Sandro Scheid

Statistische Methoden in der Finanzwirtschaft

Methoden – Beispiele – Anwendungen

HANSER

Scheid
Statistische Methoden in der
Finanzwirtschaft

Quantitative Methoden

hrsg. von
Prof. Dr. rer. pol. Robert Galata
Prof. Dr. rer. nat. Markus Wessler

Röpcke/Wessler, Wirtschaftsmathematik

Galata/Scheid, Deskriptive und Induktive Statistik für Studierende der BWL

Galata/Wessler/Augustin/Scheid, Empirische Wirtschaftsforschung

Krischke/Röpcke, Graphen und Netzwerktheorie

Scheid, Statistische Methoden in der Finanzwirtschaft

Sandro Scheid

Statistische Methoden in der Finanzwirtschaft

Grundlagen – Methoden – Beispiele

Mit 66 Bildern und zahlreichen Tabellen

Fachbuchverlag Leipzig
im Carl Hanser Verlag

Autor:

Dr. rer. nat. Sandro Scheid
Hochschule für angewandte Wissenschaften München
Fakultät für Betriebswirtschaft
scheid@hm.edu

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

ISBN 978-3-446-44366-2
E-Book-ISBN 978-3-446-44771-4

Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag

www.hanser-fachbuch.de
Lektorat: Mirja Werner
Korrektorat: Christine Fritzsch
Herstellung: Katrin Wulst
Einbandrealisierung: Stephan Rönigk
Satz: Sandro Scheid, München
Druck und Bindung: Hubert&Co, Göttingen
Printed in Germany

Vorwort

Im Herbst 2011 fing ich meinen jetzigen Beruf als Lehrkraft für besondere Aufgaben an der betriebswirtschaftlichen Fakultät der Hochschule München bei Professor Dr. Galata an. Mit der Zeit entwickelte sich eine sehr herzliche Atmosphäre, an die ich nun gerne zurückdenke. Bereits im Herbst 2011 hatte Herr Galata die Idee ein Lehrbuch zu verfassen, dass statistische Aspekte in der Finanzbrache behandelt und Materialien für unsere Vorlesungen bereit stellen soll. Nachdem zunächst zwei weitere gemeinsame Lehrbücher entstanden waren, reichte die Zeit leider nicht mehr für ein drittes gemeinsames Buch. Bedauerlicherweise erlag Professor Dr. Galata zur Jahreswende 2015/2016 einer schweren Erkrankung.
Ich möchte das vorliegende Buch

Professor Dr. Robert Galata

widmen, ohne dessen Anstoß es nicht entstanden wäre.

Mit diesem Lehrbuch richte ich mich vor allem an Studierende der Wirtschaftswissenschaften. Es vermittelt eine Auswahl quantitativer Themen aus dem Bereich der Finanzbranche. Mit der Zielsetzung, gewohnte Themen auf einem nicht zu formalem Niveau zu behandeln, aber gleichzeitig die Methoden im quantitativen Sinne erklären zu wollen, ist der vorliegende Text auch für andere Leser interessant. So ist das Buch für Lernende die sich mit Wirtschaftswissenschaften beschäftigen, wie für Praktiker, vor allem in der Finanzbranche, die an quantitativen Aspekten hinter Methoden in diesem Bereich interessiert sind, gedacht. Vorausgesetzt werden mathematische und statistische Inhalte, wie sie im Rahmen eines betriebswirtschaftlichen Studiums an Hochschulen in den ersten zwei Semestern gelehrt werden.

Die im Buch behandelten Methoden werden großteils an realen Problemstellungen erarbeitet und schrittweise erklärt. Das Verständnis wird erleichtert durch die ausführliche Darstellung von Beispielen, die es erlauben, die Vorgehensweise der Methoden nachzuvollziehen und zu verstehen.

Mein Dank gilt den Studierenden der Fakultät für Betriebswirtschaft der Hochschule München, die durch zahlreiche Fragen und Anmerkungen zur Gestaltung des Lehrtextes beigetragen haben. Im besonderen Maße gebührt auch meinen Vorgesetzten und Kollegen bei Stat-Up und Atacama Capital Dank. Dort hatte ich die Zeit mich mit den hier geschilderten Methoden zu beschäftigen. Weiter möchte ich mich ganz besonders bei meiner Frau Petra und meinen Söhnen Simon und Benjamin bedanken, die mich während der Entstehung des Buches unterstützt haben und mich auch entbehren mussten! Ganz herzlich möchte ich mich bei Frau Werner und Frau Wulst vom Hanser Verlag, für die sehr verständnisvolle Zusammenarbeit und ihren tatkräftigen Einsatz bei der Verwirklichung des Buchprojektes bedanken. Nicht

zuletzt möchte ich der Familie Galata meinen besonderen Dank aussprechen. Ungeklärte Fragen konnten wir in einer warmen Atmosphäre klären. Ich wünsche der Familie Galata nach dem großen Verlust von Herzen alles Gute!

Kochel am See im Sommer 2017 Sandro Scheid

Inhalt

1 Einleitung

Viele Akteure aus der Finanzwelt können wahrscheinlich bestätigen, dass es schwierig ist Kursänderungen vorherzusagen. Wenn überhaupt gelingt das nur Wenigen. Es gibt einige Untersuchungen, die die Performance von aktiv gemanagten Aktienfonds zur Performance von gewöhnlichen Aktienindizes vergleichen und kommen zum Ergebnis, dass sich der Erfolg der Fondsmanager nicht signifikant gegenüber Fonds unterscheidet, die lediglich einen Index nachempfinden (z.B. Sharpe 1991). Insofern ist die Aussage, dass die zukünftige Entwicklung als zufällig angesehen werden kann, zumindest für die meisten Marktteilnehmer zutreffend. Wenn die zukünftige Entwicklung aber zufällig ist, macht es dann überhaupt Sinn, sich mit zukünftigen Entwicklungen zu beschäftigen? Ob ein Wertpapier in Zukunft steigt oder fällt, können wir nur schwer vorhersagen. Allerdings können wir Aussagen über das Risiko treffen. Waren die Kursschwankungen in der Vergangenheit hoch, so rechnen wir auch in Zukunft mit stärkeren Kursschwankungen und somit auch mit einem höheren Risiko für einen Kursrückgang. Umgekehrt ordnen wir einem Wertpapier, dessen Kurse sich in der Vergangenheit nur geringfügig geändert haben, ein geringeres Risiko zu. Im Folgenden sind Kursverläufe zweier verschiedener Wertpapiere abgebildet, die unterschiedlich stark schwanken.

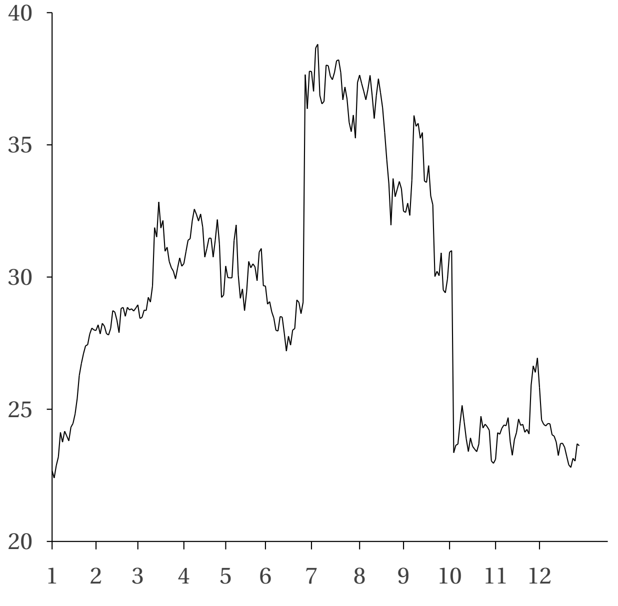

Bild 1.1 Kursverlauf der Aktie 1 über ein Jahr

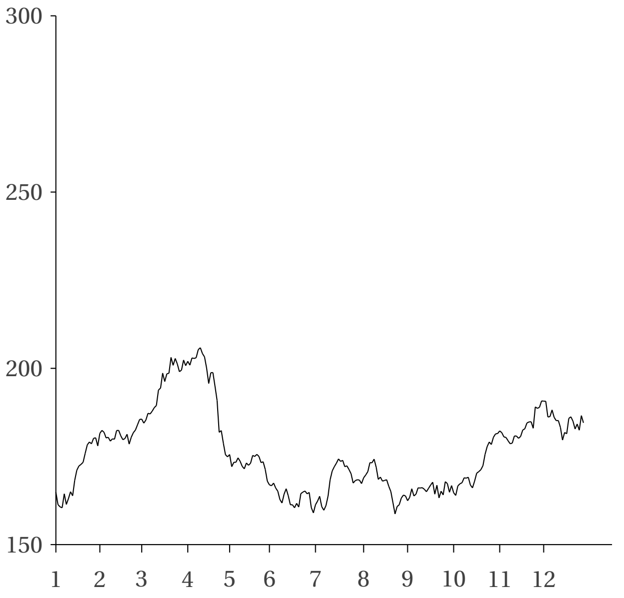

Bild 1.2 Kursverlauf der Aktie 2 über ein Jahr

Es ist zu sehen, dass sich die Aktie 1 (*Bild 1.1*) über die Zeit hinweg in stärkerem Maße ändert als die Aktie 2 (*Bild 1.2*). Fragen wir nun zum Beispiel, wie wahrscheinlich es ist, dass die Aktien binnen eines Jahres um 100% steigen oder um 50% fallen werden, so würden wir der Aktie 1 eine höhere Wahrscheinlichkeit zuordnen. Die Aktie 1 besitzt also eine höhere Chance aber auch ein höheres Risiko als die Aktie 2. Diese einfachen Überlegungen erweitern wir und gehen im Weiteren der Frage nach, wie mögliche zukünftige Verläufe durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen erklärt werden können. Zunächst beschreiben wir eine Kursänderung durch eine Zufallsvariable. Aus einer Vielzahl von Kursänderungen lässt sich dann ein ganzer Kursverlauf skizzieren. In *Bild 1.3* ist ein entsprechender zufällig erzeugter Kursverlauf zu sehen. Daneben enthält das Bild einen realen Kursverlauf. Welcher der beiden Verläufe zufällig ist, wollen wir hier offen lassen.

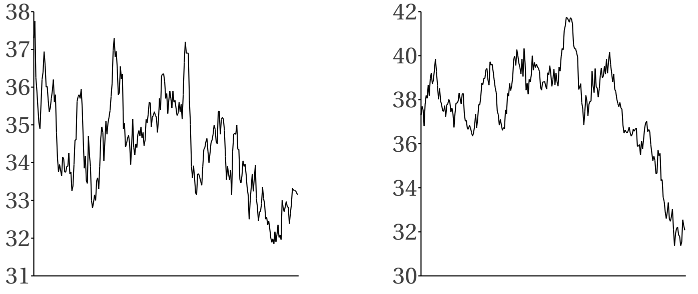

Bild 1.3 Realer und zufällig erzeugter Kursverlauf über ein Jahr

Die zufällige Beschreibung von Kursänderungen und Verläufen bildet die Grundlage für verschiedene Anwendungen, die im Buch behandelt werden. Neben den Anwendungen behandelt das Buch Grundlagen sowie weitere Modelle.

In *Kapitel 2* erörtern wir den Begriff der Rendite. Weiter gehen wir auf sogenannte Risikomaße ein, die Risiken quantifizieren, die mit Anlagen verbunden sind. Beide Thematiken sind für die weiteren Kapitel grundlegend.

Im darauf folgenden Kapitel wird die einfache lineare Regression wiederholt und Aspekte multivariater Zufallsvariablen behandelt. Auf die einfache lineare Regression wird im *Kapitel 6* zurückgegriffen. Sie ist weiter für das Verständnis des *Kapitels 7* hilfreich. Multivariate Zufallsvariablen tauchen in den *Abschnitten 4.2*, *6.5*, *7.4*, *7.5*, *7.8* und im *Kapitel 8* auf.

In *Kapitel 4* beschreiben wir Renditen durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Modelle. Wir folgern daraus, wie sich Kursverläufe stochastisch beschreiben lassen. Der Abschnitt 4.1.1 ist für das Verständnis der *Kapitel 5*, *6* und *8* grundlegend. Weiter ist der *Abschnitt 4.2* für die *Kapitel 6* und *8* hilfreich. Die *Abschnitte 4.1.6* bis *4.1.8* und *4.2.2* können beim ersten Lesen übersprungen werden. Insbesondere ist der *Abschnitt 4.2.2* als eine Ergänzung für interessierte Leser zu begreifen.

Die weiteren Kapitel bauen nicht aufeinander auf und können in beliebiger Reihenfolge gelesen werden. Die Inhalte der Kapitel sind die folgenden:

Im *Kapitel 5* bestimmen wir den fairen Wert einer Option. Eine Option gibt dem Käufer zum Beispiel das Recht, ein Wertpapier zu einem zukünftigen Termin zu einem vereinbarten Kurs zu erwerben. In *Kapitel 6* behandeln wir ein Assetwertmodell. Das Modell erlaubt die Schätzung von Ausfallrisiken aus Unternehmenskrediten. Die Ausfallrisiken werden aus den Verteilungen künftiger Kursentwicklungen hergeleitet. Im *Kapitel 7* werden Kreditausfälle durch eine logistische Regression beschrieben. Mithilfe des Modells kann die Wirkung möglicher Einflussgrößen auf die Ausfallwahrscheinlichkeit von Krediten geschätzt werden. Das Modell lässt sich auf Unternehmenskredite wie auch auf Konsumentenkredite anwenden. Es lässt sich klären, ob bestimmte Größen eine Einflusswahrscheinlichkeit besitzen. Weiter lässt sich der Einfluss quantifizieren. Im abschließenden *Kapitel 8* gehen wir der Frage nach, wie Wertpapiere in einem Portfolio gewichtet werden sollten, um das Risiko starker Kursänderungen gering zu halten. Wie kann das eingesetzte Kapital möglichst gut auf die verschiedenen Assets aufgeteilt werden, sodass eine maximale Diversifikation erreicht wird? Diese Frage nach dem Portfolio mit dem geringsten Risiko wird dann noch um eine Restriktion erweitert, die einer erwarteten durchschnittlichen Rendite Rechnung trägt.

2 Grundlegende Themen bei der Modellierung von Anlagen

In diesem Abschnitt gehen wir auf zwei wichtige Themen ein, die im Zusammenhang mit der Modellierung der Wertentwicklung von Anlagen stehen. Das erste Thema sind *Renditen*, die unmittelbar die Wertentwicklung beschreiben. Bei Renditen wird zwischen *diskreten* Renditen und *stetigen* Renditen unterschieden. In diesem Zusammenhang wird erörtert, für welche Zwecke welche Renditen zu verwenden sind. Das zweite Thema des Kapitels bilden dann *Risikomaße*. Hier werden die in der Praxis gängigsten Risikomaße beschrieben. Mathematische Betrachtungen von Risikomaßen werden kurz skizziert.

2.1 Renditen

Unter *Rendite* wird zunächst einmal umgangssprachlich der Gewinn bezogen auf das eingesetzte Kapital verstanden. Als Formel geschrieben entspricht dies

$$\text{Rendite} = \frac{\text{Gewinn}}{\text{eingesetztes Kapital}}\,.$$

Konkret bezieht sich der Gewinn stets auf eine Periode. Da er nicht zwingend ausbezahlt wird, entspricht er auch der Wertentwicklung einer Anlage über die Zeit. Bezeichnet

$$S_t$$

den Wert einer Anlage zum Zeitpunkt $t = 1, 2, \ldots$, so entspricht der Gewinn von beispielsweise $t = 1$ auf $t = 2$

$$S_2 - S_1\,.$$

Bezogen auf den Anlagebetrag in S_1 schreibt sich die Rendite von $t = 1$ auf $t = 2$ als

$$\frac{S_2 - S_1}{S_1}\,.$$

Diese nennen wir diskrete Rendite. Sie wird oft auch in Prozent ausgedrückt.

Beispiel 2.1

Die Schlusskurse der VW-Aktie und der Daimler-Aktie in den Monaten Dezember 2014 bis Februar 2015 waren:

t	Datum	Schlusskurs VW	Schlusskurs Daimler
1	30.12.2014	181,00	69,52
2	30.1.2015	197,40	80,05
3	27.2.2015	221,90	86,20

Im betrachteten Zeitraum wurde keine Dividende bezahlt. Als erstes berechnen wir die Renditen für die VW-Aktie. Die Rendite von Ende Dezember auf Ende Januar ist

$$\frac{197{,}40 - 181{,}00}{181{,}00} = 0{,}0906 \quad \text{oder} \quad 9{,}06\%\,,$$

die von Ende Januar auf Ende Februar

$$\frac{221{,}90 - 197{,}40}{197{,}40} = 0{,}1241 \quad \text{oder} \quad 12{,}41\%\,.$$

Für die Rendite der Daimler-Aktie von Ende Dezember auf Ende Januar ergibt sich

$$\frac{80{,}05 - 69{,}52}{69{,}52} = 0{,}1515 \quad \text{oder} \quad 15{,}15\%\,.$$

Von Ende Januar auf Ende Februar ist die Rendite dann:

$$\frac{86{,}20 - 80{,}05}{80{,}05} = 0{,}0768 \quad \text{oder} \quad 7{,}68\%\,.$$

■

Anmerkung: Im Weiteren wird oft mit Kursreihen gearbeitet. Im Beispiel gab es im betrachteten Zeitraum keine Ausschüttung, sodass die Renditen korrekt berechnet wurden. Im Allgemeinen ist es empfehlenswert, mit bereinigten Kursreihen zu arbeiten. Dabei werden die historischen Kurse um Ausschüttungen und Splits bereinigt, sodass die Reihe der Wertentwicklung entspricht.

Weiter sind *Zinsfaktoren* interessant. Sie ergeben sich noch einfacher, indem der Wert zum Zeitpunkt t auf den Wert zum Zeitpunkt davor bezogen wird:

$$\frac{S_t}{S_{t-1}}\,.$$

Wird vom Zinsfaktor eins abgezogen, so ergibt sich direkt die diskrete Rendite:

$$\frac{S_t}{S_{t-1}} - 1 = \frac{S_t}{S_{t-1}} - \frac{S_{t-1}}{S_{t-1}} = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}\,.$$

Wir fassen zusammen:

Diskrete Rendite
Bezeichnet S_t die Wertentwicklung eines Assets über die Zeit $t = 1, 2, \ldots$, so ist der Zinsfaktor von $t-1$ auf t durch

$$\frac{S_t}{S_{t-1}}$$

gegeben. Wird vom Zinsfaktor 1 abgezogen, so ergibt sich die diskrete Rendite:

$$\frac{S_t}{S_{t-1}} - 1 = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}\,.$$

Sie entspricht dem Wertzuwachs von $t-1$ auf t bezogen auf den Wert in t.

Wir betrachten nun Eigenschaften von Zinsfaktoren. Gilt das Interesse der Entwicklung des Anlagebetrags über die Zeit, so ergibt sich aus einem Anlagebetrag zu einem Zeitpunkt multipliziert mit dem Zinsfaktor, der jeweils nächste Betrag:

$$S_t \cdot \frac{S_{t+1}}{S_t} = S_{t+1}\,.$$

Die Entwicklung über die Zeit ist dann:

$$S_t \cdot \frac{S_{t+1}}{S_t} \cdot \frac{S_{t+2}}{S_{t+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{S_{t+k}}{S_{t+k-1}} = S_{t+k}\,.$$

Soll aus dem Produkt der k Zinsfaktoren ein durchschnittlicher Zinsfaktor G berechnet werden, so ergibt sich der Ansatz

$$\frac{S_{t+1}}{S_t} \cdot \frac{S_{t+2}}{S_{t+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{S_{t+k}}{S_{t+k-1}} = G \cdot G \cdot \ldots \cdot G = G^k\,.$$

Die Wertentwicklung auf der linken Seite wird gleichgesetzt mit der k-maligen Verzinsung mit dem identischen Zinsfaktor G. Der gesuchte durchschnittliche Zinsfaktor G über die Zeit entspricht also dem geometrischen Mittel

$$G = \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \cdot \frac{S_{t+2}}{S_{t+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{S_{t+k}}{S_{t+k-1}} \right)^{\frac{1}{k}}\,.$$

Der durchschnittliche diskrete Zinssatz ist dann:

$$G - 1\,.$$

Zinsfaktoren sind im Längsschnitt multiplikativ
Ein Anlagebetrag B im Asset S in t entwickelt sich auf $t + k$ zu

$$B \cdot \frac{S_{t+1}}{S_t} \cdot \frac{S_{t+2}}{S_{t+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{S_{t+k}}{S_{t+k-1}}\,.$$

Dies entspricht der Multiplikation von B mit den Zinsfaktoren

$$\frac{S_{t+i+1}}{S_{t+i}} \quad i = 0, \ldots, k-1\,.$$

Der durchschnittliche Zinsfaktor über die Zeit ist

$$G = \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \cdot \frac{S_{t+2}}{S_{t+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{S_{t+k}}{S_{t+k-1}} \right)^{\frac{1}{k}}\,,$$

die durchschnittliche diskrete Rendite

$$G - 1\,.$$

Beispiel 2.2

Im *Beispiel 2.1* errechneten wir für die VW-Aktie von $t = 1$ auf $t = 2$ eine diskrete Rendite von $0,0906$ und von $t = 2$ auf $t = 3$ von $0,1241$. Die Zinsfaktoren sind entsprechend $1,0906$ und $1,1241$. Daraus ergibt sich der Zinsfaktor

$$1,0906 \cdot 1,1241 = 1,2259$$

entsprechend der Wertentwicklung von $t = 1$ auf $t = 3$. Der durchschnittliche Zinsfaktor bezogen auf eine Periode ist

$$(1,2259)^{\frac{1}{2}} = 1,1072 .$$

Anhand der durchschnittlichen Rendite von 10,72% gelangt man ausgehend vom Wert in $t = 1$ wieder auf den Wert der Aktie in $t = 3$: Wird zweimal mit dem durchschnittlichen Zinsfaktor von

$$(0,1072 + 1 =)\ 1,1072$$

verzinst, so ergibt sich wieder der Kurs in $t = 3$:

$$181,00 \cdot 1,1072 \cdot 1,1072 = 221,90 .$$

■

Soll die durchschnittliche Verzinsung über die Zeit berechnet werden, so ist das *geometrische Mittel* der Zinsfaktoren angebracht. Im Gegensatz dazu ist das gewichtete *arithmetische Mittel* zu verwenden, wenn ein Anlagebetrag auf verschiedene Anlagen aufgeteilt wird und nach der durchschnittlichen Verzinsung des Vermögens innerhalb einer Periode gefragt wird. Wir betrachten beispielhaft eine Aufteilung eines Vermögens auf zwei Assets. Vom Betrag B wird in $t = 1$ der Betrag B_1 in Asset 1 und der Rest, $B_2 = B - B_1$ in Asset 2 investiert. Entwickelt sich der Betrag B_1 auf

$$B_1 \cdot \frac{S_{1,t+1}}{S_{1,t}} \qquad (S_{i,t} \text{ Wert von Asset } i \text{ zum Zeitpunkt } t)$$

in $t + 1$ und der Betrag B_2 auf

$$B_2 \cdot \frac{S_{2,t+1}}{S_{2,t}} ,$$

so ergibt sich in $t + 1$ ein Vermögen von

$$B_1 \cdot \frac{S_{1,t+1}}{S_{1,t}} + B_2 \cdot \frac{S_{2,t+1}}{S_{2,t}} .$$

Bezogen auf das Vermögen in t von B entspricht das einem Zinsfaktor von

$$\frac{B_1}{B} \cdot \frac{S_{1,t+1}}{S_{1,t}} + \frac{B_2}{B} \cdot \frac{S_{2,t+1}}{S_{2,t}} .$$

Der Zinsfaktor ergibt sich also aus dem gewichteten arithmetischen Mittel der Zinsfaktoren der beiden Assets. Die Gewichte entsprechen den Anteilen an den beiden Assets in t ($\frac{B_1}{B}$ und $\frac{B_1}{B}$). Allgemein halten wir fest:

Zinsfaktoren sind im Querschnitt additiv
Ein Anlagebetrag wird zum Zeitpunkt t zu den Anteilen

$$g_i \quad i = 1, ..., l \qquad \left(\sum g_i = 1\right)$$

auf l Assets aufgeteilt. Sind die Zinsfaktoren der Assets $(i = 1, ..., l)$

$$\frac{S_{i,t+1}}{S_{i,t}},$$

so ist der Zinsfaktor für das Portfolio aus den l Assets durch

$$\sum_{i=1}^{l} g_i \frac{S_{i,t+1}}{S_{i,t}}$$

gegeben. Entsprechend berechnet sich die durchschnittliche diskrete Rendite aus

$$\sum_{i=1}^{l} g_i \frac{S_{i,t+1}}{S_{i,t}} - 1$$

oder äquivalent aus

$$\sum_{i=1}^{l} g_i \left(\frac{S_{i,t+1}}{S_{i,t}} - 1\right).$$

Beispiel 2.3

Wir greifen nochmals das *Beispiel 2.1* auf. Dazu nehmen wir an, dass ein Investor über einen Anlagebetrag von 50.000 € verfügt. Er investiert in $t = 1$ in 150 Aktien der VW-Aktie und in 300 Aktien der Daimler-Aktie. Somit ist er in $t = 1$ zu

$$150 \cdot 181{,}00 = 27150$$

in VW, zu

$$300 \cdot 69{,}52 = 20856$$

in Daimler investiert. Weiter verbleibt der Betrag

$$50000 - (27150 + 20856) = 1994$$

an Liquidität (Zinssatz 0,0%). Es ergeben sich die folgenden Anteile an den Anlagen:

Asset	Anlagebetrag	Investitionsanteil
VW	27150	$\frac{27150}{50000} = 0{,}543$
Daimler	20856	$\frac{20856}{50000} = 0{,}417$
Liquidität	1994	$\frac{1994}{50000} = 0{,}040$

Die diskrete Rendite des Investments von $t = 1$ auf $t = 2$ ergibt sich aus den Renditen der Titel von 0,0906, 0,1515 und 0,0 aus dem gewichteten Mittel:

$$0{,}543 \cdot 0{,}0906 + 0{,}417 \cdot 0{,}1515 + 0{,}040 \cdot 0 = 0{,}1124\,.$$

Der Anlagebetrag von 50000 € wird im ersten Jahr also mit 11,24% verzinst. Der Wert des Investments zu $t = 2$ ergibt sich dann entsprechend aus

$$50000 \cdot (0,1124 + 1) = 55620\,.$$

Nun berechnen wir noch die diskrete Rendite des Investments von $t = 2$ auf $t = 3$. Zum Zeitpunkt $t = 2$ sind die Anteile an den Assets neu zu bestimmen. Für VW ergibt sich das Gewicht aus dem Wert der 150 Aktien in $t = 2$ bezogen auf den Wert des Investments in $t = 2$:

$$\frac{150 \cdot 197,40}{55620} = 0,532\,.$$

Für den Anteil an Daimler ergibt sich auf gleiche Weise ein Gewicht von 0,432. Der restliche Anteil zu eins entfällt dann auf die Liquidität mit 0,036. Die diskrete Rendite für das Investment von $t = 2$ auf $t = 3$ berechnet sich dann aus:

$$0,532 \cdot 0,1241 + 0,432 \cdot 0,0768 + 0,036 \cdot 0 = 0,0992\,.$$

■

Die eben besprochenen Eigenschaften sind wesentliche Charakteristika der diskreten Renditen. Oft werden Kursentwicklungen von Assets stochastisch modelliert. Für diese Anwendungen werden anstatt der diskreten Renditen weitaus häufiger sogenannte stetige Renditen angewandt. Die stetigen Renditen errechnen sich direkt aus dem natürlichen Logarithmus der Zinsfaktoren. Ihre Eigenschaften ergeben sich entsprechend dem Logarithmus, der die Rechenoperation der Multiplikation auf die Operation der Addition abbildet. Es gilt bekannterweise:

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)\,.$$

Weiter gilt:

$$\log(a/b) = \log(a) - \log(b)\,.$$

Die Umkehrfunktion zum natürlichen Logarithmus ist die Exponentialfunktion.

Stetige Rendite
Bezeichnet S_t die Wertentwicklung eines Assets über die Zeit $t = 1, 2, \ldots$, so ist die stetige Rendite von $t - 1$ auf t durch

$$X_t = \log\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \log(S_t) - \log(S_{t-1})$$

gegeben. Der Zinsfaktor ergibt sich aus der stetigen Rendite durch

$$\frac{S_t}{S_{t-1}} = \exp(X_t)\,.$$

Zinsfaktoren sind über die Zeit multiplikativ. Aus der Eigenschaft des natürlichen Logarithmus folgt, dass die stetigen Renditen über die Zeit entsprechend additiv sind. Die durchschnittliche stetige Rendite kann dann durch das arithmetische Mittel berechnet werden.

Additivität der stetigen Rendite im Längsschnitt
Sind X_t stetige Renditen von $t-1$ auf t, so ergibt sich die stetige Rendite über k Perioden durch

$$X_t + X_{t+1} + \ldots + X_{t+k-1}\,.$$

Die durchschnittliche stetige Rendite bezogen auf eine Periode ist durch

$$\frac{X_t + X_{t+1} + \ldots + X_{t+k-1}}{k}$$

gegeben.

Die Additivität ergibt sich zudem direkt aus der Definition der stetigen Renditen:

$$\begin{aligned} X_t + X_{t+1} + \ldots + X_{t+k-1} &= (\log(S_t) - \log(s_{t-1})) + \cdots + (\log(S_{t+k-1}) - \log(s_{t+k-2})) \\ &= \log(S_{t+k-1}) - \log(s_{t-1}) \end{aligned}$$

Beispiel 2.4

Es sind nochmals die Kurse der VW-Aktie aus *Beispiel 2.1* abgedruckt:

t	Datum	Schlusskurs VW
1	30.12.2014	181,00
2	30.1.2015	197,40
3	27.2.2015	221,90

Die stetige Rendite von $t = 1$ auf $t = 2$ ist

$$\log(197{,}40/181{,}00) = \log(197{,}40) - \log(181{,}00) = 0{,}0867\,,$$

die von $t = 2$ auf $t = 3$

$$\log(221{,}90/197{,}40) = 0{,}1170\,.$$

Beide fallen etwas kleiner aus als die diskreten Renditen. Werden die beiden Renditen addiert

$$0{,}0867 + 0{,}1170 = 0{,}2037$$

so ergibt auch sich die stetige Rendite von $t = 1$ auf $t = 3$:

$$\log(221{,}90/181{,}00) = 0{,}2037\,.$$

Die durchschnittliche stetige Rendite der zwei Perioden ist

$$\frac{0{,}2037}{2} = 0{,}10185\,.$$

Wird zweifach mit dieser Rendite verzinst ($2 \cdot 0,10185$) und der Zinsfaktor berechnet, dann ergibt sich der Kurs der Aktie in $t = 3$ aus

$$181,00 \cdot \exp(\mathbf{2 \cdot 0,10185}) = 221,90\,.$$

■

Die Verzinsung über die Zeit lässt sich einfach durch die stetigen Renditen ausdrücken. Eine wünschenswerte Eigenschaft der stetigen Renditen ist auch, dass sich vom Betrag her gleich große positive und negative Renditen ausgleichen. Für eine Rendite von x von $t = 1$ auf $t = 2$ und anschließend $-x$ von $t = 2$ auf $t = 3$ ergibt sich nach der Additivität eine Rendite von

$$x + (-x) = 0$$

von $t = 1$ auf $t = 3$. Die Verteilung von stetigen Renditen ist in der Regel weitgehend symmetrisch. Deswegen lassen sie sich leichter durch gängige Verteilungen wie beispielsweise eine Normalverteilung beschreiben. Liegt in der Anwendung eine Querschnittsbetrachtung vor, so sind diskrete Renditen geeignet. Hier kann in Anwendungen wie der Portfoliooptimierung (vgl. *Kapitel 8*) auch auf die Angabe einer konkreten Verteilung für Renditen verzichtet werden.

2.2 Gängige Risikomaße

Unter einem *Risikomaß* wird eine statistische Maßzahl verstanden, die das Risiko einer Anlage ausdrückt. Risikomaße werden in der Literatur zum Teil auf sehr allgemeinem Niveau behandelt. In unserer Darstellung beschränken wir uns im Wesentlichen auf eine kurze Beschreibung auf die gebräuchlichsten Maße.

Wir gehen zunächst davon aus, dass die Wertentwicklung einer Anlage innerhalb einer Periode durch eine Zufallsvariable X beschrieben wird. Eine sehr gebräuchliche Kennzahl, die das Risiko von handelbaren Wertpapieren quantifiziert, ist die Volatilität. Sie entspricht einfach der Standardabweichung von X. Die *Volatilität* ist auf die Wertänderung innerhalb eines Jahres bezogen.

Volatilität
Beschreibt die Zufallsvariable X die Wertänderung eines Wertpapiers innerhalb eines Jahres, so entspricht die Volatilität der Standardabweichung von X.

Die Volatilität misst also grob, wie stark sich der Wert eines Assets innerhalb eines Jahres im Schnitt ändert. Je stärker die Änderung, desto riskanter ist das Wertpapier. Die Volatilität wird oft anhand historischer Renditen geschätzt. Nicht einheitlich finden entweder die diskreten oder die stetigen Renditen ihre Anwendung. Im folgenden Beispiel schätzen wir die Volatilität für die BASF-Aktie anhand von historischen stetigen Renditen.

Beispiel 2.5

Die Volatilität der BASF-Aktie soll anhand der stetigen Tagesrenditen vom 1.4.2014 bis zum 31.3.2015 geschätzt werden.

Datum	Kurs	stetige Rendite
31.03.2014	80,66	
01.04.2014	80,9	$\log(80,9/80,66) = 0,00297$
01.07.2014	80,39	$\log(80,39/80,9) = -0,00632$
01.08.2014	80	$\log(80/80,39) = -0,00486$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Eine Möglichkeit ist es nun einfach, die empirische Varianz zu berechnen. Alternative Schätzer für die Varianz werden in *Kapitel 4* besprochen. Es liegen insgesamt 252 Renditen vor. Das arithmetische Mittel ergibt

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1}{252}\,(0,00297 + (-0,00632) + (-0,00486) + \ldots)\\ &= 0,00055\,.\end{aligned}$$

Damit errechnet sich für die empirische Varianz:

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \frac{1}{252}\left((0,00297 - 0,00055)^2 + (-0,00632 - 0,00055)^2 + (-0,004860,00055)^2 + \ldots\right)\\ &= 0,000182\,.\end{aligned}$$

Diese Varianz bezieht sich auf die einzelnen Handelstage. Bezogen auf ein Jahr (252 Handelstage) ergibt sich eine Varianz von

$$252 \cdot 0,000182 = 0,04587\,.$$

Somit beträgt die Volatilität

$$\sqrt{0,04587} = 0,2142\,.$$

Werden die diskreten Renditen für die Berechnung verwendet, ergibt sich ein ähnlicher Wert von 0,2139. Die Volatilität gibt grob an, mit wie starken Schwankungen innerhalb eines Jahres zu rechnen ist. Hier sind es (im Schnitt) 21% vom Kurswert. Genau genommen entspricht die Volatilität nicht exakt der durchschnittlichen betragsmäßigen Schwankung, kommt dieser aber nahe. ■

Bei der Volatilität wird nicht zwischen Wertsteigerungen und Wertminderungen unterschieden, es wird lediglich die Stärke der Schwankung des Werts betrachtet. Ein weiteres gängiges Risikomaß ist der *Value at Risk* (VaR). Beim Value at Risk wird im Gegensatz zur Volatilität die Höhe der stärkeren Kursrückgänge betrachtet.

Value at Risk
Der Value at Risk (VaR) gibt zu einer festzulegenden gewünschten Sicherheit von $1-\alpha$ den Verlust an, der in einem bestimmten festgelegten Zeitraum mit der gegebenen Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ nicht überschritten wird.

Wird der Verlust einer Anlage zum Ende des Zeitraums durch eine Zufallsvariable beschrieben, so entspricht der VaR dem $1-\alpha$-Quantil der Zufallsvariable.

Wird in der Anwendung die diskrete Rendite modelliert, so ist der VaR duch das α-Quantil der Verteilung der Renditen gegeben. Streng genommen entspricht der Ausdruck „Wert unter Risiko (VaR)" dem entsprechenden Anteil am Anlagebetrag.

Liegt eine Verteilung für die stetigen Renditen vor, so kann das α-Quantil (x_α) der stetigen Renditen bestimmt werden. Der VaR (in %) ist dann durch

$$\big(\exp(x_\alpha)-1\big)\cdot 100\%$$

gegeben.

Vereinfacht schätzen wir nun den Value at Risk anhand der Tagesrenditen aus *Beispiel* 2.5. Weitere Beispiele, in denen Verteilungen für die Renditen angenommen werden, finden sich im *Kapitel* 4.

Beispiel 2.6

Wir betrachten als etwas unübliche Periode einen Tag und fragen danach, welcher Verlust mit einer Sicherheit von 95% nicht überschritten wird. Die Kurshistorie aus *Beispiel* 2.5 betrachten wir als Stichprobe, anhand der wir den VaR schätzen. Zunächst ordnen wir die $n = 252$ stetigen Renditen aus dem Beispiel der Größe nach.

−0,04640	−0,03605	−0,03531	−0,03403	−0,03046
−0,02984	−0,02905	−0,02790	−0,02774	−0,02773
−0,02610	−0,02601	−0,02246	−0,02197	−0,02097
−0,01963	−0,01940	−0,01819	−0,01686	−0,01625
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Bei $n = 252$ Beobachtungen entspricht das 5%-Quantil der 13. Beobachtung ($n \cdot p = 252 \cdot 0,05 = 12,6$):

$$x_{0,05} = -0,02246\,.$$

Insgesamt sind (in etwa) 95% der beobachteten Renditen größer −0,02246. Nur an (in etwa) 5% der Handelstage kamen stärkere Kursrückgänge zustande. Die stetige Rendite von −0,02246 entspricht der diskreten Rendite von

$$\exp(-0,02246) - 1 = -0,02221\,.$$

Da es sich bei der Umrechnung um eine monotone Funktion handelt, sind auch 95% der diskreten Renditen größer als die diskrete Rendite von −0,02221. Der Schätzwert besagt, dass in 95% der Tage der Verlust innerhalb eines Handelstages durch einen Kursrückgang von −2,221% beschränkt ist. Multipliziert mit einem Anlagebetrag ergibt sich konkret ein Wert, der zu 5% unter Risiko steht. ■

Im Gegensatz zur Volatilität berücksichtigt der Value at Risk die Verteilung der Verluste. Wie auch die Volatilität ist der VaR gut und einfach zu interpretieren.
In der Praxis treten unter anderem an den Aktienmärkten manchmal sehr starke Kursrückgänge in kurzer Zeit auf. Für den Value at Risk wird lediglich ein Wert bestimmt, der immerhin in $\alpha \cdot 100\%$ auftritt. Seltenere starke Kursrückgänge bleiben unberücksichtigt. Ein Risikomaß, das diese berücksichtigt, ist der *Conditional Value at Risk* (CVaR). Auch beim CVaR wird ein Risiko von α vorgegeben und dazu die $\alpha\cdot 100\%$ der stärksten Wertrückgänge betrachtet. Der CVaR entspricht allerdings dem Erwartungswert dieser Verluste. Für stetige Verlustverteilungen stimmt der CVaR auch mit dem als Expected Shortfall bekannten Risikomaß überein.

Conditional Value at Risk
Beschreibt die Zufallsvariable V den Verlust zum Ende einer vorgegebenen Periode und ist $v_{1-\alpha}$ das $1-\alpha$-Quantil von V, so ist der Conditional Value at Risk (CVaR) zur Sicherheit $1-\alpha$ durch

$$E(V|V > v_{1-\alpha})$$

gegeben. Er entspricht dem erwarteten Verlust, der in den $\alpha \cdot 100\%$ der schlechtesten Fälle eintritt.
Der CVaR kann auch auf die diskreten Renditen bezogen werden. Beschreibt die Zufallsvariable X die diskreten Renditen und ist x_α das α-Quantil von X, so ist die durchschnittliche Rendite, die sich in den schlechtesten α% der Fälle ergibt, durch:

$$E(X|X < x_\alpha)$$

gegeben.
Weist die Verteilungsfunktion von X keine Sprungstellen auf, so ist der CVaR identisch zum sogenannten Expected-Shortfall.

Im *Kapitel 4* sind Beispiele zur Berechnung des CVaR anhand von Verteilungen aufgeführt. Hier geben wir eine vereinfachte Möglichkeit an, den CVaR anhand einer Stichprobe zu schätzen.