

BestMasters

Georg Radow

Eine numerische Untersuchung von Bang-Bang- Steuerungsproblemen



Springer Spektrum

BestMasters

Mit „BestMasters“ zeichnet Springer die besten Masterarbeiten aus, die an renommierten Hochschulen in Deutschland, Österreich und der Schweiz entstanden sind. Die mit Höchstnote ausgezeichneten Arbeiten wurden durch Gutachter zur Veröffentlichung empfohlen und behandeln aktuelle Themen aus unterschiedlichen Fachgebieten der Naturwissenschaften, Psychologie, Technik und Wirtschaftswissenschaften.

Die Reihe wendet sich an Praktiker und Wissenschaftler gleichermaßen und soll insbesondere auch Nachwuchswissenschaftlern Orientierung geben.

Georg Radow

Eine numerische
Untersuchung
von Bang-Bang-
Steuerungsproblemen

 Springer Spektrum

Georg Radow
Brandenburgische Technische Universität
Cottbus-Senftenberg, Deutschland

BestMasters

ISBN 978-3-658-18196-3

ISBN 978-3-658-18197-0 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-658-18197-0

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2017

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature

Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Aufgabenstellung und grundlegende Eigenschaften	3
2.1	Linear-quadratische Steuerungsaufgabe	3
2.2	Grundlagen der optimalen Steuerung	5
3	Regularisierung	9
3.1	Eindeutigkeit der nicht regularisierten Aufgabe	11
3.2	Fehlerabschätzungen für die regularisierte Aufgabe	17
4	Euler-Diskretisierung	21
4.1	Fehlerabschätzungen für Steuerungen mit beschränkter Variation ..	24
4.2	Fehlerabschätzungen für Bang-Bang-Steuerungen	32
4.3	Verbesserte Fehlerabschätzungen	39
5	Zeitoptimale Aufgaben	43
5.1	Aufgabenstellung mit beliebigem Zeithorizont	43
5.2	Zeitoptimale Aufgabe mit festen Randbedingungen	46
5.3	Modifikation der zeitoptimalen Aufgabe	48
6	Numerische Untersuchungen	55
6.1	Umformung der diskretisierten Aufgabe	55
6.2	Diskretisierung der zeitoptimalen Aufgabe	59
6.3	Optimalitätstest	60
6.4	Düsenauto	63

6.5	Aufgabe mit linearem zeitunabhängigem Integralterm	69
6.6	Aufgabe mit quadratischem zeitabhängigem Integralterm	71
6.7	Ein numerischer Ansatz zur Synthese	75
6.8	Harmonischer Oszillator	80
7	Zusammenfassung	83
	Literaturverzeichnis	85

Notationen

Wir bezeichnen mit \mathbb{R}^n den n -dimensionalen euklidischen Vektorraum mit dem Skalarprodukt $a^\top b$ und der euklidischen Norm $|a| := \sqrt{a^\top a}$. Dabei werden mit $a \in \mathbb{R}^n$ Spaltenvektoren bezeichnet, a^\top und A^\top bezeichnen einen transponierten Vektor beziehungsweise eine transponierte Matrix. Die Summennorm bezeichnen wir mit $|a|_1 := \sum_{i=1}^n |a_i|$ und die Maximumnorm mit $|a|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} \{|a_i|\}$. Die Spektralnorm einer Matrix A bezeichnen wir mit $\|A\|$.

Der Raum der auf dem Intervall $[0, T]$ stetigen Funktionen ist $C([0, T]; \mathbb{R}^n)$ und der Raum der auf dem Intervall $(0, T)$ einmal stetig differenzierbaren Funktionen ist $C^1((0, T); \mathbb{R}^n)$. Weiterhin bezeichnen wir mit $PC(0, T; \mathbb{R}^n)$ die stückweise stetigen Funktionen und mit $PC^1(0, T; \mathbb{R}^n)$ die stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Funktionen auf dem Intervall $[0, T]$.

Mit der L^p -Norm für eine Funktion $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p := \left(\int_0^T |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (0.1)$$

für $1 \leq p < \infty$ und

$$\|x\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} |x(t)| \quad (0.2)$$

für $p = \infty$ bezeichnen wir als Lebesgue-Raum $L^p(0, T; \mathbb{R}^n)$ den Raum der Funktionen, für welche die jeweilige L^p -Norm endlich ist. Den Raum

$$W_1^p(0, T; \mathbb{R}^n) := \{x \in L^p(0, T; \mathbb{R}^n) : \dot{x} \in L^p(0, T; \mathbb{R}^n)\} \quad (0.3)$$

bezeichnen wir für $1 \leq p \leq \infty$ als Sobolev-Raum der absolut stetigen Funktionen x mit der ersten zeitlichen schwachen Ableitung \dot{x} in dem jeweiligen Lebesgue-Raum. Die zugehörige Sobolev-Norm sei

$$\|x\|_{p,1} := \left(|x(0)|^p + \|\dot{x}\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (0.4)$$

für $1 \leq p < \infty$ und

$$\|x\|_{\infty,1} := \max \{ |x(0)|, \|\dot{x}\|_\infty \} \quad (0.5)$$

für $p = \infty$.

Die Projektion einer Funktion $x \in L^p(0, T; \mathbb{R}^n)$ oder eines Vektors $a \in \mathbb{R}^n$ auf eine abgeschlossene konvexe Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir gleichermaßen mit $\text{Proj}_\Omega(x)$ beziehungsweise $\text{Proj}_\Omega(a)$.

Mit

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (0.6)$$

bezeichnen wir die partielle Ableitung einer Funktion $f(x^1, \dots, x^k)$ nach der Komponente x^i . Wir verwenden diese Bezeichnung auch dann, wenn x^i und f mehrere Komponenten haben. In diesem Fall meinen wir mit $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ die Jacobi-Matrix von f eingeschränkt auf die partiellen Ableitungen nach den Komponenten von x^i .

Ungleichungszeichen zwischen zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ sind komponentenweise zu verstehen.

Kapitel 1

Einleitung

In technischen und ökonomischen Anwendungen treten häufig Systeme auf, bei denen durch eine externe Steuerung Einfluss auf den zeitlichen Verlauf der Zustände genommen werden kann. Oftmals besteht das Interesse, solche Systeme nach bestimmten Kriterien zu optimieren. Zu diesem Zweck werden in der optimalen Steuerung für verschiedene Typen von Aufgaben die bestmöglichen Verläufe solcher Steuergrößen gesucht.

In dieser Arbeit werden wir eine linear-quadratische Aufgabe aus dem Bereich der Optimalsteuerung untersuchen, dabei treten häufig optimale Steuerungen mit einer sogenannten Bang-Bang-Struktur auf. Für solche Aufgaben wurden in den letzten Jahren mit klassischen Diskretisierungsansätzen neue Konvergenzresultate erzielt. Insbesondere wurde in [2] eine Diskretisierung einer linear-quadratischen Aufgabe untersucht und in [6] wurde die Regularisierung dieser Aufgabe behandelt.

Die vorliegende Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut: In Kapitel 2 werden wir die Aufgabe definieren, mit welcher wir uns beschäftigen und wir werden einige grundlegende Erkenntnisse aus der optimalen Steuerung zitieren.

In Kapitel 3 werden wir uns mit der eindeutigen Lösbarkeit der linear-quadratischen Aufgabe befassen und einen Regularisierungsansatz diskutieren. Mit einer Diskretisierung der regularisierten sowie der nichtregularisierten Aufgabe und der zugehörigen umfangreichen Konvergenztheorie werden wir uns in Kapitel 4 beschäftigen.

In Kapitel 5 werden wir uns auch mit zeitoptimalen Aufgaben auseinandersetzen, bevor wir schließlich in Kapitel 6 verschiedene numerische Testrechnungen untersuchen.