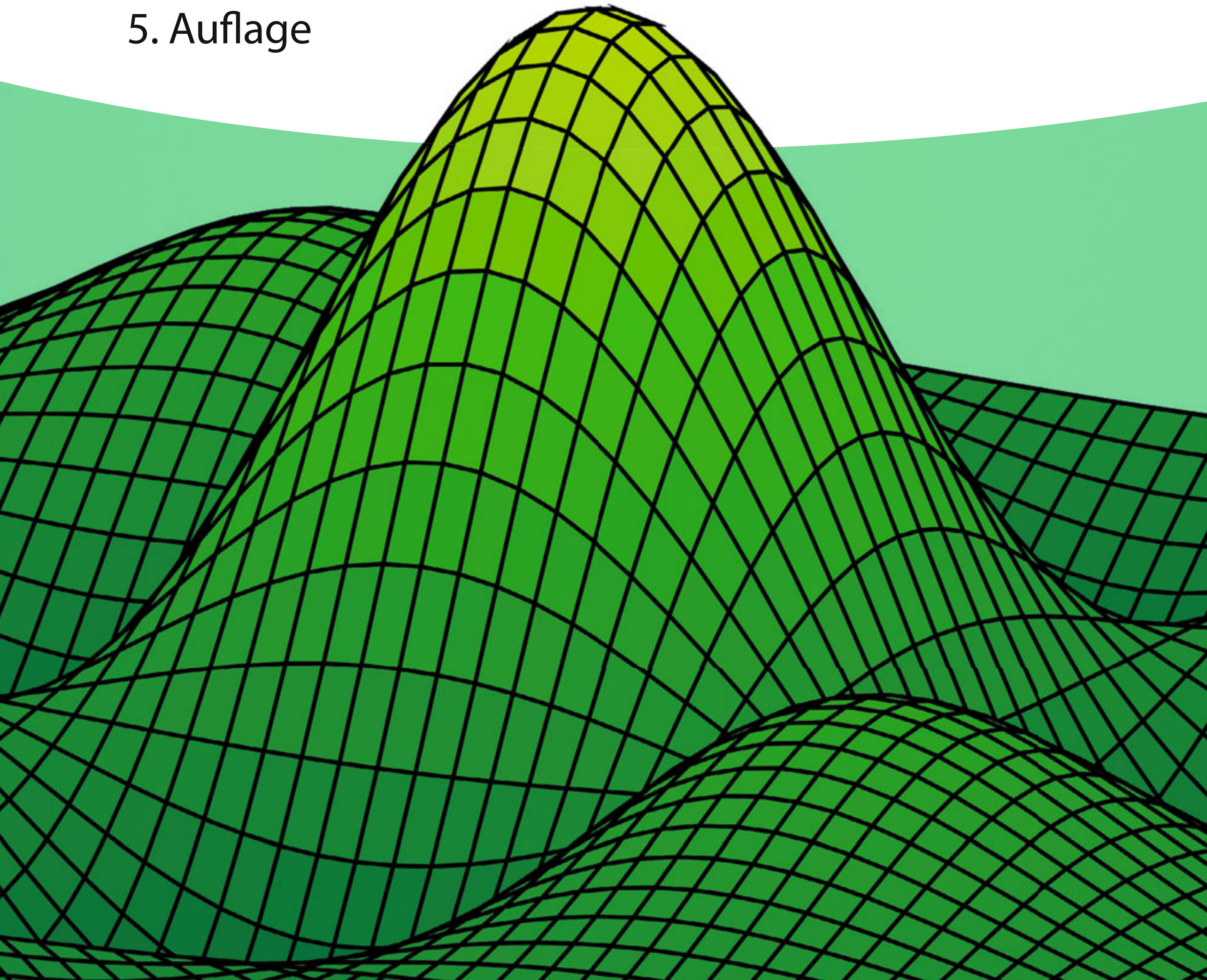
WILEY-VCH

Rainer Ansorge, Hans J. Oberle,
Kai Rothe und Thomas Sonar

Aufgaben und Lösungen

Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften 2

5. Auflage



Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften 2

Aufgaben und Lösungen

Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften 2

Aufgaben und Lösungen

Rainer Ansorge, Hans Oberle, Kai Rothe und Thomas Sonar

5. Auflage

WILEY-VCH
Verlag GmbH & Co. KGaA

Autoren

Rainer Ansorge
Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Bundesstraße 55
20146 Hamburg

Hans Oberle
Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Bundesstraße 55
20146 Hamburg

Kai Rothe
Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Bundesstraße 55
20146 Hamburg

Thomas Sonar
Technische Universität Braunschweig
Institut für Partielle Differentialgleichungen
Universitätsplatz 2
38106 Braunschweig

5. Auflage 2020

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Print ISBN 978-3-527-41377-5
ePDF ISBN 978-3-527-82294-2
ePub ISBN 978-3-433-82295-9

Umschlaggestaltung SCHULZ Grafik-Design, Fußgönheim, Deutschland
Satz le-tex publishing services GmbH, Leipzig, Deutschland

Gedruckt auf säurefreiem Papier.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur fünften Gesamtauflage

Seit der umfangreichen Erweiterung in der vierten Auflage und Teilung in zwei Aufgabenbände sind im laufenden Lehrbetrieb an der TU Hamburg-Harburg und der TU Braunschweig weitere Aufgaben neu entwickelt und getestet worden. Aus diesem Material haben wir hundert neue Aufgaben und etwa fünfzig neue Bilder für den aktuellen Band ausgewählt.

Neben neuen Aufgabentypen, beispielsweise zu den Themen Differential oder Stoß- und Verdünnungswellen bei der Burgersgleichung, wurde in allen Bereichen der Umfang der Aufgaben deutlich erhöht. Die Reihenfolge der Aufgaben wurde nach inhaltlichen Gesichtspunkten neu sortiert. Die Darstellung der Lösungen wurde insgesamt etwas verdichtet.

Dem Wiley-VCH Verlag möchten wir danken für die Anregungen zur Verbesserung der bisherigen Auflage. Insbesondere gilt hier unser Dank Herrn Preuß und Herrn Sendtko für die freundliche Zusammenarbeit.

Hamburg, Braunschweig, im August 2019 *Die Verfasser*

Vorwort zur vierten Gesamtauflage

Das anhaltende Interesse der Studierenden an den Aufgaben des dritten Bandes erfordert jetzt eine überarbeitete und erweiterte Neuauflage des Übungsmaterials. Bedanken möchten wir uns für die vielen Hinweise und Anregungen, die es uns ermöglicht haben, Fehler zu korrigieren und Darstellungen zu verbessern.

Die vorhandenen Aufgaben haben sich seit vielen Jahren im Übungsbetrieb an der TU Hamburg-Harburg, der TU Braunschweig und anderen Technischen Universitäten bewährt. Diese alten Aufgaben sind durch viele neue, die wir in den letzten Jahren in Mathematik-Kursen für Ingenieure gestellt haben, ergänzt worden. Da wir großen Wert auf die Veranschaulichung des dargestellten Stoffes legen, haben wir zahlreiche Bilder hinzugefügt. Dabei ist das Übungsmaterial so umfangreich geworden, dass sich der Verlag Wiley-VCH bereit erklärt hat, den dritten Band in zwei Teilen erscheinen zu lassen. Unser besonderer Dank gilt hier Frau Palmer und Frau Werner für die angenehme Zusammenarbeit.

Dies ist der zweite Teil, der die Aufgaben und Lösungen zur Analysis mehrerer reeller Veränderlicher, zu gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen und komplexen Funktionen enthält, also zu den Themenbereichen (Kapitel 17–27) des zweiten Bandes unseres Lehrbuches *Mathematik für Ingenieure*. Dieser Bereich ist durch über siebzig neue Aufgaben und mehr als vierzig neue Bilder erweitert worden.

Hamburg, Braunschweig, im Januar 2011 *Die Verfasser*

Vorwort zur dritten Auflage

Dieser dritte Band der *Mathematik für Ingenieure* stellt eine Auswahl von Aufgaben zusammen, die über viele Jahre an der Technischen Universität Hamburg-Harburg im Rahmen der Mathematikausbildung für Ingenieure während der ersten vier Semester gestellt worden sind. Als Grundlage dienen die zugehörigen zwei Lehrbuchbände *Mathematik für Ingenieure* von R. Ansorge und H.J. Oberle. Die Aufgaben orientieren sich inhaltlich an der dortigen Kapitelreihenfolge.

Wir kommen mit der Herausgabe dieses Aufgabenbandes dem langjährigen Wunsch der Studierenden nach zusätzlichem Übungsmaterial, insbesondere für die Vorbereitung auf Prüfungen, nach. Deshalb sind auch viele Aufgaben aus den schriftlichen Diplomvorprüfungen in die Auswahl eingegangen und an entsprechender Stelle als Klausuraufgaben gekennzeichnet worden. Der größte Teil der Aufgaben übt grundlegende mathematische Rechentechniken ein. Daneben sind jedoch auch immer wieder Aufgaben aus den Anwendungsbereichen eingeflossen und an geeigneter Stelle auch Aufgabentypen von theoretischer Natur. Wir hoffen somit einen breiten Bereich an Themen abgedeckt zu haben, der für viele Naturwissenschaftler und nicht zuletzt auch für Mathematiker interessant ist.

Im ersten Abschnitt, in den Kapiteln A.1–A.27, befinden sich die Aufgaben und im anschließenden zweiten Abschnitt, in den Kapiteln L.1–L.27, die zugehörigen Lösungen. Querverweise auf Sätze und Definitionen mit entsprechender Nummernangabe beziehen sich auf die beiden Lehrbuchbände.

Ein solches Werk kann natürlich nicht entstehen ohne die Hilfe vieler Kollegen, die uns mit Ideen, Anregungen, Aufgaben und auch Bildern zur Seite gestanden haben. Unser Dank gilt hierbei insbesondere Carl Geiger und Reiner Hass. In den letzten beiden Jahrgängen wurden die Aufgaben dieses Bandes in den Kursen Mathematik für Ingenieure gründlich behandelt und wir hoffen, dass dadurch Fehler aller Art auf ein Minimum reduziert worden sind. Besonderen Dank möchten wir hier Peywand Kiani und Andreas Meister für Ihre gründliche Prüfung aussprechen. Sollten dennoch an der einen oder anderen Stelle Fehler verblieben sein, so bitten wir dies zu entschuldigen und sind für Hinweise dankbar.

Dem Verlag, insbesondere Frau Gesine Reiher, möchten wir unseren Dank aussprechen für die freundliche Zusammenarbeit, die kritische Durchsicht des Manuskriptes und die Bereitschaft, die ersten beiden Bände mit diesem dritten Aufgabenband abzurunden.

Hamburg, Braunschweig, im Februar 2000 *Die Verfasser*

A 17
Differentialrechnung mehrerer Variabler

A17.1 Partielle Ableitungen

Aufgabe A17.1.1
Für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ berechne man die Gradienten und erstelle ein Bild, auf dem verschiedene Höhenlinien der Funktion angegeben sind. Dies sind Linien, für die $f(x, y) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt.

a) $f(x, y) = 2x + 3y$, b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$,

c) $f(x, y) = \ln(1 + x^2 y^4)$, d) $f(x, y) = 8 - 3x \sin y$.

Aufgabe A17.1.2
a) Für die durch folgende Funktionswertzuweisung definierten Funktionen

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{x}{y} \quad \text{und} \quad (x, y) \mapsto g(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

gebe man den maximalen Definitionsbereich D an und berechne alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung.

b) Die Tangentialebene an den Graphen einer differenzierbaren Funktion f im Punkt $(x^0, y^0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ lautet

$$z = f(x^0, y^0) + f_x(x^0, y^0)(x - x^0) + f_y(x^0, y^0)(y - y^0) .$$

Man bestimme jeweils die Tangentialebene für f und g aus a) im Punkt $(x^0, y^0) = (-1, 2)$.

Aufgabe A17.1.3
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 2x + e^{x+2y}$.

a) Man berechne von f alle partiellen Ableitungen bis zur 3. Ordnung.
b) Man bestimme die Tangentialebene für das gegebene f im Punkt $(x_0, y_0) = (1, -1/2)$.
c) Man gebe eine Parameterdarstellung der Höhenlinie von f an, die durch den Punkt $(0, 0)$ läuft.
d) Man berechne den Winkel α zwischen $\operatorname{grad} f(0, 0)$ und der Tangentialrichtung der Höhenlinie von f im Punkt $(0, 0)$.

Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften 2, Aufgaben und Lösungen, 5. Aufl.
Rainer Ansorge, Hans Oberle, Kai Rothe und Thomas Sonar.

Aufgabe A17.1.4
Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$.

a) Man bestimme die Höhenlinie durch den Punkt $(1, 1)$.
b) Man berechne grad f im Punkt $(1, 1)$.
c) Man zeige, dass grad $f(1, 1)$ senkrecht auf dem Tangentialvektor der Höhenlinie im Punkt $(1, 1)$ steht.
d) Man zeichne a)–c).

Aufgabe A17.1.5
Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = y\sqrt{2x^2 + y^2}$.

a) Man berechne die ersten partiellen Ableitungen von f.
b) Man überprüfe, ob f eine C^1-Funktion ist.
c) Man berechne f_{xy} und f_{yx} und bestimme den Definitionsbereich dieser Ableitungen.

Aufgabe A17.1.6
Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^3}{x^2 + y^6}\,, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0\,, & \text{falls } (x, y) = (0, 0)\,. \end{cases}$$

a) Man überprüfe, ob f im Nullpunkt stetig bzw. stetig ergänzbar ist.
b) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-0{,}5, 0{,}5] \times [-1{,}1]$.
c) Man berechne alle Richtungsableitungen von f
d) und überprüfe, ob diese im Nullpunkt stetig sind.

Aufgabe A17.1.7
a) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 2(x - y) + 2}$.
   i) Man zeichne die Funktion.
   ii) Man weise die Stetigkeit von f in ganz $\mathbb{R}^2$ nach.
   iii) Man berechne die partiellen Ableitungen von f in ganz $\mathbb{R}^2$, sofern dies möglich ist.
b) Man berechne die Gradienten der folgenden Abbildungen
   i) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = \sin(x^2 - y^3)$,
   ii) $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $h(x, y, z) = \frac{xy}{z^4+1}$.

Klausuraufgabe A17.1.8
a) Man berechne die Tangentialebene der durch $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$ gegebenen Funktion im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 0)$.
b) Für die durch $f(x, y) = \sin(\pi x^2 + \pi y)$ gegebene Funktion berechne man im Punkt $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ den Anstieg in x- und y-Richtung und die Tangentialebene.

Aufgabe A17.1.9
Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt positiv homogen vom Grad k, falls für alle $t > 0$ und $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ gilt $f(t\boldsymbol{x}) = t^k f(\boldsymbol{x})$. Man gebe ein Beispiel für eine positiv homogene Funktion vom Grad 3 an.

A17.2 Differentialoperatoren

Aufgabe A17.2.1
Für die folgenden Vektorfelder $\boldsymbol{U}(x, y, z) = (u(x, y, z)\ ,\ v(x, y, z)\ ,\ w(x, y, z))^T$ berechne man jeweils Quelldichte div $\boldsymbol{U}$ und Wirbelstärke rot $\boldsymbol{U}$:

a) $u(x, y, z) = \sin(x + y + z)\ ,\ v(x, y, z) = \cos(x + y + z)\ ,\ w(x, y, z) = 0\ ,$

b) $u(x, y, z) = y^2 + z^2\ ,\ v(x, y, z) = x^2 + z^2\ ,\ w(x, y, z) = x^2 + y^2\ ,$

c) $u(x, y, z) = \dfrac{1}{x}\ ,\ v(x, y, z) = \dfrac{1}{y}\ ,\ w(x, y, z) = \dfrac{1}{z}\ ,$

d) $u(x, y, z) = 1\ ,\ v(x, y, z) = 1\ ,\ w(x, y, z) = 1\ .$

Aufgabe A17.2.2
a) Man berechne div $\boldsymbol{f}$ und rot $\boldsymbol{f}$ für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = (2x \cosh y, x^2 \sinh y - z^3 \sin y, x + 3z^2 \cos y)^T\ .$$

b) Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{g}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))^T = (1, 2x)^T$.
   i) Man berechne div $\boldsymbol{g}$ und rot $\boldsymbol{g}$ und
   ii) skizziere das Vektorfeld und einige Stromlinien.

Aufgabe A17.2.3
a) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(x, y, z) &= (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))^T \\ &:= (\lambda x^2 + xz, -xy - yz - \lambda y^2, yz)^T\ .\end{aligned}$$

   Für welche Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ ist f wirbelfrei und für welche quellenfrei?

b) Gegeben sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$. Man berechne div(grad f) und gebe ein Beispiel an, mit div(grad f) $\neq 0$.

Aufgabe A17.2.4
a) Man zeige, dass die Wärmeleitungsgleichung $\Delta u - \frac{1}{k} u_t = 0$ mit $k > 0$ für eine Ortsvariable gelöst wird von der Funktion $u(x, t) = e^{-t} \sin \frac{x}{\sqrt{k}}$.

b) Man zeige, dass mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und $(x, y, z) \neq \boldsymbol{0}$ die Funktion $u(r, t) = \frac{1}{r} \sin(r - ct)$ die Wellengleichung $\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$ löst.

Aufgabe A17.2.5
a) Man zeige, dass die Wellengleichung $u_{tt} = c^2 \Delta u$ für eine Ortsvariable mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ gelöst wird von der Funktion $u(x, t) = 3 \ln(x + ct) - 5 \tan(x - ct)$.

b) Man zeige, dass die Funktion $u(x, y) = e^y \cos x + a + bx + cy + dxy$ mit den Konstanten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ löst.

A17.3 Das vollständige Differential

Aufgabe A17.3.1
Gegeben sei die Funktion $f(x, y, z) = xz - y^2$ mit $x, y, z \in \mathbb{R}$ und $(x_0, y_0, z_0) = (3, -1, 2)$. Man bestimme für (x_0, y_0, z_0) den Funktionswert von f, berechne eine Funktionswertnäherung für $f(3{,}1, -1{,}2, 1{,}9)$ unter Verwendung des vollständigen Differentials in (x_0, y_0, z_0) und vergleiche diese mit $f(3{,}1, -1{,}2, 1{,}9)$.

Aufgabe A17.3.2
In einer Tischlerwerkstatt soll ein Holzkegelstumpf nach den vom Auftraggeber vorgegebenen Maßen r, R und h hergestellt werden. Dabei soll das Volumen

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + rR)$$

höchstens um 1 % abweichen dürfen. Mit den vorhandenen Werkzeugen können die Längenmaße bis auf einen Fehler von 0,5 % umgesetzt werden. Kann die Werkstatt die Kundenanforderung bzgl. des Volumens garantieren?
Hinweis: Man linearisiere die Funktion.

Aufgabe A17.3.3
Für die Hintereinanderausführung folgender Funktionen berechne man mit Hilfe der Kettenregel die Jacobi-Matrizen und überprüfe das Ergebnis, indem man direkt ableite:

a) $f(x, y) = f_2(f_1(x, y)) \quad \text{mit} \quad f_1(x, y) = xy \quad \text{und} \quad f_2(t) = e^t$

b) $\boldsymbol{g}(x, y, z) = \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{g}_1(x, y, z)) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{g}_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \end{pmatrix}$

$$\text{mit} \quad \boldsymbol{g}_2(u, v) = \begin{pmatrix} uv \\ u + v \\ \sin(u + v) \end{pmatrix},$$

c) $h(t) = h_2(\boldsymbol{h}_1(t)) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{h}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h_2(x, y) = x^2 + y^2 .$

Aufgabe A17.3.4
Man berechne die Jacobi-Matrizen der durch folgende Zuordnungsvorschriften gegebenen Funktionen direkt und unter Verwendung der Kettenregel:

a) $f(x, y)\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 + y^2 \mapsto \sin(x^2 + y^2)$,

b) $\boldsymbol{g}(t)\colon t \mapsto \begin{pmatrix} x = \sin t \\ y = \cos t \end{pmatrix} \mapsto (xy, x^3, y^2)^T$,

c) $h(u, v)\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x = uv \\ y = u + v \end{pmatrix} \mapsto 3xy^2 + 2x^2 - y$,

d) $\boldsymbol{p}(u, v)\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x = uv \\ y = v^2 \\ z = v \sin u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xz \\ x^2 y^2 z \end{pmatrix}$.

Aufgabe A17.3.5
Gegeben sei eine quadratische Funktion $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ mit einer symmetrischen und positiv definiten Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$.

a) Man zeige: $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$.
b) Man sagt, dass $\boldsymbol{s}$ eine *Abstiegsrichtung* von f im Punkt $\boldsymbol{x}$ ist, falls für $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung $\nabla f(\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{s} < 0$ erfüllt ist.
Für die Funktion $\Phi(\alpha) := f(\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{s})$ berechne man $\Phi'(\alpha)$ und zeige, dass $\Phi(\alpha)$ ein eindeutig bestimmtes Minimum besitzt in

$$\alpha^* = -\frac{\boldsymbol{s}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})}{\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}} .$$

c) Man zeige, dass das Verfahren des steilsten Abstiegs auf folgende Rekursion führt:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - \frac{\boldsymbol{g}_k^T\boldsymbol{g}_k}{\boldsymbol{g}_k^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{g}_k}\boldsymbol{g}_k , \quad \boldsymbol{g}_k := \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{b} .$$

Aufgabe A17.3.6
Gegeben sei die quadratische Funktion $f(x, y) = x^2 + 2y^2$.

a) Man stelle f in der Form $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c$ mit symmetrischer Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$ dar und überprüfe, ob $\boldsymbol{A}$ positiv definit ist.
b) Man erstelle eine Höhenlinienzeichnung von f im Bereich $[-2, 2] \times [-2, 2]$.
c) Ausgehend vom Startpunkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$ führe man zwei Schritte des Gradientenverfahrens durch.

Aufgabe A17.3.7
Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 8x - 2y + 5$.

a) Man bestimme die Höhenlinie von f durch den Punkt $\boldsymbol{x}^0 = (-1, 3)^T$. Von welchem Typ ist der Kegelschnitt?

b) Man berechne die Richtungsableitung $D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}^0)$ für $\boldsymbol{v} = (1,1)^T/\sqrt{2}$. Für welches $\boldsymbol{v}$ mit $\|\boldsymbol{v}\| = 1$ wird die Richtungsableitung maximal?

Aufgabe A17.3.8
Mit $\boldsymbol{\Phi}\colon (0,R] \times (-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2$ sind die Polarkoordinaten gegeben durch

$$\boldsymbol{\Phi}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Man berechne die Spektralnorm von $\boldsymbol{J\Phi}(r,\varphi)$ und zeige mit Hilfe des Mittelwert-Abschätzungssatzes, dass $\boldsymbol{\Phi}$ lipschitzstetig auf $(0,R] \times (-\pi,\pi]$ ist.

Aufgabe A17.3.9
Die Kugelkoordinaten $\boldsymbol{\Phi}\colon D \to \mathbb{R}^3$ mit $D = (0,R] \times (-\pi,\pi] \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und $\boldsymbol{u} = (r,\varphi,\theta)^T$ sind gegeben durch

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}.$$

a) Man berechne $\|\boldsymbol{J\Phi}(\boldsymbol{u})\|_2$.
b) Man finde eine möglichst kleine Konstante K, so dass für alle $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ aus dem angegebenen Bereich gilt:

$$\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v})\|_2 \le K \cdot \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_2 .$$

Aufgabe A17.3.10
Gegeben seien die Zylinderkoordinaten

$$\boldsymbol{\Phi}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

a) Man berechne die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{J\Phi}$ und die zugehörige Transformationsdeterminante $\det \boldsymbol{J\Phi}$.
b) Man leite die folgende Darstellung des Laplace-Operators in Zylinderkoordinaten elementar unter Verwendung der Kettenregel her:

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Aufgabe A17.3.11
Man berechne $\det(\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{u}))$ für die folgenden Abbildungen $\boldsymbol{\Phi}$:

a) $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$ mit $\boldsymbol{u} = (x,y)^T$ (Lineare Abbildung);

b) $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x\,y\cos\varphi \\ x\,y\sin\varphi \\ \dfrac{x^2-y^2}{2} \end{pmatrix}$ mit $\boldsymbol{u} = (x, y, \varphi)^T$ (Rotationsparabolische Koordinaten).

Aufgabe A17.3.12
Gegeben seien die Hyberbelkoordinaten $\boldsymbol{\Phi}$ mit $(u, v) \in D := [0, 5] \times [1, 3]$ und

$$\boldsymbol{\Phi}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ x\,y \end{pmatrix}.$$

a) Man berechne $\boldsymbol{J\Phi}(x, y)$ und $\det(\boldsymbol{J\Phi}(x, y))$ sowie
b) bzgl. D: $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(u, v)$, $\boldsymbol{J\Phi}^{-1}(u, v)$ und $\det(\boldsymbol{J\Phi}^{-1}(u, v))$.
c) Man skizziere $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(D)$ im (x, y)-Koordinatensystem.
d) Man transformiere $\Delta w = w_{xx} + w_{yy}$ mit Hilfe der Kettenregel in eine Darstellung bzgl. Hyberbelkoordinaten.

A17.4 Mittelwertsätze und Taylorscher Satz

Aufgabe A17.4.1
Gegeben sei die Funktion $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\boldsymbol{f}(x, y) = \frac{1}{5}(x^3 + y\boldsymbol{x}^2 - y)$.

a) Man begründe, dass es kein $\theta \in \mathbb{R}$ gibt mit $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})\boldsymbol{h}$, wobei $\boldsymbol{h} = (2, 1)^T$ und $\boldsymbol{a} = (0, 0)^T$.
b) Man überprüfe, ob $\boldsymbol{f}$ bezüglich der Maximumnorm auf $D := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le 1 \;\wedge\; |y| \le 1\}$ eine kontrahierende Selbstabbildung ist.
c) Ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) = (1, 1)$ führe man drei Schritte des Fixpunktverfahrens durch und verschaffe sich außerdem einen Überblick über alle Fixpunkte durch Lösen der Fixpunktgleichung.

Aufgabe A17.4.2
Man berechne das Taylor-Polynom 2. Grades zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0, z_0) = (\pi, \pi, 0)$ der folgenden Funktion $f(x, y, z) = \sin(y - x) + e^{x-y+2z}$.

Klausuraufgabe A17.4.3
Man bestimme für die Funktion $f(x, y) = 1 + \ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$ die Taylor-Polynome $T_1(x, y; x_0, y_0)$ und $T_2(x, y; x_0, y_0)$ zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Klausuraufgabe A17.4.4
Gegeben sei die durch $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ definierte Funktion. Man bestimme das Taylor-Polynom zweiten Grades zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Klausuraufgabe A17.4.5
Für die durch $f(x, y) = e^{xy}$ definierte Funktion berechne man das Taylor-Polynom 2. Grades zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (2, 0)$.

Aufgabe A17.4.6

Man berechne das Taylor-Polynom $T_3(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x}^0)$ dritten Grades für die Funktion $f(x, y) = \cos x \sin y e^{x-y}$ zum Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}^0 = (0, 0)^T$

a) unter Verwendung des Satzes von Taylor,
b) mit Hilfe der Taylor-Reihen der verwendeten elementaren Funktionen in einer Dimension.

Aufgabe A17.4.7

Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = 2x^3 - 5x^2 + 3xy - 2y^2 + 9x - 9y - 9$.

a) Man berechne das Taylor-Polynom dritten Grades von f zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (1, -1)$.
b) Man gebe eine obere Schranke an nach der Restgliedformel von Lagrange für den Abstand im Nullpunkt zwischen der Funktion und der Tangentialebene im Entwicklungspunkt (x_0, y_0) und vergleiche diese mit dem tatsächlichen Abstand.

Aufgabe A17.4.8

Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = \sin x \sin y + \cos y$.

a) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-2\pi, 2\pi] \times [-2\pi, 2\pi]$.
b) Man berechne das Taylor-Polynom 3.Grades von f im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ unter Verwendung des Satzes von Taylor.
c) Man ermittle das Taylor-Polynom 3.Grades unter Verwendung der bekannten Reihenentwicklungen von sin und cos in einer Veränderlichen.
d) Man schätze den Fehler, der dadurch entsteht, wenn man T_3 anstelle von f verwendet, im Rechteck $[-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi, \pi]$ nach oben ab.

Klausuraufgabe A17.4.9

Für die durch $f(x, y) = (x + 1)^2 + x \sin(x + y)$ definierte Funktion berechne man das Taylor-Polynom 2. Grades zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, \pi)$ und schätze den Fehler, der dadurch entsteht, wenn man T_2 anstelle von f im Punkt $(x, y) = (\pi, \pi)$ verwendet, nach oben ab.

A 18
Anwendungen der Differentialrechnung

A18.1 Extrema von Funktionen mehrerer Variabler

Aufgabe A18.1.1
Man berechne alle stationären Punkte der folgenden Funktionen und klassifiziere diese:

a) $f(x, y) = xy + x - 2y - 2$,
b) $f(x, y) = x^2y^2 + 4x^2y - 2xy^2 + 4x^2 - 8xy + y^2 - 8x + 4y + 4$,
c) $f(x, y) = 4e^{x^2+y^2} - x^2 - y^2$,
d) $f(x, y, z) = -\ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)$.

Aufgabe A18.1.2
Man zeichne folgende Funktionen, berechne jeweils alle stationären Punkte und klassifiziere diese:

a) $f(x, y) = x^2 + y^4 - y^2$,
b) $f(x, y) = \sin x \sin y$,
c) $f(x, y) = x^2 \ln(|y| + 1)$,
d) $f(x, y) = x^2 + y^2 - \sqrt{2(x^2 + y^2)}$.

Aufgabe A18.1.3
Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = 12x^4 - 7x^2y + y^2$.

a) Man berechne alle stationären Punkte von f.
b) Man versuche die hinreichende Bedingung zur Klassifikation der stationären Punkte anzuwenden.
c) Man weise nach, dass f im Ursprung längs jeder Geraden durch Null ein lokales Minimum besitzt.
d) Besitzt f auch längs jeder Parabel $y = ax^2$ mit $a \in \mathbb{R}$ ein Minimum im Ursprung?
e) Man zeichne die Funktion.

Klausuraufgabe A18.1.4
a) Man berechne das Taylor-Polynom $T_2(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x}^0)$ zweiten Grades für die Funktion $f(x, y) = (2x - 3y) \cdot \sin(3x - 2y)$ zum Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}^0 = (0, 0)^T$.
b) Man ermittle die Extrema der Funktion $f(x, y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3$.

Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften 2, Aufgaben und Lösungen, 5. Aufl.
Rainer Ansorge, Hans Oberle, Kai Rothe und Thomas Sonar.

Klausuraufgabe A18.1.5
Gegeben sei die durch

$$f(x, y) = \frac{(y-1)(x+1)^2}{2} - \frac{(y+1)^2}{2} + 2$$

definierte Funktion.

a) Man bestimme alle stationären Punkte von f und klassifiziere sie.
b) Für die durch $f(x, y) = 0$ definierte Höhenlinie bestimme man alle Punkte mit horizontaler Tangente.
c) Für den Punkt $P = (-1, -3)$ gilt $f(-1, -3) = 0$. Man überprüfe, ob sich die Lösungsmenge von $f(x, y) = 0$ in einer Umgebung von P eindeutig durch eine C^1-Funktion $y(x)$ bzw. $x(y)$ darstellen lässt.

Klausuraufgabe A18.1.6
Man berechne und klassifiziere alle stationären Punkte der Funktionen:

a) $f(x, y) = \frac{1}{8}xy + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, b) $f(x, y) = x^2 + y^4 - y^2$,

c) $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8y - 4y^2$.

Klausuraufgabe A18.1.7
Gegeben sei die Funktion f mit $f(x, y) = 2x^2 - x^4 + \cosh(y-1)$.

a) Man berechne für f alle stationären Punkte und klassifiziere diese.
b) Man berechne das Taylor-Polynom 2.Grades von f im Entwicklungspunkt $(1, 1)$ und schätze den Betrag des Fehlers, der dadurch entsteht, wenn man T_2 anstelle von f verwendet, im Rechteck $[0, 1] \times [0, 1]$ nach oben ab.

A18.2 Implizit definierte Funktionen

Aufgabe A18.2.1
Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + 2x^2 - 4xy + 2y^2 - 2x - 2\,.$$

a) Welche der folgenden Punkte liegen auf der Höhenlinie $f(x, y) = 0$:

$$(x_0, y_0) = (-1, 1)\,, \quad (x_1, y_1) = \frac{1}{2}(-1, 1)\,, \quad (x_2, y_2) = (-1, 0)\ ?$$

b) Man überprüfe, ob sich die Höhenlinie $f(x, y) = 0$ in den Punkten aus a), die auf ihr liegen, durch eine C^1-Funktion parametrisieren lässt und berechne gegebenenfalls den Winkel $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ zwischen der Tangente der parametrisierten Höhenlinie in diesen Punkten und der x-Achse.
c) Man erstelle einen Höhenlinienplot von f im Bereich $[-1{,}1, -0{,}4] \times [-0{,}2, 1{,}1]$.

Aufgabe A18.2.2
Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem:

$$\boldsymbol{g}(x, y, z) := \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 6\sqrt{x^2 + y^2} + 8 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

a) Man zeige, dass $\boldsymbol{g}(0, 3, 1) = \boldsymbol{0}$ gilt.
b) Man überprüfe mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, ob sich die Gleichung $\boldsymbol{g}(x, y, z) = \boldsymbol{0}$ im Punkte $(0, 3, 1)$ lokal nach x und y oder nach x und z oder nach y und z auflösen lässt und führe gegebenenfalls diese Auflösung durch.

Aufgabe A18.2.3
a) Man beweise die lokale Auflösbarkeit von $x^2 - 2xy - y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$ nach x in einer Umgebung von $(x_0, y_0) = (3, 1)$ und berechne $h'(1)$ und $h''(1)$ für die implizit definierte Funktion $x = h(y)$.
b) Man berechne explizit die Funktion $h(y)$ aus a), gebe deren maximalen Definitionsbereich an und bestätige die berechneten Ableitungswerte.

Aufgabe A18.2.4
Gegeben sei die Funktion $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2 + 2x + 4y - 6z + 4 .$$

a) Man überprüfe, ob die Niveaumenge $h(x, y, z) = c$, die durch den Punkt $(1, 2, 2)$ festgelegt wird, in der Umgebung dieses Punktes eine glatte Fläche bildet.
b) Man löse obige Gleichung gegebenenfalls nach einer der Variablen auf, um die Fläche explizit anzugeben.
c) Man gebe im Punkt $(1, 2, 2)$ die Tangentialebene bezüglich der Fläche aus a) in Parameterform an.
d) Man zeichne die Fläche mit Tangentialebene.

Aufgabe A18.2.5
Durch $(x^2 + y^2)^2 - y(3x^2 - y^2) = 0$ ist eine Kurve implizit gegeben. Man bestimme

a) die Symmetrien der Kurve,
b) die Kurvenpunkte mit horizontaler Tangente,
c) die singulären Punkte der Kurve,
d) die Schnittpunkte der Kurve mit der Geraden $y = x$ und die Kurvensteigung in diesen Punkten.

Klausuraufgabe A18.2.6
Gegeben sei die Niveaumenge $g(x, y) = x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$.

a) Man bestimme die Symmetrien der Niveaumenge.
b) Man berechne die Punkte mit vertikaler Tangente.
c) Für den Punkt $P = (0, 1)$ gilt $g(0, 1) = 0$. Man überprüfe, ob sich die Niveaumenge in einer Umgebung von P eindeutig durch eine C^1-Funktion $y(x)$ oder $x(y)$ darstellen lässt.

A18.3 Extremalprobleme mit Nebenbedingungen

Aufgabe A18.3.1

a) Man bestimme mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatorenregel diejenigen Punkte auf dem Kreisrand $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$, die vom Punkt $(-1, 1)$ den kleinsten bzw. den größten Abstand haben und gebe die Abstände an.
b) Man bestimme die Punkte aus a) mit Hilfe geometrischer Überlegungen.

Aufgabe A18.3.2

Man bestimme absolutes Minimum und Maximum der Funktion $f(x, y, z) = x^2$ auf dem Schnitt der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ mit der Ebene $z = x$.

Aufgabe A18.3.3

Man bestimme absolutes Minimum und Maximum der Funktion $f(x, y, z) = x + y + z$ auf dem Schnitt der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ mit der Ebene $x + y - 2z = 0$ mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatorenregel.

Klausuraufgabe A18.3.4

Gegeben sei die durch $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ definierte Funktion. Man bestimme und klassifiziere alle Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) := 2(x-1)^2 + 2(y+1)^2 - 1 = 0$.

Klausuraufgabe A18.3.5

Man berechne und klassfiziere die Extremwerte der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + y^2$ auf der Niveaumenge $g(x, y) = x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ unter Verwendung der Lagrange-Multiplikatorenregel.

Klausuraufgabe A18.3.6

Man bestimme und klassifiziere die lokalen Extrema von $f(x, y) = x^2 - 2(y+1)^2$

a) mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatorenregel auf der Menge

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + 4y^2 = 1 \right\} ,$$

b) auf der Menge $Z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + 4y^2 \leq 1 \right\}$.

Klausuraufgabe A18.3.7

Man bestimme die lokalen Extrema der Funktion $f(x, y) = x^2 - \dfrac{xy}{2} + \dfrac{y^2}{4} - x$ auf der Menge

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\} .$$

Zur Untersuchung der Funktion auf dem Rand von E verwende man die Lagrange-Multiplikatorenregel.

A18.4 Das Newton-Verfahren

Aufgabe A18.4.1
Zur Berechnung eines Extremums der Funktion

$$f(x, y) = (x-1)^4 + 2(x-1)^2(y+1)^2 + (y+1)^4 - 2(x-1)^2 - 2(y+1)^2 + 1$$

soll das Newton-Verfahren auf

$$\boldsymbol{F}(x, y) := (\operatorname{grad} f(x, y))^T = 0$$

angewendet werden.

a) Man berechne $\boldsymbol{F}(x, y)$ und die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{J}\boldsymbol{F}(x, y)$.
b) Man stelle das Newton-Verfahren auf und starte es mit $\boldsymbol{x}^0 = (1{,}21, -1{,}15)^T$. Als Abbruchkriterium verwende man $\|\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{x}^k\|_\infty < 10^{-4}$.
c) Man klassifiziere das gefundene Extremum.
d) Man erstelle einen Funktionsplot von f im Bereich $[-0.2, 2{,}2] \times [-2.2, 0{,}2]$.

Aufgabe A18.4.2
Man zeige, dass das Newton-Verfahren

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k - (\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^k))^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^k)$$

zur Bestimmung einer Nullstelle von $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ gegenüber Umskalierungen der Form:

a) $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})$,
b) $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

invariant ist. Dabei seien $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ reguläre Matrizen.

A 19
Integralrechnung mehrerer Variabler

A19.1 Bereichsintegrale

Aufgabe A19.1.1
Mit $Q := [1,2] \times [0,2]$ berechne man für die Funktion

$$f\colon Q \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) = x - 2y + 3$$

a) die Riemannsche Unter- und Obersumme zu folgender Zerlegung Z von Q

$$Q_{i,j} = [1 + (i-1)/n, 1 + i/n] \times [2(j-1)/n, 2j/n]\,,\ i, j = 1, \ldots, n$$

b) und das Integral von f über Q nach dem Satz von Fubini.

Aufgabe A19.1.2
a) Man zeige, dass für die Funktion $h\colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ mit $(x,y) \mapsto h(x,y) := f(x) \cdot g(y)$ mit stetigen Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^b \int_c^d h(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

b) Man berechne $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \sinh x\ \cos y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe A19.1.3
Man berechne die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_1^2 \int_{-1}^0 (x+1)^2 + y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad$ und $\quad \displaystyle\int_{-1}^0 \int_1^2 (x+1)^2 + y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,,$

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_2^3 \frac{x^2 + y + 1}{xy + x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad$ und $\quad \displaystyle\int_2^3 \int_0^1 \frac{x^2 + y + 1}{xy + x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,,$

c) $\displaystyle\int_{-1}^3 \int_0^2 xy - x^2 + y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$

Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften 2, Aufgaben und Lösungen, 5. Aufl.
Rainer Ansorge, Hans Oberle, Kai Rothe und Thomas Sonar.

d) $\int\limits_0^4 \int\limits_0^1 \dfrac{x}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,.$

Aufgabe A19.1.4
Man berechne die folgenden Integrale:

a) $\int\limits_A e^{x-y}\,\mathrm{d}(x,y), \quad A = [0, \ln 2] \times [0, \ln 3]\,,$

b) $\int\limits_B \dfrac{y^2}{x}\,\mathrm{d}(x,y), \quad B = [1, e] \times [0, 1]\,,$

c) $\int\limits_C 4x - y\,\mathrm{d}(x,y), \quad C = [0, 1] \times [-1, 2]\,,$

d) $\int\limits_D \cos(x+y)\,\mathrm{d}(x,y), \quad D = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \times [0, \pi]\,,$

e) $\int\limits_E \dfrac{\cos y}{x^2+4}\,\mathrm{d}(x,y), \quad E = [0, 2] \times \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]\,.$

Aufgabe A19.1.5
Man berechne die folgenden Integrale:

a) $\int\limits_A xy + e^z\,\mathrm{d}(x,y,z), \quad A = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, \ln 2]$

b) $\int\limits_B \dfrac{x^2+e^y}{z+1}\,\mathrm{d}(x,y,z), \quad B = [-1, 2] \times [0, 1] \times [0, e-1]\,,$

c) $\int\limits_C \ln x + y^2 e^z\,\mathrm{d}(x,y,z), \quad C = [1, 2]^3\,,$

d) $\int\limits_D \sqrt{x+y+z}\,\mathrm{d}(x,y,z), \quad D = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]\,.$

Aufgabe A19.1.6
Man beschreibe die folgenden Mengen durch Normalbereiche:

a) den Halbkreis $H\colon x^2 + y^2 \leq 1\,,\ \ x \leq y,$
b) das durch $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq 4$ mit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ gegebene Quadrat Q,
c) die von der Höhenlinie $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ eingeschlossene Astroide A,
d) die von der Höhenlinie $(x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0$ eingeschlossene Lemniskate L,
e) das durch $x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 1$ gegebene Ellipsoid E,
f) den durch die Flächen $x+1=0,\ \ x-1=0,\ y^2+z^2=1$ berandeten Zylinder Z.

Aufgabe A19.1.7
Man skizziere den durch $x = 0$ und $x + y^2 = 4$ eingeschlossenen Bereich P und berechne $\int\int_P y^2\,\mathrm{d}(x,y)$ indem zuerst nach y und dann nach x integriert wird und indem zuerst nach x und dann nach y integriert wird.