

Helge Röpcke

Eine Randelementmethode für eine
instationäre 2-D Strömung mit einer freien
Oberfläche

Diplomarbeit

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de/> abrufbar.

Dieses Werk sowie alle darin enthaltenen einzelnen Beiträge und Abbildungen sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsschutz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlages. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen, Auswertungen durch Datenbanken und für die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronische Systeme. Alle Rechte, auch die des auszugsweisen Nachdrucks, der fotomechanischen Wiedergabe (einschließlich Mikrokopie) sowie der Auswertung durch Datenbanken oder ähnliche Einrichtungen, vorbehalten.

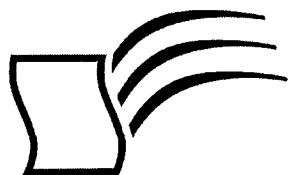
Copyright © 1999 Diplomica Verlag GmbH
ISBN: 9783832418175

**Eine Randelementmethode für eine instationäre 2-D
Strömung mit einer freien Oberfläche**

Helge Röpcke

Eine Randelementmethode für eine instationäre 2-D Strömung mit einer freien Oberfläche

Diplomarbeit
an der Technischen Universität Berlin
Fachbereich Mathematik
Lehrstuhl für Numerische Mathematik/Funktionalanalysis
Juni 1999 Abgabe



Diplomarbeiten Agentur
Dipl. Kfm. Dipl. Hdl. Björn Bedey
Dipl. Wi.-Ing. Martin Haschke
und Guido Meyer GbR
Hermannstal 119 k
22119 Hamburg
agentur@diplom.de
www.diplom.de

ID 1817

Röpcke, Helge: Eine Randelementmethode für eine instationäre 2-D Strömung mit einer freien Oberfläche / Helge Röpcke - Hamburg: Diplomarbeiten Agentur, 1999

Zugl.: Berlin, Technische Universität, Diplom, 1999

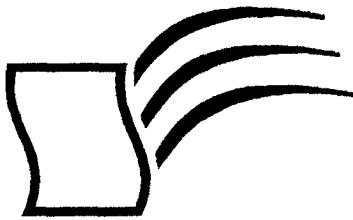
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zu widerhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Die Informationen in diesem Werk wurden mit Sorgfalt erarbeitet. Dennoch können Fehler nicht vollständig ausgeschlossen werden, und die Diplomarbeiten Agentur, die Autoren oder Übersetzer übernehmen keine juristische Verantwortung oder irgendeine Haftung für evtl. verbliebene fehlerhafte Angaben und deren Folgen.

Dipl. Kfm. Dipl. Hdl. Björn Bedey, Dipl. Wi.-Ing. Martin Haschke & Guido Meyer GbR
Diplomarbeiten Agentur, <http://www.diplom.de>, Hamburg

Printed in Germany



Diplomarbeiten Agentur

Wissensquellen gewinnbringend nutzen

Qualität, Praxisrelevanz und Aktualität zeichnen unsere Studien aus. Wir bieten Ihnen im Auftrag unserer Autorinnen und Autoren Wirtschaftsstudien und wissenschaftliche Abschlussarbeiten – Dissertationen, Diplomarbeiten, Magisterarbeiten, Staatsexamensarbeiten und Studienarbeiten zum Kauf. Sie wurden an deutschen Universitäten, Fachhochschulen, Akademien oder vergleichbaren Institutionen der Europäischen Union geschrieben. Der Notendurchschnitt liegt bei 1,5.

Wettbewerbsvorteile verschaffen – Vergleichen Sie den Preis unserer Studien mit den Honoraren externer Berater. Um dieses Wissen selbst zusammenzutragen, müssten Sie viel Zeit und Geld aufbringen.

<http://www.diplom.de> bietet Ihnen unser vollständiges Lieferprogramm mit mehreren tausend Studien im Internet. Neben dem Online-Katalog und der Online-Suchmaschine für Ihre Recherche steht Ihnen auch eine Online-Bestellfunktion zur Verfügung. Inhaltliche Zusammenfassungen und Inhaltsverzeichnisse zu jeder Studie sind im Internet einsehbar.

Individueller Service – Gerne senden wir Ihnen auch unseren Papierkatalog zu. Bitte fordern Sie Ihr individuelles Exemplar bei uns an. Für Fragen, Anregungen und individuelle Anfragen stehen wir Ihnen gerne zur Verfügung. Wir freuen uns auf eine gute Zusammenarbeit

Ihr Team der *Diplomarbeiten Agentur*

Dipl. Kfm. Dipl. Hdl. Björn Bedey –
Dipl. Wi.-Ing. Martin Haschke —
und Guido Meyer GbR ——————

Hermannstal 119 k ——————
22119 Hamburg ——————

Fon: 040 / 655 99 20 ——————
Fax: 040 / 655 99 222 ——————

agentur@diplom.de ——————
www.diplom.de ——————

Die selbständige und eigenhändige Anfertigung versichere ich an Eides statt.
Berlin, den

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	v
1 Grundlagen	2
1.1 Das Erdwall-Problem	2
1.1.1 Das Erdwall-Problem mit ansteigendem Wasser	5
1.1.2 Das Erdwall-Problem mit Drainage	6
1.2 Die Integralgleichungsmethode	8
1.2.1 Das Einfachschichtpotential	8
1.2.2 Das Doppelschichtpotential	10
2 Formulierung der Integralgleichungen	12
2.1 Die Dirichlet-Innenraumaufgabe	12
2.2 Die Neumann-Innenraumaufgabe	14
2.3 Die Innenraumaufgabe mit gemischten Randbedingungen	16
2.4 Die Integralgleichungen des Erdwall-Problems	19
2.4.1 Die freie Oberflächenrandbedingung in einer finiten Differenzenform .	20
2.4.2 Die Berechnung eines Zeitschritts beim Erdwall-Problem	22
2.5 Die anderen Erdwall-Probleme	23
3 Herleitung der Gleichungssysteme	24
3.1 Approximation des Gebietes	24
3.2 Diskretisierung mit dem Galerkin-Verfahren	26
3.2.1 Diskretisierung der Dirichlet-Integralgleichung	28
3.2.2 Diskretisierung der Neumann-Integralgleichung	29
3.2.3 Diskretisierung der Integralgleichung mit gemischten Randbedingungen	30

3.3	Diskretisierung des Erdwall-Problems	31
4	Aufbau der Matrizen	33
4.1	Berechnung der Doppelintegrale	33
4.1.1	Bestimmung der Matrix K	34
4.1.2	Bestimmung der Matrix S	41
4.2	Bestimmung der Matrix M	43
4.3	Berechnung des Einfachschichtpotentials $\Phi(\mathbf{x})$	44
4.4	Berechnung der Normalableitung des Einfachschichtpotentials $\frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial n}$	45
4.5	Bestimmung der rechten Seite b des LGS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$	47
5	Numerische Ergebnisse	49
5.1	Löser für lineare Gleichungssysteme	49
5.1.1	cg-Verfahren	49
5.1.2	Bi-cg-Verfahren	50
5.2	Beispiele zum Testen der Integraloperatoren	52
5.2.1	Einfachschichtpotential und Normalableitung des Einfachschichtpotentials	52
5.2.2	Numerische Berechnung der <i>Laplace</i> -Probleme	58
5.2.3	Zusammenfassung der <i>Laplace</i> -Probleme	71
5.3	Darstellung der Erdwall-Probleme	74
5.3.1	Numerische Lösung des Erdwall-Problems	74
5.3.2	Numerische Lösung des Erdwall-Problems mit ansteigendem Wasser	79
5.3.3	Numerische Lösung des Erdwall-Problems mit Drainage	81
6	Programm-Dokumentation	84
6.1	Programmbeschreibung des Erdwall-Problems	84
6.2	Zusätzliche Routinen für das Erdwall-Problem mit ansteigendem Wasser	86
6.3	Programmbeschreibung des Erdwall-Problems mit Drainage	88
6.4	Klassen	88
7	Zusammenfassung und Ausblick	90

Abbildungsverzeichnis	93
Tabellenverzeichnis	95
Algorithmenverzeichnis	96
Literaturverzeichnis	97

Einleitung

Das Thema dieser Arbeit ist aus dem Bereich der numerischen Simulation. Ziel ist es, unter verschiedenen Ausgangskonfigurationen, den zeitlichen Verlauf der Sickerlinie in einem porösen Erdwall darzustellen. Die Möglichkeit, physikalische Vorgänge durch mathematische Verfahren zu modellieren und mit modernen Programmiermethoden zu berechnen, lieferte die Motivation zur Bearbeitung dieser Aufgabe. Aus der vorliegenden Interdisziplinarität der Fachbereiche resultiert auch die Gliederung dieser Arbeit.

Zunächst wird das physikalische Problem hergeleitet und dargestellt (vgl. Kapitel 1). Es wird ein vollständig gesättigter, poröser Erdwall mit konstanter Durchdringbarkeit angenommen, d. h. auf beiden Seiten des Erdwalls steht das Wasser gleich hoch (z. B. überflutetes Gebiet). Senkt man an einer Seite den Wasserspiegel ab, so findet ein Ausgleich innerhalb des Erdwalls statt (vgl. Abb. 1.1). Dieser Ausgleich wird simuliert. Die *Laplace*-Gleichung mit instationären gemischten Randbedingungen (Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen) dient zur Beschreibung des physikalischen Problems.

Nach der Problembeschreibung werden die theoretischen Grundlagen der zur Anwendung kommenden mathematischen Methoden beschrieben (vgl. Kapitel 1.2 und Kapitel 2). In dieser Arbeit wird eine *indirekte Integralgleichungsmethode* zur Lösung der gemischten Randwertaufgabe verwendet. Zur Übersetzung des gemischten Problems in äquivalente Integralgleichungen werden zunächst die einfachen *Laplace*-Probleme mit Dirichlet- bzw. Neumann-Randbedingungen als Integralgleichungen formuliert. Im 2. Kapitel erfolgt bereits die Diskretisierung des instationären Anteils mit Hilfe eines expliziten Euler-Verfahrens.

Das Galerkin-Verfahren wird zur Diskretisierung der hergeleiteten Integralgleichungen verwendet (vgl. Kapitel 3); dadurch entstehen lineare Gleichungssysteme. Zur Durchführung des Verfahrens müssen entsprechende Ansatzräume gewählt werden. Auf Grund der einfachen Wahl der Basisfunktionen (die charakteristischen Funktionen) zur Darstellung der Ansatzräume konnten die Koeffizienten der Matrizen fast alle exakt bestimmt werden.

Die Berechnungen der hierbei zu lösenden Doppel- und Einfachintegrale bilden einen Schwerpunkt dieser Arbeit. Die Ergebnisse werden im 4. Kapitel dargestellt und ausführlich bei Liebau und Röpcke [16] hergeleitet.

Im 5. Kapitel werden zu Beginn die Verfahren zum Lösen der linearen Gleichungssysteme vorgestellt; es kamen sowohl ein cg- als auch ein Bi-cg-Verfahren zum Einsatz. Dann werden die aufgestellten Integraloperatoren getestet, d. h. die numerischen Berechnungen werden mit bekannten analytischen Lösungen verglichen (vgl. Kapitel 5.2).

Zum Abschluß illustrieren grafische Darstellungen die berechneten Ergebnisse für die Erdwall-Probleme, die mit Hilfe von numerischen Vergleichsdaten diskutiert werden.

Schließlich werden im 6. Kapitel knapp die implementierten Algorithmen beschrieben.