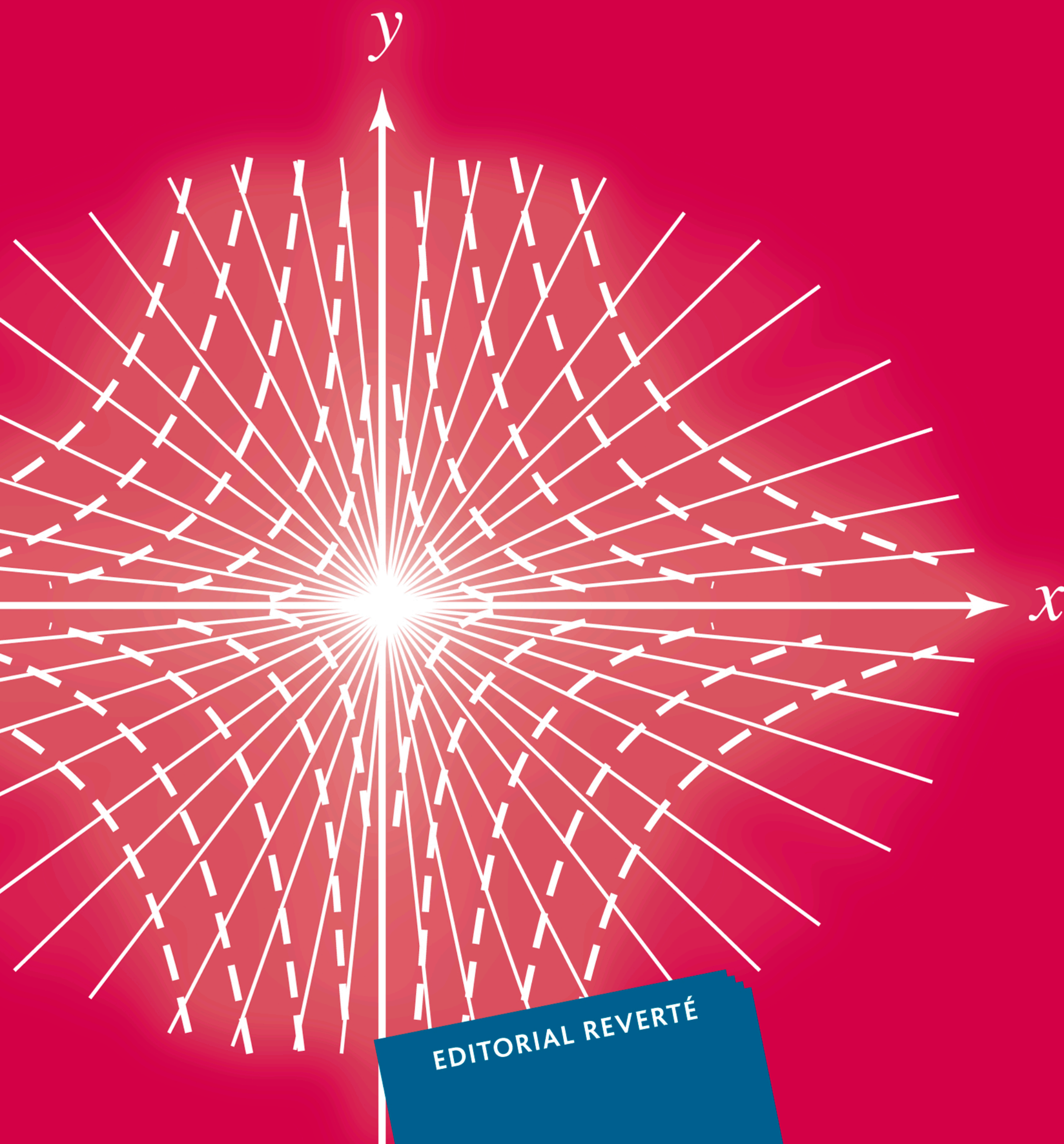
Tom M. Apostol

CÁLCULO I

Cálculo com funções de uma variável, com uma introdução à Álgebra Linear



EDITORIAL REVERTÉ

Tom M. Apostol

CÁLCULO I

Cálculo com funções de uma variável, com uma introdução à Álgebra Linear

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

Título da obra original:
CALCULUS, one – variable calculus,
with an introduction to linear algebra
Volume 1

Edição original em língua inglesa publicada por
Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts, U.S.A.

Edição em português:

ISBN: 978-84-291-5015-5 Tomo 1
ISBN: 978-84-291-5014-8 Obra completa

Edição em português (PDF):
ISBN: 978-84-291-9302-2

Tradução de:
Doutor António Ribeiro Gomes
Professor Catedrático da Faculdade de Ciências e
Tecnologia da Universidade de Coimbra

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15. Local B
08029 Barcelona. ESPAÑA
Tel: (34) 93 419 33 36
reverte@reverte.com
www.reverte.com

a

Jane e Stephen

PREFÁCIO

Excertos do Prefácio da Primeira Edição

Parece não haver acordo sobre o que deva constituir um primeiro curso de Cálculo e Geometria Analítica. Insistem alguns que a única via para compreender realmente o Cálculo principia com um estudo completo do sistema dos números reais, desenvolvendo-o passo a passo de uma maneira lógica e rigorosa. Argumentam outros que o Cálculo é fundamentalmente um instrumento para engenheiros e físicos; consequentemente acreditam que o curso deve conduzir às aplicações do Cálculo, fazendo apelo à intuição para depois, pela prática de resolução de problemas, desenvolver a destreza manipulatória. Há muito de correto em ambos os pontos de vista. O Cálculo é uma ciência dedutiva e um ramo da Matemática Pura. Ao mesmo tempo é muito importante lembrar que o Cálculo tem raízes profundas em problemas físicos e que muita da sua potência e beleza deriva da variedade das suas aplicações. É possível combinar um desenvolvimento teórico profundo com uma sadia formação técnica; este livro representa uma tentativa de estabelecimento de um equilibrio sensato entre os dois pontos de vista. Embora tratando o Cálculo como uma ciência dedutiva, o livro não põe de parte as aplicações a problemas físicos. As demonstrações de todos os teoremas importantes são considerados como uma parte fundamental do desenvolvimento das ideias matemáticas; as demonstrações são muitas vezes precedidas duma discussão geométrica ou intuitiva, de modo a dar ao estudante uma visão mais penetrante do porquê da demonstração. Embora estas discussões intuitivas satisfaçam os leitores que não estejam interessados na demonstração detalhada, também se inclui a demonstração completa para aqueles que preferem uma exposição mais rigorosa.

A sequência dos assuntos neste livro foi sugerida pelo desenvolvimento histórico e filosófico do Cálculo e da Geometria Analítica. Por exemplo a integração é tratada antes da derivação. Ainda que esta ordenação de matérias possa ser pouco frequente, é historicamente correcta e pedagogicamente adequada, além de que é a melhor maneira de tornar patente a verdadeira conexão entre o integral e a derivada.

O conceito de integral é apresentado em primeiro lugar para funções em escada. Uma vez que o integral duma função em escada não é mais que uma soma, a teoria da integração é *extremamente simples neste caso. Enquanto o estudante aprende as propriedades do integral para funções em escada, ganha experiência no uso da notação de somação e ao mesmo tempo familiariza-se com a notação para integrais. Assim se solidificam os degraus de desenvolvimento, de tal modo que a transição de funções em escada para funções mais gerais parece fácil e natural.*

Prefácio da Segunda Edição

A segunda edição difere da primeira em muitos aspectos. Juntou-se a Álgebra Linear, os teoremas da média e as aplicações de rotina do Cálculo foram introduzidos nos primeiros capítulos e acrescentou-se grande número de novos exercícios simples. Uma análise rápida do índice de matérias revela que o livro foi dividido em capítulos de menor extensão, cada um deles dedicado a um conceito importante. Várias Secções foram escritas de novo e reorganizadas de modo a proporcionar uma melhor motivação e melhorar o curso das ideias.

Como na primeira edição, cada conceito novo importante vem precedido de uma introdução histórica, descrevendo o seu desenvolvimento desde uma primitiva noção física intuita até à sua formulação matemática precisa. O estudante descobre algo dos esforços do passado e dos triunfos dos homens que mais contribuiram para o assunto. Deste modo o estudante torna-se um participante activo na evolução das idéias e não um mero observador passivo dos resultados.

A segunda edição, tal como a primeira, está dividida em dois volumes. As duas primeiras terças partes do volume I tratam o Cálculo para funções de uma variável, incluindo séries e uma introdução às equações diferenciais. A última terça parte deste volume introduz a Álgebra Linear com aplicações à Geometria e à Análise. Grande parte destes temas apoiam-se solidamente no cálculo de exemplos que ilustram a teoria geral. Proporciona uma mistura de Álgebra e Análise e contribui para preparar o caminho para a transição do Cálculo a uma variável para o Cálculo com várias variáveis, tratado no volume II. Um desenvolvimento mais amplo da Álgebra Linear aparece como necessário na segunda edição do Volume II.

Uma vez mais reconheço com agrado a minha dívida para com os Professores H. F. Bolanenblust, A. Erdélyi, F. B. Fuller, K. Hoffmann, G. Springer e H. S. Zuckerman. A sua influência na primeira edição continuou na segunda. Na preparação da segunda edição recebi também a ajuda do Professor Basil Gordon que sugeriu muitas modificações. Agradecimentos são também devidos a George Springer e William P. Ziemer que leram as últimas provas. O pessoal de Blaisdell Publishing Company prestou, como sempre, grande ajuda; apreciei a sua simpática aceitação dos meus desejos respeitantes ao formato e tipografia.

Finalmente tenho especial satisfação em expressar a minha gratidão a minha esposa, por ter contribuido por diversas formas na preparação de ambas as edições. Como testemunho do meu agradecimento dedico-lhe, com prazer, este livro.

Pasadena, Califórnia T.M.A.

Índice analítico

INTRODUÇÃO

Parte I — Introdução histórica

I 1.1 Os dois conceitos básicos do cálculo

O notável progresso conhecido pela ciência e tecnologia, durante o último século, foi devido em grande parte ao desenvolvimento da Matemática. O ramo da Matemática conhecido por Cálculo integral e diferencial é um instrumento natural e poderoso para atacar uma variedade de problemas que aparecem na Física, Astronomia, Engenharia, Química, Geologia, Biologia e noutros campos, incluindo mais recentemente alguns das Ciências Sociais.

Para dar a o leitor uma ideia dos muito diversos tipos de problemas que podem ser tratados pelos métodos do Cálculo, expõe-se a seguir uma pequena amostra de questões selecionadas dos exercícios que aparecem em capítulos posteriores deste livro.

Com que velocidade deve ser lançado um foguetão, para que não volte a tombar na Terra? Qual é o raio do menor disco circular que cobre todo o triângulo isósceles de perímetro L? Qual é o volume do material extraído de uma esfera de raio $2r$, se for atravessada por um orifício cilíndrico, de raio r, e cujo eixo passa pelo centro da esfera? Se uma cultura de bactérias cresce proporcionalmente à quantidade que existe em cada instante, e se a população duplica ao fim de uma hora, quanto terá aumentado ao fim de duas horas? Se uma força de dez quilos faz esticar de um metro uma corda elástica, qual o trebalho necessário para esticar a corda de quatro metros?

Estes exemplos, escolhidos em vários domínios, ilustram algumas das questões técnicas que podem ser resolvidas por aplicações mais ou menos rotinadas do Cálculo.

O Cálculo é mais do que um instrumento técnico — é uma compilação de ideias atraentes e excitantes, que interessaram o pensamento humano durante séculos. Estas ideias estão relacionadas com *velocidade, área, volume, taxa de crescimento, continuidade, tangente a uma curva* e com outros conceitos dizendo respeito a uma variedade de domínios. O Cálculo obriga-nos a não ir além, antes de pensarmos cuidadosamente acerca do significado destes conceitos. Outro aspecto notável do Cálculo é o seu poder de síntese. Muitos destes conceitos podem ser formulados de maneira que se reduzam a dois outros problemas, mais especializados, de natureza puramente geométrica. Passamos em seguida a uma breve descrição destes problemas.

Consideremos uma curva C situada acima duma reta horizontal (base), como se indica na fig. I.1. Suponhamos que esta curva goza da propriedade de ser intersetada por cada vertical, no máximo, uma vez. A parte sombreada da figura é formada pelos pontos situados abaixo da curva C, acima da horizontal, e entre dois segmentos verticais paralelos que unem C com a horizontal. O primeiro problema fundamental do Cálculo é o seguinte: *Determinar um número que dê a medida da área da parte sombreada da figura.*

Consideremos em seguida uma reta tangente à curva C, como se mostra na fig. I.1. O segundo problema fundamental pode enunciar-se do modo seguinte. *Determinar um número que dê o declive desta reta.*

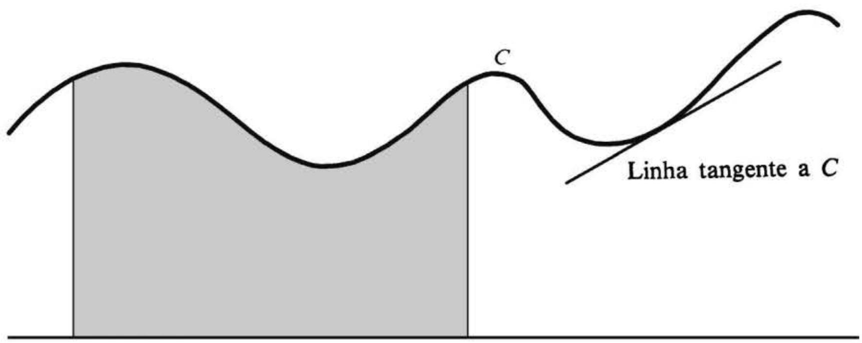


Fig. I.1

Fundamentalmente o Cálculo ocupa-se da formulação exata e da resolução destes dois problemas particulares. Permite-nos *definir* os conceitos de área e tangente, e *calcular* a área de uma dada região, ou o declive de tangente a uma curva dada. O *Cálculo Integral* ocupa-se do problema da área e será discutido neste primeiro capítulo. *O Cálculo Diferencial* ocupa-se do problema da tangente e será analisado no Capítulo 4.

O estudo do Cálculo requer uma certa preparação matemática. O presente capítulo trata desses conceitos básicos e está dividido em quatro partes: a primeira parte dá uma perspectiva histórica; a segunda refere a notação e terminologia da teoria dos conjuntos; a terceira trata do sistema dos números reais; e finalmente a quarta parte trata da indução matemática e da notação somatória. Se o leitor está familiarizado com estes temas pode abordar directamente o desenvolvimento do Cálculo integral, no capítulo 1. Caso contrário deverá familiarizar-se com as matérias contidas nesta introdução, antes de iniciar o estudo do Capítulo.

I 1.2 Introdução histórica

A origem do Cálculo integral remonta a mais de 2000 anos, quando os gregos tentavam resolver o problema da determinação de áreas por um processo que designaram de *método de exaustão*. As ideias fundamentais deste método são elementares e podem descrever-se, sumariamente, do modo seguinte: dada uma região cuja área pretende determinar-se, inscrevemos nela uma região poligonal que se aproxime da região dada e cuja área seja de cálculo fácil. Em seguida, escolhemos outra região poligonal que dê uma melhor aproximação e continuamos o processo tomando *linhas* poligonais com cada vez maior número de lados, de modo a cobrir a região dada. O método está ilustrado na fig. I.2 para o caso duma região semicircular. Este método foi usado com êxito por Arquimedes (287-212 a. C.), para estabelecer fórmulas exactas das áreas do círculo e de algumas outras figuras particulares.

Depois de Arquimedes, o desenvolvimento do método de exaustão teve que esperar quase 18 séculos até que o uso de símbolos e técnicas algébricas se tornaram parte usual da matemática. A Álgebra elementar, que hoje é familiar à maioria dos alunos dos últimos anos do ensino secundário, era completamente desconhecida no tempo de Arquimedes, fato que tornava impossível estender o método a qualquer classe de regiões, sem se conhecer um modo adequado de expressar os extensos cálculos numa forma compacta e simplificada.

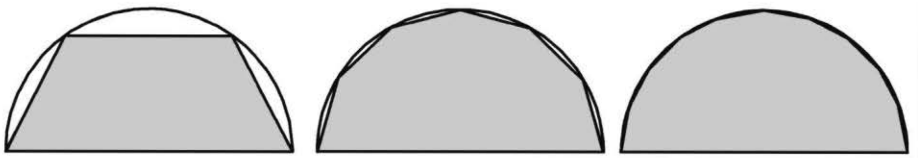


Fig. I.2 O método de exaustão aplicado a uma região semicircular.

Uma mudança lenta, mas revolucionária, no desenvolvimento das notações matemáticas teve início no século XVI. O complicado sistema de numeração romana foi gradualmente substituído pelos caráteres arábicos utilizados ainda hoje, os sinais + e — foram introduzidos pela primeira vez e começaram a reconhecer-se as vantagens da notação decimal. Durante este mesmo período, os brilhantes resultados dos matemáticos italianos Tartaglia, Cardano e Ferrari na determinação de soluções algébricas para as equações cúbica e do quarto grau estimularam o desenvolvimento da Matemática e encorajaram a aceitação da nova e superior linguagem algébrica. Com a larga introdução dos bem escolhidos símbolos algébricos ressuscitou o interesse pelo antigo método de exaustão, e grande número de resultados parciais foram descobertos no século XVI por pioneiros tais como Cavalieri, Toricelli, Roberval, Fermat, Pascal e Wallis.

Gradualmente, o método de exaustão foi transformado no que hoje se designa por Cálculo Integral, nova e poderosa disciplina com uma grande variedade de aplicações não só em problemas geométricos respeitantes a áreas e volumes, mas também em problemas de outras ciências. Este ramo da Matemática, que conservou alguns dos aspetos originais do método de exaustão, recebeu o seu maior impulso no século XVII, devido principalmente aos esforços de Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716) e o seu desenvolvimento continuou até ao século XIX, data em que matemáticos como Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e Bernhard Riemann (1826-1866) lhe deram uma base matemática sólida. Posteriores aperfeiçoamentos e extensões da teoria estão ainda a ser levados a cabo na Matemática contemporânea.

I 1.3 O método de exaustão para a área de um "segmento parabólico"

Antes de passarmos ao estudo sistemático do Cálculo integral, será instrutivo aplicar o método de exaustão directamente a uma das figuras particulares estudadas pelo próprio Arquimedes. A região em questão está representada na figura I.3 e pode descrever-se do modo seguinte: se escolhermos um ponto arbitrário na base da figura e designarmos por x a sua distância a 0, a distância vertical deste ponto à curva é x^2. Em particular, se o comprimento da base é b a altura da figura é b^2. A distância vertical de x à curva designa-se por "ordenada" de x. A curva assim descrita é uma *parábola* e a região limitada pela curva e pelos dois segmentos de recta chamar-se-á *segmento parabólico.*

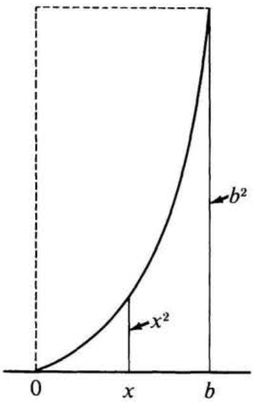
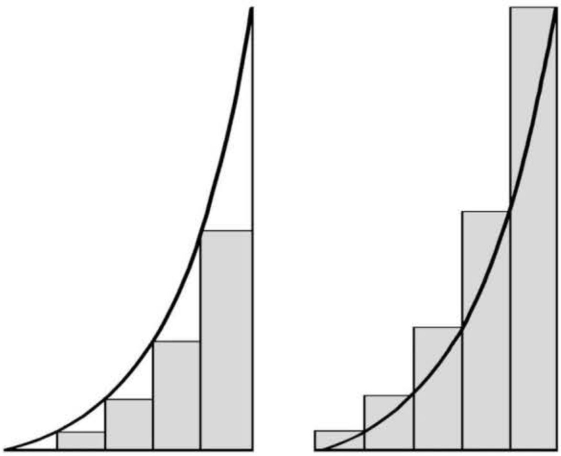


Fig. I.3 Segmento parabólico.



Aproximação por defeito. Aproximação por excesso.

Fig. I.4

Esta figura pode ser contida num retângulo de base b e altura b^2, como se vê na fig. I.3. Observando a figura é evidente a afirmação de que a área do segmento parabólico é menor que metade da área do retângulo. Arquimedes fez a descoberta surpreendente de que a área do segmento parabólico é exactamente *um terço* da área do retângulo, isto é, $A = \frac{b^3}{3}$ representando A a área do segmento parabólico. Mostremos como se chega a este resultado.

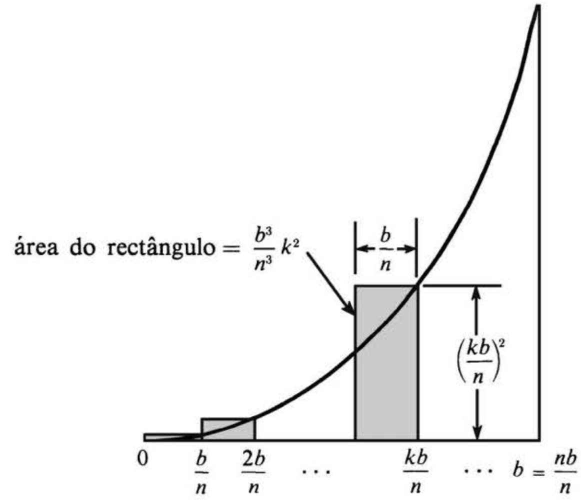


Fig. I.5 Cálculo da área dum segmento parabólico.

Deve notar-se que o segmento parabólico desenhado na fig. I.3 não é exactamente o que Arquimedes considerou, e que os pormenores dos cálculos que se seguem não são exatamente os utilizados por ele. Contudo as *ideias* essencias são as de Arquimedes; o que apresentamos aqui pode considerar-se o método de exaustão exposto com uma notação moderna.

O método consiste simplesmente no seguinte: divide-se a figura num certo número de bandas e obtêm-se duas aproximações da área da região, uma por defeito e a outra por excesso, usando dois conjuntos de retângulos como se indica na fig. I.4 (utilizam-se retângulos, em vez de polígonos quaisquer, para simplificar os cálculos). A área do segmento parabólico é maior que a área total dos retângulos interiores, mas é menor que a dos retângulos exteriores. Se cada banda se subdivide, para se obter uma nova aproximação com maior número de bandas, a área total dos retângulos interiores *aumenta,* enquanto a área total dos retângulos exteriores *diminui.* Arquimedes compreendeu que se podia obter a área com qualquer grau de aproximação desejado, bastando para tanto tomar um número suficiente de bandas.

O cálculo efetivo efectua-se como a seguir se indica. Com o objectivo de simplificar os cálculos divide-se a base em *n partes iguais,* cada uma de comprimento b/n (ver fig. I.5). Os pontos de divisão correspondem aos seguintes valores de x:

$$0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}, \ldots, \frac{(n-1)b}{n}, \frac{nb}{n} = b\,.$$

A expressão geral dum ponto de divisão é $x = \frac{kb}{n}$, onde k toma os valores sucessivos $k = 0$, 1, 2, 3, ..., n. En cada ponto kb/n constroi-se o retângulo exterior de altura $(kb/n)^2$, como se indica na fig. I.5. A área deste retângulo é o produto da base pela altura e é igual a

$$\left(\frac{b}{n}\right)\left(\frac{kb}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3}k^2.$$

Designando por S_n a soma das áreas de todos os retângulos exteriores, uma vez que a área do k-enésimo retângulo é $(b^3/n^3)k^2$, obtem-se

$$S_n = \frac{b^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)\,. \tag{I.1}$$

Do mesmo modo se obtém a expressão da soma S_n dos rectângulos interiores:

$$s_n = \frac{b^3}{n^3}[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2]\,. \tag{I.2}$$

A forma destas somas é de grande importância no cálculo. Note-se que o fator que multiplica b^3/n^3 na equação (I.1) é a soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\,.$$

[O fator correspondente na equação (I.2) é análogo, apenas a soma tem unicamente n-1 parcelas]. O cálculo desta soma por adição directa das parcelas, para um grande valor de n, é fastidioso, porém existe uma identidade interessante que torna possível calcula-la dum modo mais simples; a identidade é

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\,. \tag{I.3}$$

É válida para todo o inteiro $n \geq 1$ e pode provar-se do modo seguinte: Considere-se a igualdade $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ escrita na forma

$$3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3 - k^3.$$

Fazendo $k = 1, 2, ..., n - 1$, obtém-se as $n - 1$ fórmulas

$$3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = 2^3 - 1^3$$
$$3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = 3^3 - 2^3$$

$$3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 = n^3 - (n-1)^3.$$

Somando as igualdades, membro a membro, todos os termos do segundo membro se eliminam, excepto dois, resultando

$$3[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2] + 3[1 + 2 + \cdots + (n-1)] + (n-1) = n^3 - 1^3.$$

A expressão do segundo parêntesis reto é a soma dos termos de uma progressão aritmética, cujo valor é $\frac{1}{2}n(n-1)$. Por conseguinte a última igualdade dá-nos

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}. \tag{I.4}$$

Somando n^2 a ambos os membros obtemos (I.3).

As expressões exactas dadas nos segundos membros de (I.3) e (I.4) não são necessárias ao objectivo que se persegue. Tudo o que necessitamos é a *dupla desigualdade*

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \tag{I.5}$$

válida para todo o inteiro $n \geq 1$. Esta dupla desigualdade pode ser deduzida fàcilmente de (I.3) e (I.4), ou direitamente por indução (ver Secção I. 4.1).

Multiplicando (I.5) por b^3/n^3 e considerando (I.1) e (I.2) obtém-se

$$s_n < \frac{b^3}{3} < S_n \tag{I.6}$$

para todo o n inteiro e positivo. A dupla desigualdade (I.6) exprime que, para todo o n inteiro e positivo, o número $b^3/3$ está compreendido entre s_n e S_n. Podemos agora provar que $b^3/3$ é o *único* número que goza desta propriedade, isto é, que se A é um número qualquer que verifica

$$s_n < A < S_n \tag{I.7}$$

para todo o inteiro e positivo n, então $A = b^3/3$. Foi devido a este fato que Arquimedes concluiu que a área do segmento parabólico é $b^3/3$.

Para provar que $A = b^3/3$ utiliza-se uma vez mais a dupla desigualdade (I.5). Somando n^2 a ambos os membros da desigualdade da esquerda em (I.5) obtém-se:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 < \frac{n^3}{3} + n^2.$$

Multiplicando por b^3/n^3, e considerando (I.1), pode escrever-se

$$< \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n}. \tag{I.8}$$

Analogamente, subtraindo n^2 a ambos os membros da desigualdade da direita em (I.5) e multiplicando por b^3/n^3, obtém-se:

$$\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < s_n. \tag{I.9}$$

Porém, qualquer número A verificando (I.7) deve igualmente verificar

$$\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < A < \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n} \tag{I.10}$$

para todo o inteiro $n \geq 1$. Existem, então, unicamente três possibilidades:

$$A > \frac{b^3}{3}, \qquad A < \frac{b^3}{3}, \qquad A = \frac{b^3}{3}.$$

Se provarmos que as duas primeiras conduzem a contradições, então necessariamente terá que ser $A = \dfrac{b^3}{3}$, uma vez que, no estilo de Sherlock Holmes, se esgotam assim todas as possibilidades.

Suponhamos que a desigualdade $A > b^3/3$ era verdadeira. Da segunda desigualdade em (I.10) obtém-se

$$A - \frac{b^3}{3} < \frac{b^3}{n} \tag{I.11}$$

para todo o inteiro $n \geq 1$. Uma vez que $A - b^3/3$ é positivo, podemos dividir ambos os membros de (I.11) por $A - b^3/3$ e multiplicar em seguida por n para obter a desigualdade

$$n < \frac{b^3}{A - b^3/3}$$

para todo o n já referido. Mas esta desigualdade é evidentemente falsa para $n \geq b^3/(A-b^3/3)$. Portanto a desigualdade $A > b^3/3$ conduz a uma contradição. De maneira análoga se pode provar que $A < \frac{b^3}{3}$ conduz igualmente a uma contradição e por conseguinte deverá ser $A = b^3/3$, como já se afirmara.

***I 1.4 Exercícios**

1. (a) Modificar a região indicada na fig. I.3 supondo que a ordenada, para cada valor de x, é $2x^2$ em vez de x^2. Desenhar a nova figura. Repetir para este caso os passos principais da anterior seção e determinar o efeito desta modificação no cálculo da área. Fazer o mesmo se a ordenada, para cada x, é (b) $3x^3$, (c) $\frac{1}{4}x^2$, (d) $2x^2 + 1$, (e) $ax^2 + c$.
2. Modificar a região na fig. I.3, supondo que a ordenada, para cada x, é x^3 em vez de x^2. Desenhar a nova figura.
(a) Usar uma construção análoga à indicada na fig. I.5 e mostrar que as somas exterior e interior S_n e s_n são dadas por

$$S_n = \frac{b^4}{n^4}(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3), \qquad s_n = \frac{b^4}{n^4}[1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3].$$

(b) Usar a dupla desigualdade (que pode ser demonstrada por indução; ver Secção I.4.2.).

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 < \frac{n^4}{4} < 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \qquad \text{(I.12)}$$

para provar que $s_n < b^4/4 < S_n$ para todo o n e provar que $b^4/4$ é o *único* número compreendido entre s_n e S_n para qualquer n.
(c) Que valor substitue $b^4/4$ se a ordenada, para cada x, for $ax^3 + c$?
3. As desigualdades (I.5) e (I.12) são casos particulares da dupla desigualdade mais geral

$$1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k < \frac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k + 2^k + \cdots + n^k \qquad \text{(I.13)}$$

válida para todo o inteiro $n \geq 1$ e todo o inteiro $k \geq 1$. Suposta (I.13) verdadeira, generalizar os resultados do Exercicio 2.

I 1.5 Análise crítica do método de Arquimedes

Mediante cálculos análogos aos feitos na Secção I 1.3, Arquimedes concluiu que a área do segmento parabólico considerado é $b^3/3$. Este facto foi aceite como um teorema matemático, até que, passados cerca de 2000 anos, se pensou que deviam ser analisados os resultados dum ponto de vista mais crítico. Para compreender as razões porque houve quem puzesse em dúvida a validade da conclusão de Arquimedes, é necessário conhecer algo acerca das importantes mudanças que tiveram lugar na história recente da Matemática.

Cada ramo do conhecimento é um conjunto de ideias descritas por intermédio de palavras e símbolos, e não se podem compreender estas ideias sem um conhecimento exacto do significado das palavras e dos símbolos utilizados. Alguns ramos do conhecimento, conhecidos por *sistemas dedutivos,* são diferentes de outros pelo facto de que um certo número de conceitos "não definidos" são escolhidos *à priori* e todos os restantes conceitos no sistema são definidos a partir daqueles.

Certas afirmações acerca destes conceitos não definidos toman-se como *axiomas* ou *postulados* e outras relações que podem deduzir-se destes axiomas são chamadas *teoremas*. O exemplo mais familiar de um sistema dedutivo é a Geometria euclidiana estudada por toda a pessoa culta desde a época da Grécia Antiga.

O espírito da primitiva matemática grega, seguindo o método de postulados e teoremas como na Geometria dos *Elementos* de Euclides, dominou o pensamento matemático até à época do Renascimento. Uma nova e vigorosa fase no desenvolvimento da Matemática começou com a aparição da Álgebra no sec. XVI, e os 300 anos que se seguiram foram testemunhas de grande quantidade de importantes descobertas. O raciocínio lógico, preciso, do método dedutivo, com o uso de axiomas, definições e teoremas, esteve manifestamente ausente durante este período. Em vez disso, os pioneiros nos séculos XVI, XVII e XVIII recorriam a uma mistura de raciocínio dedutivo combinado com intuição, mera conjectura e misticismo, e não surpreenderá que se tenha visto mais tarde que alguns dos seus resultados eram incorrectos. Contudo, um número surpreendentemente grande de importantes descobertas ocorreram neste período e uma grande parte deste trabalho sobreviveu à prova da História — um prémio à destreza e engenho daqueles cientistas.

Quando o caudal de novas descobertas começou a diminuir, um novo e mais crítico período apareceu. Pouco a pouco os matemáticos viram-se forçados a voltar às ideias clássicas do método dedutivo, numa tentativa de colocar a nova Matemática numa base firme. Esta fase de desenvolvimento, que começa em princípios do século XIX e continuou até o momento presente, alcançou um grau de abstracção e pureza lógica que ultrapassou todas as tradições da ciência Grega. Simultâneamente proporcionou uma compreensão mais clara dos fundamentos, não só do Cálculo, mas de todos os ramos da Matemática.

Existem várias formas de estruturar o Cálculo como sistema dedutivo. Uma maneira possível é tornar os números reais como conceitos não definidos. Algumas das regras que regem