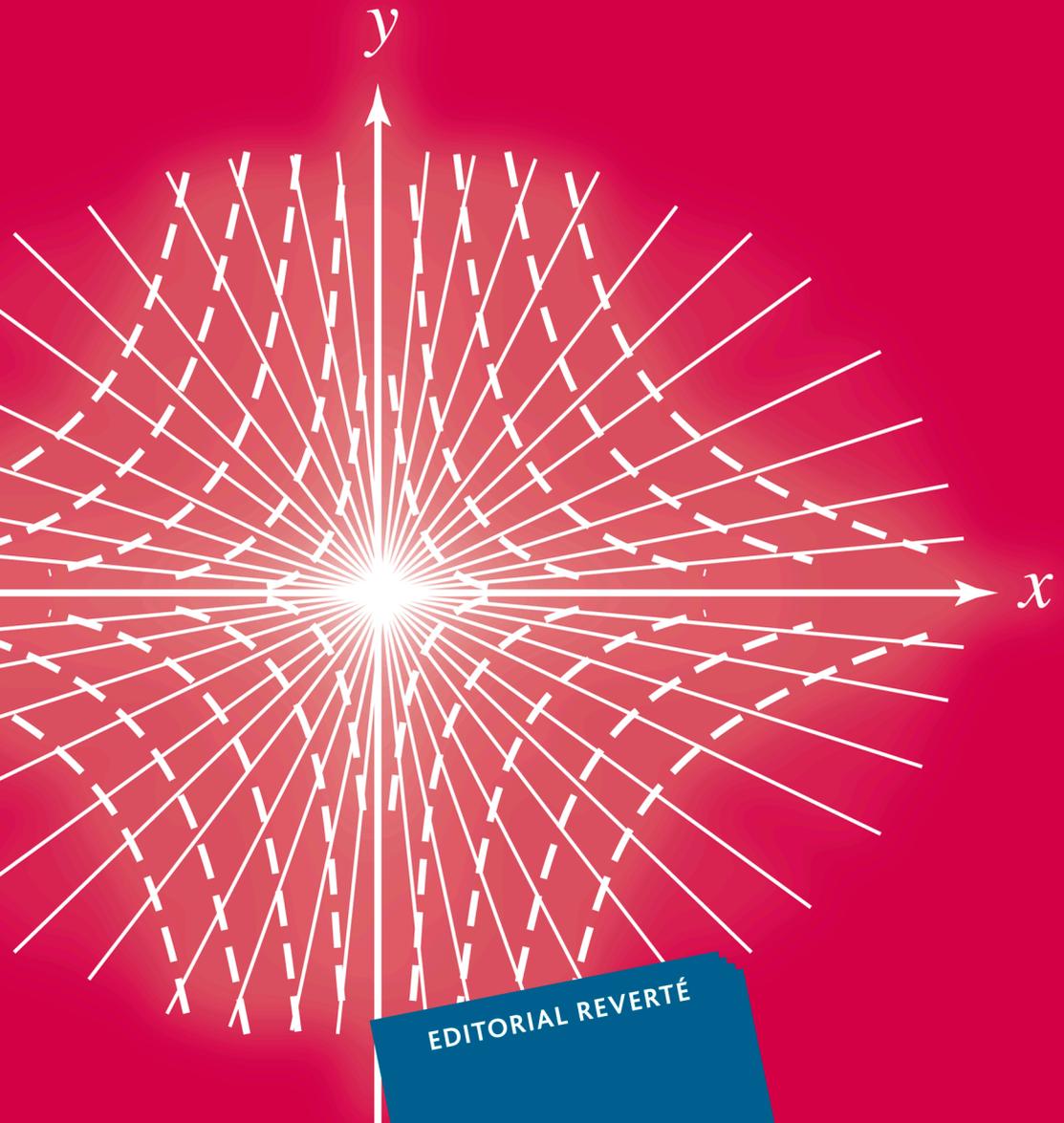


Tom M. Apostol

CÁLCULO I

Cálculo com funções de uma variável, com uma introdução à Álgebra Linear



EDITORIAL REVERTÉ

Tom M. Apostol

CÁLCULO I

Cálculo com funções de uma variável, com uma introdução à Álgebra Linear



EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

Título da obra original:

**CALCULUS, one – variable calculus,
with an introduction to linear algebra
Volume 1**

Edição original em língua inglesa publicada por

Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts, U.S.A.

Copyright © by Blaisdell Publishing Company

Edição em português:

© Editorial Reverté, S. A., 1988

ISBN: 978-84-291-5015-5 Tomo 1

ISBN: 978-84-291-5014-8 Obra completa

Edição em português (PDF):

ISBN: 978-84-291-9302-2

Tradução de:

Doutor António Ribeiro Gomes

Professor Catedrático da Faculdade de Ciências e
Tecnologia da Universidade de Coimbra

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Loreto, 13-15. Local B

08029 Barcelona. ESPAÑA

Tel: (34) 93 419 33 36

reverte@reverte.com

www.reverte.com

Proibida a reprodução de toda ou parte desta obra, sob qualquer forma, sem autorização por escrito do editor.

a

Jane e Stephen

PREFÁCIO

Excertos do Prefácio da Primeira Edição

Parece não haver acordo sobre o que deva constituir um primeiro curso de Cálculo e Geometria Analítica. Insistem alguns que a única via para compreender realmente o Cálculo principia com um estudo completo do sistema dos números reais, desenvolvendo-o passo a passo de uma maneira lógica e rigorosa. Argumentam outros que o Cálculo é fundamentalmente um instrumento para engenheiros e físicos; conseqüentemente acreditam que o curso deve conduzir às aplicações do Cálculo, fazendo apelo à intuição para depois, pela prática de resolução de problemas, desenvolver a destreza manipulatória. Há muito de correto em ambos os pontos de vista. O Cálculo é uma ciência dedutiva e um ramo da Matemática Pura. Ao mesmo tempo é muito importante lembrar que o Cálculo tem raízes profundas em problemas físicos e que muita da sua potência e beleza deriva da variedade das suas aplicações. É possível combinar um desenvolvimento teórico profundo com uma sadia formação técnica; este livro representa uma tentativa de estabelecimento de um equilíbrio sensato entre os dois pontos de vista. Embora tratando o Cálculo como uma ciência dedutiva, o livro não põe de parte as aplicações a problemas físicos. As demonstrações de todos os teoremas importantes são considerados como uma parte fundamental do desenvolvimento das ideias matemáticas; as demonstrações são muitas vezes precedidas duma discussão geométrica ou intuitiva, de modo a dar ao estudante uma visão mais penetrante do porquê da demonstração. Embora estas discussões intuitivas satisfaçam os leitores que não estejam interessados na demonstração detalhada, também se inclui a demonstração completa para aqueles que preferem uma exposição mais rigorosa.

A seqüência dos assuntos neste livro foi sugerida pelo desenvolvimento histórico e filosófico do Cálculo e da Geometria Analítica. Por exemplo a integração é tratada antes da derivação. Ainda que esta ordenação de matérias possa ser pouco frequente, é historicamente correcta e pedagogicamente adequada, além de que é a melhor maneira de tornar patente a verdadeira conexão entre o integral e a derivada.

O conceito de integral é apresentado em primeiro lugar para funções em escada. Uma vez que o integral duma função em escada não é mais que uma soma, a teoria da integração é

extremamente simples neste caso. Enquanto o estudante aprende as propriedades do integral para funções em escada, ganha experiência no uso da notação de somação e ao mesmo tempo familiariza-se com a notação para integrais. Assim se solidificam os degraus de desenvolvimento, de tal modo que a transição de funções em escada para funções mais gerais parece fácil e natural.

Prefácio da Segunda Edição

A segunda edição difere da primeira em muitos aspectos. Juntou-se a Álgebra Linear, os teoremas da média e as aplicações de rotina do Cálculo foram introduzidos nos primeiros capítulos e acrescentou-se grande número de novos exercícios simples. Uma análise rápida do índice de matérias revela que o livro foi dividido em capítulos de menor extensão, cada um deles dedicado a um conceito importante. Várias Secções foram escritas de novo e reorganizadas de modo a proporcionar uma melhor motivação e melhorar o curso das ideias.

Como na primeira edição, cada conceito novo importante vem precedido de uma introdução histórica, descrevendo o seu desenvolvimento desde uma primitiva noção física intuitiva até à sua formulação matemática precisa. O estudante descobre algo dos esforços do passado e dos triunfos dos homens que mais contribuíram para o assunto. Deste modo o estudante torna-se um participante activo na evolução das idéias e não um mero observador passivo dos resultados.

A segunda edição, tal como a primeira, está dividida em dois volumes. As duas primeiras terças partes do volume I tratam o Cálculo para funções de uma variável, incluindo séries e uma introdução às equações diferenciais. A última terça parte deste volume introduz a Álgebra Linear com aplicações à Geometria e à Análise. Grande parte destes temas apoiam-se solidamente no cálculo de exemplos que ilustram a teoria geral. Proporciona uma mistura de Álgebra e Análise e contribui para preparar o caminho para a transição do Cálculo a uma variável para o Cálculo com várias variáveis, tratado no volume II. Um desenvolvimento mais amplo da Álgebra Linear aparece como necessário na segunda edição do Volume II.

Uma vez mais reconheço com agrado a minha dívida para com os Professores H. F. Bollenblust, A. Erdélyi, F. B. Fuller, K. Hoffmann, G. Springer e H. S. Zuckerman. A sua influência na primeira edição continuou na segunda. Na preparação da segunda edição recebi também a ajuda do Professor Basil Gordon que sugeriu muitas modificações. Agradecimentos são também devidos a George Springer e William P. Ziemer que leram as últimas provas. O pessoal de Blaisdell Publishing Company prestou, como sempre, grande ajuda; apreciei a sua simpática aceitação dos meus desejos respeitantes ao formato e tipografia.

Finalmente tenho especial satisfação em expressar a minha gratidão a minha esposa, por ter contribuído por diversas formas na preparação de ambas as edições. Como testemunho do meu agradecimento dedico-lhe, com prazer, este livro.

Índice analítico

PREFACIO

INTRODUÇÃO 1

Parte 1. Introdução histórica

- I 1.1. Os dos conceitos básicos do cálculo 1
- I 1.2. Introdução histórica 3
- I 1.3. O método de exaustão para área de um «segmento parabólico» 4
- *I 1.4. Exercícios 9
- I 1.5. Análisis crítica do método de Arquímedes 10
- I 1.6. A introdução ao cálculo utilizada neste livro 12

Parte 2. Conceitos fundamentais da Teoria dos Conjuntos

- I 2.1. Introdução à teoria dos conjuntos 13
- I 2.2. Notações para representar conjuntos 14
- I 2.3. Subconjuntos 14
- I 2.4. Reuniões, intersecções, complementos, 16
- I 2.5. Exercícios 18

Parte 3. Um conjunto de axiomas para o Sistema de Números Reais

- I 3.1. Introdução 20
- I 3.2. Axiomas do corpo 21
- *I 3.3. Exercícios 23
- I 3.4. Axiomas de ordem 23
- *I 3.5. Exercícios 25
- I 3.6. Números inteiros e números racionais 25

X *Índice analítico*

I 3.7.	Interpretação geométrica dos números reais como pontos de uma reta	26
I 3.8.	Limite superior dum conjunto, elemento máximo, extremo superior (supremo)	27
I 3.9.	O axioma do extremo superior (axioma de completitude)	29
I 3.10.	A propriedade arquimediana do sistema dos números reais	30
I 3.11.	Propriedades fundamentais do supremo e do ínfimo	31
* I 3.12.	Exercícios	33
* I 3.13.	Existência de raízes quadradas para os números reais não negativos	34
* I 3.14.	Raízes de ordem superior. Potências racionais	35
* I 3.15.	Representação dos números reais por meio de decimais	36

Parte 4. Indução matemática, símbolo somatório e questões afins

I 4.1.	Um exemplo de demonstrações por indução matemática	39
I 4.2.	O princípio da indução matemática	40
* I 4.3.	O princípio de boa ordem	41
I 4.4.	Exercícios	42
* I 4.5.	Demonstração do princípio de boa ordem	44
I 4.6.	O símbolo somatório	45
I 4.7.	Exercícios	
I 4.8.	Valores absolutos e desigualdade triangular	49
I 4.9.	Exercícios	52
* I 4.10.	Exercícios vários referentes ao método de indução	53

1. OS CONCEITOS DO CÁLCULO INTEGRAL 59

1.1.	As ideias fundamentais da geometria cartesiana	59
1.2.	Funções. Idéias gerais e exemplos	61
* 1.3.	Funções. Definição formal como um conjunto de pares ordenados	65
1.4.	Mais exemplos de funções reais	66
1.5.	Exercícios	68
1.6.	O conceito de área como uma função de conjunto	70
1.7.	Exercícios	73
1.8.	Intervalos e conjuntos de ordenadas	74
1.9.	Partições e funções em escada	75
1.10.	Soma e produto de funções em escada	77
1.11.	Exercícios	77
1.12.	A definição integral para funções em escada	79
1.13.	Propriedades do integral dum função em escada	80
1.14.	Outras notações para os integrais	85
1.15.	Exercícios	85
1.16.	O integral de funções mais gerais	88
1.17.	Integrais superior e inferior	90
1.18.	A área de um conjunto de ordenadas expressa por um integral	91
1.19.	Observações relativas à teoria e técnica de integração	92
1.20.	Funções monótonas e monótonas por partes. Definições e exemplos	93
1.21.	Integrabilidade de funções monótonas limitadas	94
1.22.	Cálculo do integral de uma função monótona limitada	96

1.23.	Cálculo do integral dx quando p é um inteiro positivo	97
1.24.	Propriedades fundamentais do integral	97
1.25.	Integração de polinómios	99
1.26.	Exercícios	100
1.27.	Demonstração das propriedades fundamentais do integral	101
2. ALGUMAS APLICAÇÕES DA TEORIA DA INTEGRAÇÃO		107
2.1.	Introdução	107
2.2.	A área de uma região compreendida entre dois gráficos representada por um integral	107
2.3.	Exemplos resolvidos	109
2.4.	Exercícios	113
2.5.	As funções trigonométricas	114
2.6.	Fórmulas de integração para o seno e o cosseno	117
2.7.	Descrição geométrica das funções seno e cosseno	122
2.8.	Exercícios	126
2.9.	Coordenadas polares	128
2.10.	O integral para área em coordenadas polares	131
2.11.	Exercícios	133
2.12.	Aplicação da integração ao cálculo de volume	133
2.13.	Exercícios	136
2.14.	Aplicação da integração ao conceito de trabalho	137
2.15.	Exercícios	140
2.16.	Valor médio de uma função	140
2.17.	Exercícios	142
2.18.	O integral como função do limite superior. Integrais indefinidos	144
2.19.	Exercícios	148
3. FUNÇÕES CONTÍNUAS		151
3.1.	Ideia intuitiva de continuidade	151
3.2.	Definição de limite de uma função	152
3.3.	Definição de continuidade de uma função	156
3.4.	Teoremas fundamentais sobre limites. Mais exemplos de funções contínuas	157
3.5.	Demonstrações dos teoremas fundamentais sobre limites	161
3.6.	Exercícios	164
3.7.	Funções compostas e continuidade	166
3.8.	Exercícios	168
3.9.	Teorema de Bolzano para funções contínuas	169
3.10.	O teorema do valor intermédio para funções contínuas	171
3.11.	Exercícios	172
3.12.	O processo de inversão	173
3.13.	Propriedades de funções que se mantêm por inversão	174
3.14.	Inversos de funções monótonas «por intervalos»	176
3.15.	Exercícios	177

XII *Índice analítico*

- 3.16. O teorema dos valores extremos para funções contínuas 177
- 3.17. Teorema da continuidade uniforme 180
- 3.18. Teorema da integrabilidade para funções contínuas 181
- 3.19. Teoremas da média para integrais de funções contínuas 182
- 3.20. Exercícios 183

4. CÁLCULO DIFERENCIAL 185

- 4.1. Introdução histórica 185
- 4.2. Um problema relativo à velocidade 186
- 4.3. A derivada de uma função 189
- 4.4. Exemplos de derivadas 1290
- 4.5. A álgebra das derivadas 193
- 4.6. Exercícios 197
- 4.7. Interpretação geométrica da derivada como um declive 199
- 4.8. Outras notações para as derivadas 201
- 4.9. Exercícios 204
- 4.10. A regra para a derivação de funções compostas 205
- 4.11. Aplicações da regra de derivação de uma função composta. Coeficientes de variação ligados e derivação implícita 208
- 4.12. Exercícios 211
- 4.13. Aplicações da derivação à determinação dos extremos de funções 213
- 4.14. O teorema do valor médio para derivadas 216
- 4.15. Exercícios 219
- 4.16. Aplicações do teorema do valor médio a propriedades geométricas das funções 220
- 4.17. Critério da derivada de segundo ordem para a determinação de extremos 221
- 4.18. Traçado de curvas 222
- 4.19. Exercícios 224
- 4.20. Exemplos resolvidos de problemas de extremos 225
- 4.21. Exercícios 227
- *4.22. Derivadas parciais 230
- *4.23. Exercícios 235

5. RELAÇÃO ENTRE INTEGRAÇÃO E DERIVAÇÃO 237

- 5.1. A derivada de um integral indefinido. O primeiro teorema fundamental do cálculo 237
- 5.2. Teorema de derivada nula 240
- 5.3. Funções primitivas e o segundo teorema fundamental do cálculo 240
- 5.4. Propriedades de uma função estabelecidas a partir de propriedades da sua derivada 243
- 5.5. Exercícios 243
- 5.6. A notação de Leibniz para as primitivas 246
- 5.7. Integração por substituição 248
- 5.8. Exercícios 253

- 5.9. Integração por partes 254
- 5.10. Exercícios 257
- *5.11. Exercícios de revisão variados 259

6. FUNÇÃO LOGARITMO, FUNÇÃO EXPONENCIAL E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS 265

- 6.1. Introdução 265
- 6.2. Motivação para a definição do logaritmo natural como um integral 266
- 6.3. A definição de logaritmo. Propriedades fundamentais 269
- 6.4. O gráfico do logaritmo natural 270
- 6.5. Consequências da equação funcional $L(ab) = L(a) + L(b)$ 270
- 6.6. Logaritmos referidos a qualquer base positiva $b \neq 1$ 271
- 6.7. Fórmulas de derivação e integração contendo logaritmos 273
- 6.8. Derivação logarítmica 275
- 6.9. Exercícios 276
- 6.10. Aproximação polinomial para o logaritmo 278
- 6.11. Exercícios 282
- 6.12. A função exponencial 283
- 6.13. Exponenciais expressas como potências de e 285
- 6.14. A definição de e^x para x real qualquer 285
- 6.15. A definição de a^x para $a > 0$ e x real 286
- 6.16. Derivação e integração de fórmulas contendo exponenciais 286
- 6.17. Exercícios 290
- 6.18. Funções hiperbólicas 292
- 6.19. Exercícios 293
- 6.20. Derivadas de funções inversas 294
- 6.21. Inversas das funções trigonométricas 295
- 6.22. Exercícios 299
- 6.23. Integração por decomposição em frações simples 301
- 6.24. Integrais que podem ser transformados em integrais de funções racionais 308
- 6.25. Exercícios 310
- 6.26. Exercícios de revisão variados 312

7. APROXIMAÇÃO POLINOMIAL DE FUNÇÕES 317

- 7.1. Introdução 317
- 7.2. Polinómios de Taylor gerados por uma função 318
- 7.3. Cálculo de polinómios de Taylor 321
- 7.4. Exercícios 323
- 7.5. Fórmula de Taylor com resto 324
- 7.6. Estimativa do erro na fórmula de Taylor 326
- *7.7. Outras formas para o resto da fórmula de Taylor 329
- 7.8. Exercícios 331
- 7.9. Outras observações acerca do erro na fórmula de Taylor. A notação O 333
- 7.10. Aplicações às formas indeterminadas 336

XIV *Índice analítico*

- 7.11. Exercícios 338
- 7.12. Regra de L'Hôpital para a forma indeterminada O/O 340
- 7.13. Exercícios 343
- 7.14. Os símbolos $+\infty$ e $-\infty$. Extensão da regra de L'Hôpital 345
- 7.15. Limites infinitos 347
- 7.16. O comportamento de $\log x$ e e^x para grandes valores de x 349
- 7.17. Exercícios 351

- 8. INTRODUÇÃO AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS 355
 - 8.1. Introdução 355
 - 8.2. Terminologia e notação 356
 - 8.3. Equação diferencial de primeira ordem para a função exponencial 358
 - 8.4. Equações diferenciais lineais de primeira ordem 359
 - 8.5. Exercícios 362
 - 8.6. Alguns problemas físicos conduzindo à resolução de equações diferenciais lineais de primeira ordem 363
 - 8.7. Exercícios 370
 - 8.8. Equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes 375
 - 8.9. Existência de soluções da equação $y'' + by = 0$ 375
 - 8.10. Redução da equação geral ao caso particular $y'' + by = 0$ 376
 - 8.11. Teorema de unicidades para a equação $y'' + by = 0$ 377
 - 8.12. Solução completa da equação $y'' + by = 0$ 379
 - 8.13. Solução completa da equação $y'' + ay' + by = 0$ 379
 - 8.14. Exercícios 381
 - 8.15. Equação diferencial linear de segunda ordem não homogénea com coeficientes constantes 382
 - 8.16. Métodos especiais de determinação de uma solução particular da equação não homogénea $y'' + ay' + by = R$ 386
 - 8.17. Exercícios 387
 - 8.18. Exemplos de problemas físicos conduzindo a uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes 388
 - 8.19. Exercícios 393
 - 8.20. Observações referentes a equações diferenciais não lineais 394
 - 8.21. Curvas integrais e campos direcionais 396
 - 8.22. Exercícios 400
 - 8.23. Equações diferenciais de primeira ordem de variáveis separáveis 400
 - 8.24. Exercícios 403
 - 8.25. Equações homogéneas de primeira ordem 403
 - 8.26. Exercícios 407
 - 8.27. Alguns problemas físicos e geométricos conduzindo no estabelecimento de equações diferenciais de primeira ordem 407
 - 8.28. Exercícios de revisão variados 412

- 9. NÚMEROS COMPLEXOS 415
 - 9.1. Introdução histórica 415
 - 9.2. Definições e propriedades 415

- 9.3. Os números complexos como uma extensão dos números reais 417
- 9.4. A unidade imaginária i 418
- 9.5. Interpretação geométrica. Módulo e argumento 419
- 9.6. Exercícios 422
- 9.7. Exponenciais complexas 423
- 9.8. Funções complexas 426
- 9.9. Exemplos de fórmulas de derivação e integração 427
- 9.10. Exercícios 429

10. SUCESSÕES, SÉRIES, INTEGRAIS IMPRÓPRIOS 433

- 10.1. O paradoxo de Zenão 433
- 10.2. Sucessões 437
- 10.3. Sucessões monótonas de números reais 441
- 10.4. Exercícios 442
- 10.5. Séries infinitas 444
- 10.6. A propriedade da linearidade das séries convergentes 446
- 10.7. Séries telescópicas 447
- 10.8. A série geométrica 449
- 10.9. Exercícios 452
- *10.10. Exercícios sobre desenvolvimentos decimais 455
- 10.11. Critérios de convergência 456
- 10.12. Critérios de comparação para séries de termos não negativos 457
- 10.13. O critério de comparação com um integral 460
- 10.14. Exercícios 461
- 10.15. Critérios da raiz e do cociente para séries de termos não negativos 463
- 10.16. Exercícios 465
- 10.17. Séries alternadas 467
- 10.18. Convergência simples e absoluta 471
- 10.19. Critérios de convergência de Dirichlet e Abel 472
- 10.20. Exercícios 474
- *10.21. Comutatividade nas séries 476
- 10.22. Exercícios de revisão variados 480
- 10.23. Integrais impróprios 483
- 10.24. Exercícios 488

11. SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES 491

- 11.1. Convergência pontual de sucessões de funções 491
- 11.2. Convergência uniforme de uma sucessão de funções 491
- 11.3. Convergência uniforme e continuidade 494
- 11.4. Convergência uniforme e integração 495
- 11.5. Uma condição suficiente para a convergência uniforme 496
- 11.6. Séries de potências. Círculo de convergência 498
- 11.7. Exercícios 500
- 11.8. Propriedades das funções representadas por séries reais de potências 502
- 11.9. A série de Taylor gerada por uma função 505

XVI *Índice analítico*

- 10.10. Uma condição suficiente de convergência da série de Taylor 506
- 11.11. Desenvolvimento em série de potências das funções exponencial e trigonométricas 507
- 11.12. Teorema de Bernstein 508
- 11.13. Exercícios 509
- 11.14. Séries de potências e equações diferenciais 511
- 11.15. A série binomial 514
- 11.16. Exercícios 515

- 12. ALGEBRA VETORIAL 519
 - 12.1. Introdução histórica 519
 - 12.2. O espaço vetorial dos sistemas de IV números reais 520
 - 12.3. Interpretação geométrica $n \leq 3$ 522
 - 12.4. Exercícios 525
 - 12.5. Produto escalar 526
 - 12.6. Norma ou comprimento de um vetor 528
 - 12.7. Ortogonalidade de vetores 530
 - 12.8. Exercícios 531
 - 12.9. Projeções. Ângulo de dois vetores num espaço a N dimensões 533
 - 12.10. Vetores coordenados unitários 534
 - 12.11. Exercícios 536
 - 12.12. O subespaço de um conjunto finito de vetores 539
 - 12.13. Independência linear 540
 - 12.14. Bases 543
 - 12.15. Exercícios 545
 - 12.16. O espaço vetorial V_n dos n -sistemas de números complexos 546
 - 12.17. Exercícios 548

- 13. APLICAÇÕES DA ALGEBRA VETORIAL A GEOMETRIA ANALÍTICA 551
 - 13.1. Introdução 551
 - 13.2. Retas num espaço n dimensional 552
 - 13.3. Algumas propriedades simples da reta 553
 - 13.4. Retas em funções vetoriais 555
 - 13.5. Exercícios 557
 - 13.6. Plano no espaço euclidiano n dimensional 558
 - 13.7. Planos em funções vetoriais 562
 - 13.8. Exercícios 563
 - 13.9. Produto vetorial 564
 - 13.10. O produto vetorial expresso na forma de determinante 566
 - 13.11. Exercícios 568
 - 13.12. O produto misto ou triplo escalar 570
 - 13.13. Regra de Cramer para a resolução de um sistema de tres equações lineais 572
 - 13.14. Exercícios 573

- 13.15. Vetores normais a planos 575
- 13.16. Equações lineares cartesianas definindo planos 577
- 13.17. Exercícios 578
- 13.18. As secções cónicas 580
- 13.19. Excentricidade das secções cónicas 583
- 13.20. Equações polares das cónicas 584
- 13.21. Exercícios 586
- 13.22. Cónicas simétricas relativamente à origem 587
- 13.23. Equações cartesianas das cónicas 588
- 13.24. Exercícios 591
- 13.25. Exercícios variados sobre cónicas 593

14. CALCULO COM FUNÇÕES VETORIAIS 597

- 14.1. Funções vetoriais de uma variável real 597
- 14.2. Operações algébricas. Componentes 597
- 14.3. Limites, derivadas e integrais 598
- 14.4. Exercícios 601
- 14.5. Aplicações às curvas. Tangência 603
- 14.6. Aplicações ao movimento curvilíneo. Vetor velocidade, grandeza do vetor, velocidade e vetor aceleração 606
- 14.7. Exercícios 610
- 14.8. A tangente unitária, a norma principal, e o plano osculador a uma curva 612
- 14.9. Exercícios 615
- 14.10. Comprimento de um arco de curva 616
- 14.11. Aditividade do comprimento do arco 619
- 14.12. A função comprimento de arco 620
- 14.13. Exercícios 623
- 14.14. Curvatura de uma curva 625
- 14.15. Exercícios 627
- 14.16. Os vetores velocidade e aceleração em coordenadas polares 628
- 14.17. Movimento plano como aceleração radial 631
- 14.18. Coordenadas cilíndricas 631
- 14.19. Exercícios 632
- 14.20. Aplicações ao movimento dos planetas 634
- 14.21. Exercícios de revisão 638

15. ESPAÇOS LINEAIS 641

- 15.1. Introdução 641
- 15.2. Definição de espaço linear 641
- 15.3. Exemplos de espaços lineais 643
- 15.4. Conseqüências elementares dos axiomas 644
- 15.5. Exercícios 645
- 15.6. Subespaços de um espaço linear 647
- 15.7. Conjuntos dependentes e independentes num espaço linear 648

XVIII *Índice analítico*

15.8.	Bases e dimensão	650
15.9.	Exercícios	651
15.10.	Produto interno, espaços euclidianos. Normas	652
15.11.	Ortogonalidade num espaço euclidiano	656
15.12.	Exercícios	658
15.13.	Construção de conjunto ortogonais. O método de Gram-Schmidt	661
15.14.	Complementos ortogonais. Projecções	665
15.15.	A melhor aproximação de elementos de um espaço euclidiano por elemento de um subespaço de dimensão finita	668
15.16.	Exercícios	669

16. TRANSFORMAÇÕES LINEAIS E MATRIZES 671

16.1.	Transformações lineais	671
16.2.	Espaço nulo e contradomínio	673
16.3.	Nulidade e ordem	674
16.4.	Exercícios	675
16.5.	Operações algébricas relativas a transformações lineais	677
16.6.	Inversas	679
16.7.	Transformações lineares biunívocas	682
16.8.	Exercícios	684
16.9.	Transformações lineais com valores determinados	686
16.10.	Representação matricial das transformações lineais	686
16.11.	Construção de uma representação matricial na forma diagonal	690
16.12.	Exercícios	692
16.13.	Espaços lineares de matrizes	694
16.14.	Isomorfismo entre transformações lineais e matrizes	695
16.15.	Multiplicação de matrizes	697
16.16.	Exercícios	700
16.17.	Sistemas de equações lineais	702
16.18.	Técnicas de cálculo	705
16.19.	Inversos de matrizes quadradas	709
16.20.	Exercícios	711
16.21.	Exercícios variados sobre matrizes	712

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS 715

Introdução	715
Capítulo 1	716
Capítulo 2	717
Capítulo 3	720
Capítulo 4	721
Capítulo 5	726
Capítulo 6	728
Capítulo 7	733
Capítulo 8	735
Capítulo 9	739

Capítulo 10	739
Capítulo 11	742
Capítulo 12	744
Capítulo 13	746
Capítulo 14	749
Capítulo 15	752
Capítulo 16	754

ÍNDICE ALFABÉTICO	761
-------------------	-----

INTRODUÇÃO

Parte I – Introdução histórica

I 1.1 Os dois conceitos básicos do cálculo

O notável progresso conhecido pela ciência e tecnologia, durante o último século, foi devido em grande parte ao desenvolvimento da Matemática. O ramo da Matemática conhecido por Cálculo integral e diferencial é um instrumento natural e poderoso para atacar uma variedade de problemas que aparecem na Física, Astronomia, Engenharia, Química, Geologia, Biologia e noutros campos, incluindo mais recentemente alguns das Ciências Sociais.

Para dar a o leitor uma ideia dos muito diversos tipos de problemas que podem ser tratados pelos métodos do Cálculo, expõe-se a seguir uma pequena amostra de questões selecionadas dos exercícios que aparecem em capítulos posteriores deste livro.

Com que velocidade deve ser lançado um foguetão, para que não volte a tombar na Terra? Qual é o raio do menor disco circular que cobre todo o triângulo isósceles de perímetro L ? Qual é o volume do material extraído de uma esfera de raio $2r$, se for atravessada por um orifício cilíndrico, de raio r , e cujo eixo passa pelo centro da esfera? Se uma cultura de bactérias cresce proporcionalmente à quantidade que existe em cada instante, e se a população duplica ao fim de uma hora, quanto terá aumentado ao fim de duas horas? Se uma força de dez quilos faz esticar de um metro uma corda elástica, qual o trabalho necessário para esticar a corda de quatro metros?

Estes exemplos, escolhidos em vários domínios, ilustram algumas das questões técnicas que podem ser resolvidas por aplicações mais ou menos rotinadas do Cálculo.

O Cálculo é mais do que um instrumento técnico — é uma compilação de ideias atraentes e excitantes, que interessaram o pensamento humano durante séculos. Estas ideias estão relacionadas com *velocidade*, *área*, *volume*, *taxa de crescimento*, *continuidade*, *tangente a uma curva* e com outros conceitos dizendo respeito a uma variedade de domínios. O Cálculo obriga-nos a não ir além, antes de pensarmos cuidadosamente acerca do significado destes conceitos. Outro aspecto notável do Cálculo é o seu poder de síntese. Muitos destes conceitos podem ser formulados de maneira que se reduzam a dois outros problemas, mais especializa-

2 Cálculo

dos, de natureza puramente geométrica. Passamos em seguida a uma breve descrição destes problemas.

Consideremos uma curva C situada acima duma reta horizontal (base), como se indica na fig. I.1. Suponhamos que esta curva goza da propriedade de ser intersectada por cada vertical, no máximo, uma vez. A parte sombreada da figura é formada pelos pontos situados abaixo da curva C , acima da horizontal, e entre dois segmentos verticais paralelos que unem C com a horizontal. O primeiro problema fundamental do Cálculo é o seguinte: *Determinar um número que dê a medida da área da parte sombreada da figura.*

Consideremos em seguida uma reta tangente à curva C , como se mostra na fig. I.1. O segundo problema fundamental pode enunciar-se do modo seguinte. *Determinar um número que dê o declive desta reta.*

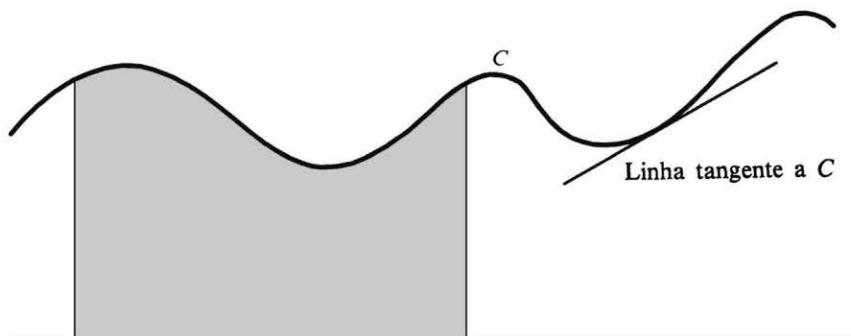


Fig. I.1

Fundamentalmente o Cálculo ocupa-se da formulação exata e da resolução destes dois problemas particulares. Permite-nos *definir* os conceitos de área e tangente, e *calcular* a área de uma dada região, ou o declive de tangente a uma curva dada. O *Cálculo Integral* ocupa-se do problema da área e será discutido neste primeiro capítulo. O *Cálculo Diferencial* ocupa-se do problema da tangente e será analisado no Capítulo 4.

O estudo do Cálculo requer uma certa preparação matemática. O presente capítulo trata desses conceitos básicos e está dividido em quatro partes: a primeira parte dá uma perspectiva histórica; a segunda refere a notação e terminologia da teoria dos conjuntos; a terceira trata do sistema dos números reais; e finalmente a quarta parte trata da indução matemática e da notação somatória. Se o leitor está familiarizado com estes temas pode abordar directamente o desenvolvimento do Cálculo integral, no capítulo 1. Caso contrário deverá familiarizar-se com as matérias contidas nesta introdução, antes de iniciar o estudo do Capítulo.

I 1.2 Introdução histórica

A origem do Cálculo integral remonta a mais de 2000 anos, quando os gregos tentavam resolver o problema da determinação de áreas por um processo que designaram de *método de exaustão*. As ideias fundamentais deste método são elementares e podem descrever-se, sumariamente, do modo seguinte: dada uma região cuja área pretende determinar-se, inscrevemos nela uma região poligonal que se aproxime da região dada e cuja área seja de cálculo fácil. Em seguida, escolhemos outra região poligonal que dê uma melhor aproximação e continuamos o processo tomando *linhas* poligonais com cada vez maior número de lados, de modo a cobrir a região dada. O método está ilustrado na fig. I.2 para o caso duma região semicircular. Este método foi usado com êxito por Arquimedes (287-212 a. C.), para estabelecer fórmulas exactas das áreas do círculo e de algumas outras figuras particulares.

Depois de Arquimedes, o desenvolvimento do método de exaustão teve que esperar quase 18 séculos até que o uso de símbolos e técnicas algébricas se tornaram parte usual da matemática. A Álgebra elementar, que hoje é familiar à maioria dos alunos dos últimos anos do ensino secundário, era completamente desconhecida no tempo de Arquimedes, fato que tornava impossível estender o método a qualquer classe de regiões, sem se conhecer um modo adequado de expressar os extensos cálculos numa forma compacta e simplificada.

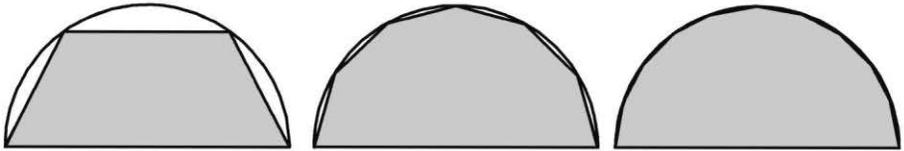


Fig. I.2 O método de exaustão aplicado a uma região semicircular.

Uma mudança lenta, mas revolucionária, no desenvolvimento das notações matemáticas teve início no século XVI. O complicado sistema de numeração romana foi gradualmente substituído pelos caracteres arábicos utilizados ainda hoje, os sinais + e – foram introduzidos pela primeira vez e começaram a reconhecer-se as vantagens da notação decimal. Durante este mesmo período, os brilhantes resultados dos matemáticos italianos Tartaglia, Cardano e Ferrari na determinação de soluções algébricas para as equações cúbica e do quarto grau estimularam o desenvolvimento da Matemática e encorajaram a aceitação da nova e superior linguagem algébrica. Com a larga introdução dos bem escolhidos símbolos algébricos ressuscitou o interesse pelo antigo método de exaustão, e grande número de resultados parciais foram descobertos no século XVI por pioneiros tais como Cavalieri, Toricelli, Roberval, Fermat, Pascal e Wallis.

Gradualmente, o método de exaustão foi transformado no que hoje se designa por Cálculo Integral, nova e poderosa disciplina com uma grande variedade de aplicações não só em problemas geométricos respeitantes a áreas e volumes, mas também em problemas de outras

4 Cálculo

ciências. Este ramo da Matemática, que conservou alguns dos aspetos originais do método de exaustão, recebeu o seu maior impulso no século XVII, devido principalmente aos esforços de Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716) e o seu desenvolvimento continuou até ao século XIX, data em que matemáticos como Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e Bernhard Riemann (1826-1866) lhe deram uma base matemática sólida. Posteriores aperfeiçoamentos e extensões da teoria estão ainda a ser levados a cabo na Matemática contemporânea.

I 1.3 O método de exaustão para a área de um “segmento parabólico”

Antes de passarmos ao estudo sistemático do Cálculo integral, será instrutivo aplicar o método de exaustão directamente a uma das figuras particulares estudadas pelo próprio Arquimedes. A região em questão está representada na figura I.3 e pode descrever-se do modo seguinte: se escolhermos um ponto arbitrário na base da figura e designarmos por x a sua distância a 0, a distância vertical deste ponto à curva é x^2 . Em particular, se o comprimento da base é b a altura da figura é b^2 . A distância vertical de x à curva designa-se por “ordenada” de x . A curva assim descrita é uma *parábola* e a região limitada pela curva e pelos dois segmentos de recta chamar-se-á *segmento parabólico*.

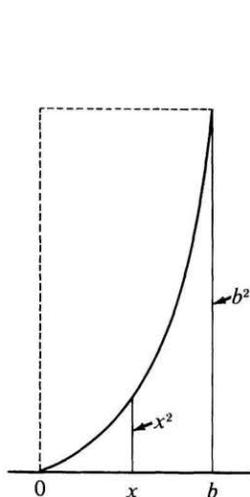


Fig. I.3 Segmento parabólico.

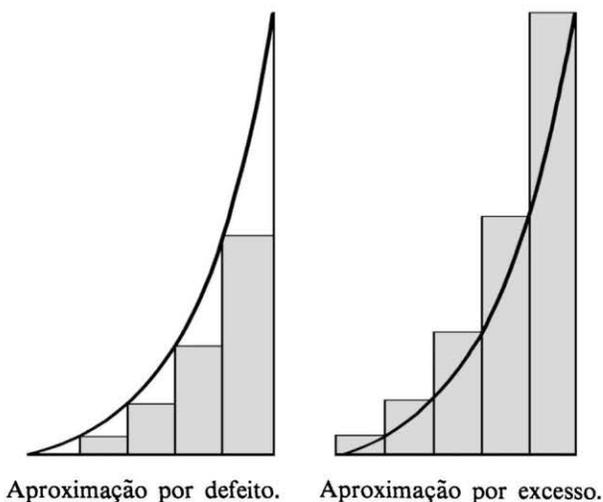


Fig. I.4

Esta figura pode ser contida num retângulo de base b e altura b^2 , como se vê na fig. I.3. Observando a figura é evidente a afirmação de que a área do segmento parabólico é menor que metade da área do retângulo. Arquimedes fez a descoberta surpreendente de que a

área do segmento parabólico é exactamente *um terço* da área do retângulo, isto é, $A = \frac{b^3}{3}$ representando A a área do segmento parabólico. Mostremos como se chega a este resultado.

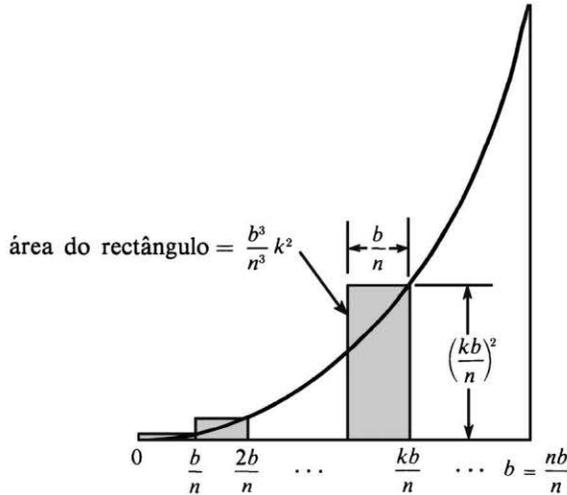


Fig. I.5 Cálculo da área dum segmento parabólico.

Deve notar-se que o segmento parabólico desenhado na fig. I.3 não é exactamente o que Arquimedes considerou, e que os pormenores dos cálculos que se seguem não são exactamente os utilizados por ele. Contudo as *ideias* essenciais são as de Arquimedes; o que apresentamos aqui pode considerar-se o método de exaustão exposto com uma notação moderna.

O método consiste simplesmente no seguinte: divide-se a figura num certo número de bandas e obtêm-se duas aproximações da área da região, uma por defeito e a outra por excesso, usando dois conjuntos de retângulos como se indica na fig. I.4 (utilizam-se retângulos, em vez de polígonos quaisquer, para simplificar os cálculos). A área do segmento parabólico é maior que a área total dos retângulos interiores, mas é menor que a dos retângulos exteriores. Se cada banda se subdivide, para se obter uma nova aproximação com maior número de bandas, a área total dos retângulos interiores *aumenta*, enquanto a área total dos retângulos exteriores *diminui*. Arquimedes compreendeu que se podia obter a área com qualquer grau de aproximação desejado, bastando para tanto tomar um número suficiente de bandas.

O cálculo efetivo efectua-se como a seguir se indica. Com o objectivo de simplificar os cálculos divide-se a base em n partes iguais, cada uma de comprimento b/n (ver fig. I.5). Os pontos de divisão correspondem aos seguintes valores de x :

$$0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}, \dots, \frac{(n-1)b}{n}, \frac{nb}{n} = b.$$

A expressão geral dum ponto de divisão é $x = \frac{kb}{n}$, onde k toma os valores sucessivos $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$. Em cada ponto kb/n constroi-se o retângulo exterior de altura $(kb/n)^2$, como se indica na fig. I.5. A área deste retângulo é o produto da base pela altura e é igual a

$$\left(\frac{b}{n}\right)\left(\frac{kb}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3} k^2.$$

Designando por S_n a soma das áreas de todos os retângulos exteriores, uma vez que a área do k -enésimo retângulo é $(b^3/n^3)k^2$, obtem-se

$$S_n = \frac{b^3}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2). \quad (\text{I.1})$$

Do mesmo modo se obtém a expressão da soma S_n dos rectângulos interiores:

$$s_n = \frac{b^3}{n^3} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2]. \quad (\text{I.2})$$

A forma destas somas é de grande importância no cálculo. Note-se que o fator que multiplica b^3/n^3 na equação (I.1) é a soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2.$$

[O fator correspondente na equação (I.2) é análogo, apenas a soma tem unicamente $n-1$ parcelas]. O cálculo desta soma por adição directa das parcelas, para um grande valor de n , é fastidioso, porém existe uma identidade interessante que torna possível calcula-la dum modo mais simples; a identidade é

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}. \quad (\text{I.3})$$

É válida para todo o inteiro $n \geq 1$ e pode provar-se do modo seguinte: Considere-se a igualdade $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ escrita na forma

$$3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3 - k^3.$$

Fazendo $k = 1, 2, \dots, n - 1$, obtêm-se as $n - 1$ fórmulas

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 &= 2^3 - 1^3 \\ 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 &= 3^3 - 2^3 \end{aligned}$$

$$3(n - 1)^2 + 3(n - 1) + 1 = n^3 - (n - 1)^3.$$

Somando as igualdades, membro a membro, todos os termos do segundo membro se eliminam, excepto dois, resultando

$$3[1^2 + 2^2 + \dots + (n - 1)^2] + 3[1 + 2 + \dots + (n - 1)] + (n - 1) = n^3 - 1^3.$$

A expressão do segundo parêntesis reto é a soma dos termos de uma progressão aritmética, cujo valor é $\frac{1}{2}n(n - 1)$. Por conseguinte a última igualdade dá-nos

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n - 1)^2 = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}. \quad (\text{I.4})$$

Somando n^2 a ambos os membros obtemos (I.3).

As expressões exactas dadas nos segundos membros de (I.3) e (I.4) não são necessárias ao objectivo que se persegue. Tudo o que necessitamos é a *dupla desigualdade*

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n - 1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 \quad (\text{I.5})$$

válida para todo o inteiro $n \geq 1$. Esta dupla desigualdade pode ser deduzida facilmente de (I.3) e (I.4), ou directamente por indução (ver Secção I. 4.1).

Multiplicando (I.5) por b^3/n^3 e considerando (I.1) e (I.2) obtêm-se

$$s_n < \frac{b^3}{3} < S_n \quad (\text{I.6})$$

para todo o n inteiro e positivo. A dupla desigualdade (I.6) exprime que, para todo o n inteiro e positivo, o número $b^3/3$ está compreendido entre s_n e S_n . Podemos agora provar que $b^3/3$ é o *único* número que goza desta propriedade, isto é, que se A é um número qualquer que verifica

$$s_n < A < S_n \quad (\text{I.7})$$

para todo o inteiro e positivo n , então $A = b^3/3$. Foi devido a este fato que Arquimedes concluiu que a área do segmento parabólico é $b^3/3$.

Para provar que $A = b^3/3$ utiliza-se uma vez mais a dupla desigualdade (I.5). Somando n^2 a ambos os membros da desigualdade da esquerda em (I.5) obtém-se:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 < \frac{n^3}{3} + n^2.$$

Multiplicando por b^3/n^3 , e considerando (I.1), pode escrever-se

$$< \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n}. \quad (\text{I.8})$$

Analogamente, subtraindo n^2 a ambos os membros da desigualdade da direita em (I.5) e multiplicando por b^3/n^3 , obtém-se:

$$\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < s_n. \quad (\text{I.9})$$

Porém, qualquer número A verificando (I.7) deve igualmente verificar

$$\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < A < \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n} \quad (\text{I.10})$$

para todo o inteiro $n \geq 1$. Existem, então, unicamente três possibilidades:

$$A > \frac{b^3}{3}, \quad A < \frac{b^3}{3}, \quad A = \frac{b^3}{3}.$$

Se provarmos que as duas primeiras conduzem a contradições, então necessariamente terá que ser $A = \frac{b^3}{3}$, uma vez que, no estilo de Sherlock Holmes, se esgotam assim todas as possibilidades.

Suponhamos que a desigualdade $A > b^3/3$ era verdadeira. Da segunda desigualdade em (I.10) obtém-se

$$A - \frac{b^3}{3} < \frac{b^3}{n} \quad (\text{I.11})$$

para todo o inteiro $n \geq 1$. Uma vez que $A - b^3/3$ é positivo, podemos dividir ambos os membros de (I.11) por $A - b^3/3$ e multiplicar em seguida por n para obter a desigualdade

$$n < \frac{b^3}{A - b^3/3}$$

para todo o n já referido. Mas esta desigualdade é evidentemente falsa para $n \geq b^3/(A - b^3/3)$. Portanto a desigualdade $A > b^3/3$ conduz a uma contradição. De maneira análoga se pode provar que $A < \frac{b^3}{3}$ conduz igualmente a uma contradição e por conseguinte deverá ser $A = b^3/3$, como já se afirmara.

*I.4 Exercícios

- (a) Modificar a região indicada na fig. I.3 supondo que a ordenada, para cada valor de x , é $2x^2$ em vez de x^2 . Desenhar a nova figura. Repetir para este caso os passos principais da anterior seção e determinar o efeito desta modificação no cálculo da área. Fazer o mesmo se a ordenada, para cada x , é (b) $3x^3$, (c) $\frac{1}{4}x^2$, (d) $2x^2 + 1$, (e) $ax^2 + c$.
- Modificar a região na fig. I.3, supondo que a ordenada, para cada x , é x^3 em vez de x^2 . Desenhar a nova figura.
 - Usar uma construção análoga à indicada na fig. I.5 e mostrar que as somas exterior e interior S_n e s_n são dadas por

$$S_n = \frac{b^4}{n^4} (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3), \quad s_n = \frac{b^4}{n^4} [1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3].$$

- Usar a dupla desigualdade (que pode ser demonstrada por indução; ver Seção I.4.2).

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 < \frac{n^4}{4} < 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \quad (\text{I.12})$$

para provar que $s_n < b^4/4 < S_n$ para todo o n e provar que $b^4/4$ é o *único* número compreendido entre s_n e S_n para qualquer n .

- Que valor substitue $b^4/4$ se a ordenada, para cada x , for $ax^3 + c$?
- As desigualdades (I.5) e (I.12) são casos particulares da dupla desigualdade mais geral

$$1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k < \frac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k + 2^k + \cdots + n^k \quad (\text{I.13})$$

válida para todo o inteiro $n \geq 1$ e todo o inteiro $k \geq 1$. Suposta (I.13) verdadeira, generalizar os resultados do Exercício 2.

I 1.5 Análise crítica do método de Arquimedes

Mediante cálculos análogos aos feitos na Secção I 1.3, Arquimedes concluiu que a área do segmento parabólico considerado é $b^3/3$. Este facto foi aceite como um teorema matemático, até que, passados cerca de 2000 anos, se pensou que deviam ser analisados os resultados dum ponto de vista mais crítico. Para compreender as razões porque houve quem puzesse em dúvida a validade da conclusão de Arquimedes, é necessário conhecer algo acerca das importantes mudanças que tiveram lugar na história recente da Matemática.

Cada ramo do conhecimento é um conjunto de ideias descritas por intermédio de palavras e símbolos, e não se podem compreender estas ideias sem um conhecimento exacto do significado das palavras e dos símbolos utilizados. Alguns ramos do conhecimento, conhecidos por *sistemas dedutivos*, são diferentes de outros pelo facto de que um certo número de conceitos “não definidos” são escolhidos *à priori* e todos os restantes conceitos no sistema são definidos a partir daqueles.

Certas afirmações acerca destes conceitos não definidos toman-se como *axiomas* ou *postulados* e outras relações que podem deduzir-se destes axiomas são chamadas *teoremas*. O exemplo mais familiar de um sistema dedutivo é a Geometria euclidiana estudada por toda a pessoa culta desde a época da Grécia Antiga.

O espírito da primitiva matemática grega, seguindo o método de postulados e teoremas como na Geometria dos *Elementos* de Euclides, dominou o pensamento matemático até à época do Renascimento. Uma nova e vigorosa fase no desenvolvimento da Matemática começou com a aparição da Álgebra no sec. XVI, e os 300 anos que se seguiram foram testemunhas de grande quantidade de importantes descobertas. O raciocínio lógico, preciso, do método dedutivo, com o uso de axiomas, definições e teoremas, esteve manifestamente ausente durante este período. Em vez disso, os pioneiros nos séculos XVI, XVII e XVIII recorriam a uma mistura de raciocínio dedutivo combinado com intuição, mera conjectura e misticismo, e não surpreenderá que se tenha visto mais tarde que alguns dos seus resultados eram incorrectos. Contudo, um número surpreendentemente grande de importantes descobertas ocorreram neste período e uma grande parte deste trabalho sobreviveu à prova da História — um prémio à destreza e engenho daqueles cientistas.

Quando o caudal de novas descobertas começou a diminuir, um novo e mais crítico período apareceu. Pouco a pouco os matemáticos viram-se forçados a voltar às ideias clássicas do método dedutivo, numa tentativa de colocar a nova Matemática numa base firme. Esta fase de desenvolvimento, que começa em princípios do século XIX e continuou até o momento presente, alcançou um grau de abstracção e pureza lógica que ultrapassou todas as tradições da ciência Grega. Simultaneamente proporcionou uma compreensão mais clara dos fundamentos, não só do Cálculo, mas de todos os ramos da Matemática.

Existem várias formas de estruturar o Cálculo como sistema dedutivo. Uma maneira possível é tornar os números reais como conceitos não definidos. Algumas das regras que regem