BestMasters

Georg Radow

Eine numerische Untersuchung von Bang-Bang-Steuerungsproblemen

Springer Spektrum

BestMasters

Mit „BestMasters“ zeichnet Springer die besten Masterarbeiten aus, die an renommierten Hochschulen in Deutschland, Österreich und der Schweiz entstanden sind. Die mit Höchstnote ausgezeichneten Arbeiten wurden durch Gutachter zur Veröffentlichung empfohlen und behandeln aktuelle Themen aus unterschiedlichen Fachgebieten der Naturwissenschaften, Psychologie, Technik und Wirtschaftswissenschaften.
Die Reihe wendet sich an Praktiker und Wissenschaftler gleichermaßen und soll insbesondere auch Nachwuchswissenschaftlern Orientierung geben.

Georg Radow

Eine numerische Untersuchung von Bang-Bang-Steuerungsproblemen

Springer Spektrum

Georg Radow
Brandenburgische Technische Universität
Cottbus-Senftenberg, Deutschland

BestMasters
ISBN 978-3-658-18196-3 ISBN 978-3-658-18197-0 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-18197-0

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Inhaltsverzeichnis

Notationen

Wir bezeichnen mit $\mathbb{R}^n$ den n-dimensionalen euklidischen Vektorraum mit dem Skalarprodukt $a^\top b$ und der euklidischen Norm $|a| := \sqrt{a^\top a}$. Dabei werden mit $a \in \mathbb{R}^n$ Spaltenvektoren bezeichnet, $a^\top$ und $A^\top$ bezeichnen einen transponierten Vektor beziehungsweise eine transponierte Matrix. Die Summennorm bezeichnen wir mit $|a|_1 := \sum_{i=1}^{n} |a_i|$ und die Maximumnorm mit $|a|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} \{|a_i|\}$. Die Spektralnorm einer Matrix A bezeichnen wir mit $\|A\|$.

Der Raum der auf dem Intervall $[0,T]$ stetigen Funktionen ist $C([0,T];\mathbb{R}^n)$ und der Raum der auf dem Intervall $(0,T)$ einmal stetig differenzierbaren Funktionen ist $C^1((0,T);\mathbb{R}^n)$. Weiterhin bezeichnen wir mit $PC(0,T;\mathbb{R}^n)$ die stückweise stetigen Funktionen und mit $PC^1(0,T;\mathbb{R}^n)$ die stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Funktionen auf dem Intervall $[0,T]$.

Mit der L^p-Norm für eine Funktion $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p := \left(\int_0^T |x(t)|^p \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} \tag{0.1}$$

für $1 \leq p < \infty$ und

$$\|x\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0,T]} |x(t)| \tag{0.2}$$

für $p = \infty$ bezeichnen wir als Lebesgue-Raum $L^p(0,T;\mathbb{R}^n)$ den Raum der Funktionen, für welche die jeweilige L^p-Norm endlich ist. Den Raum

$$W_1^p(0,T;\mathbb{R}^n) := \{x \in L^p(0,T;\mathbb{R}^n) : \dot{x} \in L^p(0,T;\mathbb{R}^n)\} \tag{0.3}$$

bezeichnen wir für $1 \le p \le \infty$ als Sobolev-Raum der absolut stetigen Funktionen x mit der ersten zeitlichen schwachen Ableitung $\dot{x}$ in dem jeweiligen Lebesgue-Raum. Die zugehörige Sobolev-Norm sei

$$\|x\|_{p,1} := \left(|x(0)|^p + \|\dot{x}\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{0.4}$$

für $1 \le p < \infty$ und

$$\|x\|_{\infty,1} := \max\{|x(0)|, \|\dot{x}\|_\infty\} \tag{0.5}$$

für $p = \infty$.

Die Projektion einer Funktion $x \in L^p(0,T;\mathbb{R}^n)$ oder eines Vektors $a \in \mathbb{R}^n$ auf eine abgeschlossene konvexe Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir gleichermaßen mit $\mathrm{Proj}_\Omega(x)$ beziehungsweise $\mathrm{Proj}_\Omega(a)$.

Mit

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{0.6}$$

bezeichnen wir die partielle Ableitung einer Funktion $f(x^1,\dots,x^k)$ nach der Komponente x^i. Wir verwenden diese Bezeichnung auch dann, wenn x^i und f mehrere Komponenten haben. In diesem Fall meinen wir mit $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ die Jacobi-Matrix von f eingeschränkt auf die partiellen Ableitungen nach den Komponenten von x^i.

Ungleichungszeichen zwischen zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ sind komponentenweise zu verstehen.

Kapitel 1
Einleitung

In technischen und ökonomischen Anwendungen treten häufig Systeme auf, bei denen durch eine externe Steuerung Einfluss auf den zeitlichen Verlauf der Zustände genommen werden kann. Oftmals besteht das Interesse, solche Systeme nach bestimmten Kriterien zu optimieren. Zu diesem Zweck werden in der optimalen Steuerung für verschiedene Typen von Aufgaben die bestmöglichen Verläufe solcher Steuergrößen gesucht.

In dieser Arbeit werden wir eine linear-quadratische Aufgabe aus dem Bereich der Optimalsteuerung untersuchen, dabei treten häufig optimale Steuerungen mit einer sogenannten Bang-Bang-Struktur auf. Für solche Aufgaben wurden in den letzten Jahren mit klassischen Diskretisierungsansätzen neue Konvergenzresultate erzielt. Insbesondere wurde in [2] eine Diskretisierung einer linear-quadratischen Aufgabe untersucht und in [6] wurde die Regularisierung dieser Aufgabe behandelt.

Die vorliegende Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut: In Kapitel 2 werden wir die Aufgabe definieren, mit welcher wir uns beschäftigen und wir werden einige grundlegende Erkenntnisse aus der optimalen Steuerung zitieren.

In Kapitel 3 werden wir uns mit der eindeutigen Lösbarkeit der linear-quadratischen Aufgabe befassen und einen Regularisierungsansatz diskutieren. Mit einer Diskretisierung der regularisierten sowie der nichtregularisierten Aufgabe und der zugehörigen umfangreichen Konvergenztheorie werden wir uns in Kapitel 4 beschäftigen.

In Kapitel 5 werden wir uns auch mit zeitoptimalen Aufgaben auseinandersetzen, bevor wir schließlich in Kapitel 6 verschiedene numerische Testrechnungen untersuchen.

G. Radow, *Eine numerische Untersuchung von Bang-Bang-Steuerungsproblemen*, BestMasters,
DOI 10.1007/978-3-658-18197-0_1